

252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2024
Αθήνα 5/9/2024

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Α είναι οι 6 μονάδες.

A1. Ο ελάχιστος θετικός ακέραιος $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $1 + 2 + \dots + n > 100n$

(α) δεν ορίζεται (β) είναι μικρότερος από 100 (γ) είναι ίσος με 100 (δ) είναι μεγαλύτερος από 100 και μικρότερος από 200 (ε) είναι ίσος με 200 (στ) είναι μεγαλύτερος από 200

A2. Το πλήθος των εξάδων $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Z}^6$ για τις οποίες $|a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| = 2$ είναι ίσο με

(α) 21 (β) 36 (γ) 66 (δ) 72 (ε) 156 (στ) το άπειρο

A3. Το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ στις οποίες το 5 βρίσκεται ακριβώς δίπλα (αριστερά ή δεξιά) στο 6 είναι ίσο με

(α) 120 (β) 240 (γ) 360 (δ) 480 (ε) 600 (στ) 720

A4. Ο συντελεστής του x^3 στο πολυώνυμο $(x + 1)^4 \cdot (x + 1)^5$ είναι ίσος με

(α) 14 (β) 40 (γ) 56 (δ) 70 (ε) 76 (στ) 84

A5. Το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ τα οποία περιέχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό και τουλάχιστον ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 3 είναι ίσο με

(α) 184 (β) 186 (γ) 188 (δ) 190 (ε) 192 (στ) 194

A6. Το μέγιστο πλήθος σημείων ενός τετραγώνου πλευράς μήκους 2 που μπορούν να επιλεγούν, έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο από τα σημεία που επιλέχθηκαν να είναι μεγαλύτερη του $\sqrt{2}$,

(α) είναι μικρότερο του 4 (β) ισούται με 4 (γ) ισούται με 5 (δ) ισούται με 6 (ε) είναι μεγαλύτερο του 6 (στ) δεν ορίζεται

A7. Το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ στις οποίες το 1 βρίσκεται σε διαφορετικό μέρος από το 2 είναι ίσο με

(α) 27 (β) 29 (γ) 31 (δ) 33 (ε) 35 (στ) 37

A8. Αν a και b είναι το ελάχιστο και το μέγιστο πλήθος κορυφών βαθμού 2, αντίστοιχα, που μπορεί να έχει ένα δένδρο με οκτώ κορυφές, τότε το $b - a$ είναι ίσο με

(α) 3 (β) 4 (γ) 5 (δ) 6 (ε) 7 (στ) 8

A9. Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός μιας κορυφής ενός απλού γραφήματος με έξι κορυφές και χρωματικό αριθμό 5 είναι ίσος με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A10. Το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του απλού γραφήματος με κορυφές 1, 2, 3, 4, 5 και 6 και ακμές τις $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ και $\{4, 6\}$ είναι

(α) ίσο με μηδέν (β) ίσο με 1 (γ) ίσο με 2 (δ) ίσο με 3 (ε) ίσο με 4 (στ) μεγαλύτερο από 4

A11. Η παράγωγος της τυπικής δυναμοσειράς $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$ είναι ίση με

(α) $1/(1-x)$ (β) $2/(1-x)$ (γ) $1/(1-x)^2$ (δ) $2/(1-x)^2$ (ε) $1/(1-x)^3$ (στ) $2/(1-x)^3$

A12. Το τετράγωνο της τυπικής δυναμοσειράς $\sum_{n \geq 1} x^n/(n-1)!$ είναι ίσο με

(α) e^{2x} (β) e^{-2x} (γ) xe^{2x} (δ) xe^{-2x} (ε) x^2e^{2x} (στ) x^2e^{-2x}

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το μέρος Β είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^n (k^2 - k) \binom{n}{k}$ για $n \in \mathbb{N}$.

(β) Βρείτε όλες τις τριάδες $m \geq n \geq k$ φυσικών αριθμών για τις οποίες $\binom{m}{n} \binom{n}{k} = 2 \binom{m}{k}$.

B2.

(α) Ένα δένδρο T έχει μία κορυφή βαθμού 4, δύο κορυφές βαθμού 3 και τρεις κορυφές βαθμού 2, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές του είναι φύλλα. Πόσες κορυφές έχει το T ; Δώστε παράδειγμα τέτοιου δένδρου.

(β) Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει απλό συνεκτικό γράφημα με $2n$ κορυφές το οποίο έχει ακριβώς n^2 παράγοντα δένδρα.

Καλή Επιτυχία!