252 Διακριτά Μαθηματικά
Πτυχιακή Εξέταση Μαΐου 2023
Αθήνα 16/5/2023

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Αν a είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου των θετικών ακεραίων που διαιρούνται με το 10 και δε διαιρούν το 40, τότε

(α) $a \leq 15$ (β) $15 < a \leq 30$ (γ) $30 < a \leq 45$ (δ) $45 < a \leq 60$ (ε) $a > 60$ (στ) το a δεν υπάρχει

Α2. Το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων (a, b, c) στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ για τις οποίες $a \neq c$ και $b \neq c$ είναι ίσο με

(α) 28 (β) 180 (γ) 720 (δ) 810 (ε) 900 (στ) 1000

Α3. Το πλήθος των κυκλικών αναδιατάξεων των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ στις οποίες ακριβώς δίπλα στο 1 (δεξιά και αριστερά του) βρίσκονται δύο άρτιοι αριθμοί είναι ίσο με

(α) 120 (β) 144 (γ) 288 (δ) 360 (ε) 720 (στ) 1440

Α4. Το πλήθος των τρόπων να τοποθετήσει κανείς εννέα φοιτητές σε τρεις αίθουσες Α1, Α2 και Α3, έτσι ώστε στην αίθουσα Α1 να υπάρχουν τέσσερις φοιτητές, στην Α2 να υπάρχουν τρεις φοιτητές και στην Α3 να υπάρχουν δύο φοιτητές, ισούται με

(α) 246 (β) 1024 (γ) 1260 (δ) 3024 (ε) 15120 (στ) 381024

Α5. Το πλήθος των ακεραίων που ανήκουν στο σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, 630\}$ και δε διαιρούνται ούτε με το 2, ούτε με το 3, ούτε με το 7 είναι ίσο με

(α) 175 (β) 180 (γ) 185 (δ) 190 (ε) 200 (στ) 205

Α6. Το μέγιστο πλήθος μη κενών υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ που μπορεί να επιλεγούν, έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο από τα υποσύνολα S, T που επιλέχθηκαν να έχουν διαφορετικά ελάχιστα και διαφορετικά μέγιστα στοιχεία, δηλαδή να ισχύει $\min(S) \neq \min(T)$ και $\max(S) \neq \max(T)$, είναι ίσο με

(α) 5 (β) 10 (γ) 20 (δ) 40 (ε) 64 (στ) 512

Α7. Το μέγιστο πλάτος μιας μερικής διάταξης με έξι στοιχεία, η οποία έχει δύο ελαχιστικά στοιχεία και δύο μεγιστικά στοιχεία, είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 3 (δ) 4 (ε) 5 (στ) 6

Α8. Αν ένα δένδρο T έχει έξι κορυφές και τέσσερα φύλλα, τότε το πλήθος των κορυφών βαθμού 3 του T

(α) είναι ίσο με μηδέν (β) είναι ίσο με 1 (γ) είναι ίσο με 2 (δ) είναι ίσο με 3 (ε) είναι ίσο με 4 (στ) εξαρτάται από το T

Α9. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που προκύπτει από τον κύκλο C_7 προσθέτοντας μια ακμή μεταξύ δύο κορυφών του (α) είναι ίσος με 1 (β) είναι ίσος με 2 (γ) είναι ίσος με 3 (δ) είναι ίσος με 4 (ε) είναι ίσος με 5 (στ) εξαρτάται από την επιλογή των δύο κορυφών του C_7

A10. Θεωρούμε ένα πλήρες απλό γράφημα G με έξι κορυφές και ένα τέλειο ταίριασμα F του G. Ο συντελεστής του x^5 στο χρωματικό πολυώνυμο του γραφήματος που προκύπτει από το G διαγράφοντας τις ακμές του F

(α) ισούται με μηδέν (β) ισούται με 12 (γ) ισούται με -12 (δ) ισούται με 15 (ε) ισούται με -15 (στ) εξαρτάται από την επιλογή του F

A11. Το μέγιστο πλήθος ακμών που μπορεί να έχει ένα απλό, διμερές, επίπεδο γράφημα με έξι κορυφές

(α) είναι ίσο με 6 (β) είναι ίσο με 7 (γ) είναι ίσο με 8 (δ) είναι ίσο με 9 (ε) είναι ίσο με 10 (στ) δεν ορίζεται

A12. Αν a_n είναι το πλήθος των μη κενών υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ (οπότε $a_0 = 0$), τότε η $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ ισούται με

(α) $x/(1-2x)$ (β) $x/(1-x)^2$ (γ) $1/(1-x)(1-2x)$ (δ) $x/(1-x)(1-2x)$ (ε) $1/(1-2x)^2$ (στ) $x/(1-2x)^2$

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Δείξτε ότι $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$ για $n, k, r \in \mathbb{N}$ με $n \geq k \geq r$ και υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r} \binom{n}{k}\binom{k}{r}$$

για $n, r \in \mathbb{N}$ με $n \geq r$.

(β) Συμβολίζουμε με $a(n, k)$ το πλήθος των επί απεικονίσεων $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a(n, k) \ = \ (-1)^n$$

για κάθε θετικό ακέραιο n.

B2. Για $n \geq 2$ έστω G_n το $n \times n$ γράφημα Μανχάταν, με κορυφές (a, b) για $a, b \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και ακμές εκείνα τα ζεύγη κορυφών $\{(a, b), (c, d)\}$ με $|a-b| + |c-d| = 1$. Έστω H_n το γράφημα που προκύπτει από το G_n διαγράφοντας την κορυφή $(1, 1)$ και τις δύο προσπίπτουσες σε αυτήν ακμές του G_n.

(α) Για ποια $n \geq 2$ είναι το H_n διπλά συνεκτικό; Για ποια $n \geq 2$ είναι διμερές;

(β) Για ποια $n \geq 2$ έχει το H_n τέλειο ταίριασμα;

Καλή Επιτυχία!