

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2013

1. Δίνεται το σύνολο $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Να υπολογίσετε:
- (α) (5 μονάδες) Το πλήθος των υποσυνόλων του N που δεν περιέχουν κανένα από τα σύνολα $\{1, 2, 3\}$ και $\{4, 5, 6\}$.
 - (β) (10 μονάδες) Το πλήθος των υποσυνόλων του N που δεν περιέχουν κανένα από τα σύνολα $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ και $\{7, 8, 9\}$.
 - (γ) (10 μονάδες) Το πλήθος των υποσυνόλων του N που περιέχουν τουλάχιστον ένα από τα σύνολα $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$ και $\{1, 2, 4\}$.
2. (10 μονάδες) Μια αναδιάταξη $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ λέγεται *μονότροπη* αν ισχύει $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_j \geq \sigma_{j+1} \geq \dots \geq \sigma_n$ για κάποιο δείκτη $1 \leq j \leq n$. Για παράδειγμα, οι μονότροπες αναδιατάξεις για $n = 3$ είναι οι $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$ και $(3, 2, 1)$. Να υπολογίσετε το πλήθος των μονότροπων αναδιατάξεων του $\{1, 2, \dots, n\}$ για τυχαίο θετικό ακέραιο n .
3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;
- (α) (10 μονάδες) Υπάρχει μερικώς διατεταγμένο σύνολο με οκτώ στοιχεία το οποίο έχει ελάχιστο στοιχείο, μέγιστο στοιχείο και πλάτος ίσο με 6.
 - (β) (10 μονάδες) Υπάρχει μερικώς διατεταγμένο σύνολο με οκτώ στοιχεία το οποίο έχει ελάχιστο στοιχείο, τουλάχιστον τέσσερα μεγιστικά στοιχεία και ύψος ίσο με 6.
4. Δίνεται το απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ οι ακμές του οποίου είναι όλα τα υποσύνολα του N με δύο στοιχεία, εκτός των $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$ και $\{1, 6\}$.
- (α) (5 μονάδες) Βρείτε ένα παράγον δένδρο του G .
 - (β) (15 μονάδες) Είναι το γράφημα G επιπεδικό; Είναι 3-συνεκτικό; Είναι 4-συνεκτικό;
 - (γ) (5 μονάδες) Ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός του G ;
 - (δ) (5 μονάδες) Πόσα τέλεια ταιριάσματα έχει το G ;
5. (15 μονάδες) Συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των μη κενών, γνήσιων υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ για τα οποία το μέγιστο στοιχείο του S είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο στοιχείο του συμπληρώματος $\{1, 2, \dots, n\} \setminus S$. Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, ως ρητή συνάρτηση του x .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 23/1/2014 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία