252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2022
Αθήνα 19/9/2022

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται**. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Αν $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-3}$ για $n \geq 3$, τότε το a_6 ισούται με

(α) 5 (β) 8 (γ) 11 (δ) 20 (ε) 23 (στ) 26

Α2. Το πλήθος των ζευγών (S, T) μη κενών υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ για τα οποία $\max(S) = \max(T)$ είναι ίσο με

(α) 31 (β) 85 (γ) 252 (δ) 341 (ε) 512 (στ) 1365

Α3. Το πλήθος των κυκλικών αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ στις οποίες το 1 βρίσκεται δίπλα στο 2 και το 3 βρίσκεται δίπλα στο 4 είναι ίσο με

(α) 120 (β) 240 (γ) 480 (δ) 720 (ε) 1440 (στ) 2880

Α4. Ο συντελεστής του x^4 στο πολυώνυμο $(1 + x + x^2)(1 + x)^8$ είναι ίσος με

(α) 154 (β) 156 (γ) 158 (δ) 160 (ε) 162 (στ) 164

Α5. Το πλήθος των τριάδων $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3$ με $a_1 + a_2 + a_3 = 8$ και $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 2$ ισούται με

(α) 15 (β) 21 (γ) 28 (δ) 35 (ε) 56 (στ) 70

Α6. Το πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ για τις οποίες $1 \sim 5$ και $2 \sim 4$ είναι ίσο με

(α) 5 (β) 6 (γ) 7 (δ) 8 (ε) 9 (στ) 10

Α7. Το πλήθος των τριάδων $(a, b, c) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ για τις οποίες $b \neq a + 1$ και $c \neq b + 2$ είναι ίσο με

(α) 82 (β) 84 (γ) 86 (δ) 88 (ε) 90 (στ) 92

Α8. Το μέγιστο πλάτος μιας μερικής διάταξης $\preceq$ στο σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ για την οποία $1 \prec 2 \prec 3$ και $4 \prec 5 \prec 6$ είναι ίσο με

(α) 2 (β) 3 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 6 (στ) 7

Α9. Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών ενός απλού συνεκτικού γραφήματος που περιέχει επτά κορυφές και ένα μοναδικό κύκλο ως υπογράφημα (α) είναι ίσο με 12 (β) είναι ίσο με 14 (γ) είναι ίσο με 16 (δ) είναι ίσο με 18 (ε) είναι ίσο με 20 (στ) μπορεί να λάβει περισσότερες από μία τιμές

A10. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει ο χρωματικός αριθμός ενός απλού γραφήματος με οκτώ κορυφές και δεκαέξι ακμές είναι ίσος με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

A11. Αν $\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (1+x)/(1-2x+2x^2)$, τότε το a_6 ισούται με

(α) 8 (β) -8 (γ) 16 (δ) -16 (ε) 32 (στ) -32

A12. Αν $f(n)$ είναι το πλήθος των λέξεων $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \{a, b, c, d\}^n$ στις οποίες καθένα από τα γράμματα a και b εμφανίζεται άρτιου πλήθους φορές, τότε το $f(7)$ ισούται με

(α) 256 (β) 272 (γ) 1024 (δ) 1056 (ε) 4096 (στ) 4160

Μέρος B - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται**. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Δείξτε ότι

$$\frac{2n-4i+1}{2n-2i+1}\binom{2n}{2i} = \binom{2n}{2i} - \binom{2n}{2i-1}$$

για ακεραίους $1 \leq i \leq n$. Εφαρμόζοντας την ισότητα αυτή (ή με άλλο τρόπο), υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{2n-4i+1}{2n-2i+1}\binom{2n}{2i}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{i}\binom{n-i}{i} 2^{n-2i} = \binom{2n}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

B2. Θεωρούμε το απλό γράφημα G με σύνολο κορυφών $\{1,2,3,4,5,6\}$ και ακμές τις $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{1,6\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$ και $\{3,5\}$.

(α) Είναι το G συνεκτικό; Είναι διπλά συνεκτικό;

(β) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό, το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων και το πλήθος των παραγόντων δένδρων του G.

Καλή Επιτυχία!