

Διακριτά Μαθηματικά
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2015

1. Θέτουμε $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, υπολογίστε (όσο το δυνατόν ακριβέστερα) το πλήθος των απεικονίσεων $f : S \rightarrow S$ με την εξής ιδιότητα:

- (α) (5 μονάδες) Για κάθε $y \in S$ υπάρχει $x \in S$ με $f(x) = y$.
- (β) (10 μονάδες) Για κάθε $y \in \{2, 4, 6\}$ υπάρχει $x \in S$ με $f(x) = y$.
- (γ) (10 μονάδες) Για κάθε $y \in \{2, 4, 6\}$ υπάρχουν δύο $x \in S$ με $f(x) = y$.

2. Συμβολίζουμε με Ω το σύνολο όλων των υποσυνόλων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ με δύο ή λιγότερα στοιχεία. Δείξτε ότι:

- (α) (5 μονάδες) Μεταξύ οποιωνδήποτε τεσσάρων στοιχείων του Ω υπάρχουν δύο, κανένα από τα οποία δεν είναι υποσύνολο του άλλου.
- (β) (10 μονάδες) Μεταξύ οποιωνδήποτε πέντε στοιχείων του Ω υπάρχουν δύο τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους.
- (γ) (10 μονάδες) Μεταξύ οποιωνδήποτε επτά στοιχείων του Ω υπάρχουν δύο, ένα από τα οποία είναι υποσύνολο του άλλου.

3. Δίνεται ακέραιος $n \geq 4$ και το απλό γράφημα G_n με n κορυφές v_1, v_2, \dots, v_n και ακμές τις $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_1, v_n\}$ και $\{v_2, v_n\}$.

- (α) (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος a_n των τέλειων ταιριασμάτων του G_n , καθώς και τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 4} a_n x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .
- (β) (10 μονάδες) Υπολογίστε το χρωματικό αριθμό του G_n .
- (γ) (10 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G_n ;

4. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- (α) (5 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα G με χρωματικό αριθμό $\chi(G) = 2$ είναι δένδρο.
- (β) (5 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα G με χρωματικό πολυώνυμο $\chi_G(q) = q(q-1)^{n-1}$ για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$ είναι διμερές.
- (γ) (10 μονάδες) Κάθε απλό γράφημα G με χρωματικό πολυώνυμο $\chi_G(q) = q(q-1)^{n-1}$ είναι δένδρο με n κορυφές.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 26/6/2015 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία