

**252 Διακριτά Μαθηματικά**  
**Εξετάσεις Ιουνίου 2024**  
Αθήνα 13/6/2024

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

**Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή.** Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

**A1.** Ο ελάχιστος θετικός ακέραιος  $x$  για τον οποίο το  $x^2$  διαιρείται με το 50

(α) δεν ορίζεται (β) είναι μικρότερος του 10 (γ) είναι μεγαλύτερος του 9 και μικρότερος του 15  
(δ) είναι μεγαλύτερος του 14 και μικρότερος του 20 (ε) είναι μεγαλύτερος του 19 και μικρότερος του 25 (στ) είναι μεγαλύτερος του 24

**A2.** Το πλήθος των πινάκων  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  με  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  και  $|a| \leq 1$ ,  $|b| \leq 2$ ,  $|c| \leq 3$  και  $|d| \leq 4$  είναι ίσο με

(α) 24 (β) 120 (γ) 225 (δ) 315 (ε) 384 (στ) 945

**A3.** Το πλήθος των κυκλικών αναδιατάξεων του συνόλου  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  στις οποίες το 2 βρίσκεται δίπλα στο 1 και το 3 βρίσκεται δίπλα στο 1 ή στο 2 είναι ίσο με

(α) 240 (β) 480 (γ) 600 (δ) 720 (ε) 960 (στ) 1440

**A4.** Ο συντελεστής του  $x^5$  στο πολυώνυμο  $(x + 2)^8$  είναι ίσος με

(α) 32 (β) 56 (γ) 112 (δ) 224 (ε) 448 (στ) 1792

**A5.** Το πλήθος των τετράδων  $(a, b, c, d) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^4$  για τις οποίες  $b \neq a + 2$ ,  $c \neq b + 2$  και  $d \neq c + 2$  είναι ίσο με

(α) 415 (β) 416 (γ) 417 (δ) 418 (ε) 419 (στ) 420

**A6.** Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ακεραίων μεταξύ των  $1, 2, 3, \dots, 120$  που μπορεί να επιλεγούν, έτσι ώστε οποιοδήποτε δύο από τους ακεραίους που επιλέχθηκαν να έχουν τουλάχιστον δύο κοινούς πρώτους διαιρέτες;

(α) 10 (β) 20 (γ) 30 (δ) 40 (ε) 50 (στ) 60

**A7.** Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει πρώτα κανείς μια διαμέριση  $\pi$  του συνόλου  $\{1, 2, 3, 4\}$  και να χρωματίσει έπειτα με μαύρο χρώμα ένα από τα μέρη της  $\pi$ ;

(α) 35 (β) 36 (γ) 37 (δ) 38 (ε) 39 (στ) 40

**A8.** Το πλήθος των απλών γραφημάτων με κορυφές 1, 2, 3, 4, 5 και 6, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 1, είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 6 (δ) 15 (ε) 24 (στ) 36

**A9.** Το πλήθος των διπλά συνεκτικών απλών γραφημάτων με κορυφές 1, 2, 3 και 4 είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 4 (δ) 7 (ε) 8 (στ) 10

**A10.** Αν διαγραφεί μια από τις ακμές ενός απλού γραφήματος  $G$ , τότε προκύπτει κύκλος με 101 κορυφές. Ο χρωματικός αριθμός του  $G$

(α) ισούται με 1 (β) ισούται με 2 (γ) ισούται με 3 (δ) ισούται με 4 (ε) ισούται με 5 (στ) εξαρτάται από το  $G$

**A11.** Το πλήθος των δένδρων με κορυφές 1, 2, 3, 4 και 5 τα οποία δεν έχουν τέλειο ταιρίασμα είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 16 (γ) 64 (δ) 125 (ε) 625 (στ) 1296

**A12.** Το πλήθος των κορυφών βαθμού ένα ενός απλού γραφήματος  $G$  με χρωματικό πολυώνυμο  $x(x-1)^2(x-2)^2$

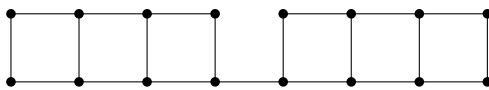
(α) είναι ίσο με μηδέν (β) είναι ίσο με 1 (γ) είναι ίσο με 2 (δ) είναι ίσο με 3 (ε) είναι ίσο με 4 (στ) εξαρτάται από το  $G$

**Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης.** Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφете ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

**B1.** Συμβολίζουμε με  $a_n$  το πλήθος των τρόπων να επιλεγεί πρώτα ένα υποσύνολο του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$  με δύο στοιχεία και να χρωματιστεί έπειτα ένας από τους αριθμούς  $1, 2, \dots, n$  με άσπρο χρώμα. Για παράδειγμα,  $a_0 = a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$  και  $a_3 = 9$ .

(α) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το  $a_n$  και υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ .

(β) Υπολογίστε το άθροισμα  $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$  για  $n \in \mathbb{N}$ .



**B2.** Δίνεται το απλό γράφημα  $G =$

(α) Υπολογίστε το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του  $G$ .

(β) Υπολογίστε τα  $\chi_G(1)$  και  $\chi_G(2)$ , όπου  $\chi_G(x)$  είναι το χρωματικό πολυώνυμο του  $G$ .

**Καλή Επιτυχία!**