Θεωρία Galois
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2011

1. Έστω α μια μιγαδική ρίζα του πολυωνύμου $x^8 + 2x^4 + 2$.

(α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 8$.

(β) (5 μονάδες) Αν $\beta \in \mathbb{C}$ και $\beta^3 = 5$, δείξτε ότι $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε το ανάγωγο πολυώνυμο του α^2 επί του $\mathbb{Q}$.

(δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε το βαθμό επέκτασης $[\mathbb{Q}(\alpha^3) : \mathbb{Q}]$.

2. (10 μονάδες) Δώστε παράδειγμα ανάγωγου πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ τετάρτου βαθμού, όλες οι ρίζες του οποίου είναι κατασκευάσιμοι πραγματικοί αριθμοί.

3. (10 μονάδες) Έστω $\mathbb{F}_3$ το πεπερασμένο σώμα με τρία στοιχεία. Πόσα είναι τα μονικά, ανάγωγα πολυώνυμα πέμπτου βαθμού του $\mathbb{F}_3[x]$;

4. Δίνεται η επέκταση $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{7})$ του σώματος $\mathbb{Q}$ και τα στοιχεία της $\alpha = i + \sqrt{7}$ και $\beta = 2i - \sqrt{7}$.

(α) (5 μονάδες) Είναι η K επέκταση Galois του $\mathbb{Q}$;

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε την τροχιά του α ως προς την ομάδα Galois $G(K/\mathbb{Q})$.

(γ) (5 μονάδες) Βρείτε όλα τα ενδιάμεσα σώματα της επέκτασης $K/\mathbb{Q}$.

(δ) (5 μονάδες) Αποφανθείτε αν ισχύει $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$.

5. Δίνεται σώμα F χαρακτηριστικής μηδέν και επέκταση Galois K του F, η ομάδα Galois της οποίας είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα τάξης 12.

(α) (5 μονάδες) Πόσα ενδιάμεσα (τετριμμένα ή μη) σώματα έχει η επέκταση K/F;

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα των βαθμών $[L : F]$, όπου το L διατρέχει όλα τα ενδιάμεσα σώματα της επέκτασης K/F.

6. (10 μονάδες) Δίνεται $\zeta \in \mathbb{C}$ με ανάγωγο πολυώνυμο $x^5 + 2x^3 + 2$ επί του $\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\zeta)$ τέτοια ώστε $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = -1$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 6/11/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία