252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2024
Αθήνα 18/4/2024

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

A1. Ο ελάχιστος αριθμός $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο $n! > 2^{n+1}$

(α) δεν ορίζεται (β) είναι μικρότερος από 4 (γ) είναι ίσος με 4 (δ) είναι ίσος με 5 (ε) είναι ίσος με 6 (στ) είναι μεγαλύτερος από 6

A2. Το πλήθος των πινάκων $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ με $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $a + d = 7$ και $b + c = 8$ είναι ίσο με

(α) 15 (β) 17 (γ) 56 (δ) 72 (ε) 90 (στ) 110

A3. Το πλήθος των αναδιατάξεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ στις οποίες το 4 βρίσκεται στα αριστερά των 1, 2 και 3 είναι ίσο με

(α) 120 (β) 180 (γ) 200 (δ) 240 (ε) 360 (στ) 720

A4. Ο συντελεστής του x^4 στο πολυώνυμο $(1 + 2x)^8$ είναι ίσος με

(α) 16 (β) 70 (γ) 140 (δ) 256 (ε) 280 (στ) 1120

A5. Το πλήθος των τετράδων $(a, b, c, d) \in \{1, 2, 3, 4\}^4$ για τις οποίες $b \neq a + 1$, $c \neq b + 1$ και $d \neq c + 1$ είναι ίσο με

(α) 136 (β) 138 (γ) 140 (δ) 142 (ε) 144 (στ) 146

A6. Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ακεραίων μεταξύ των $1, 2, 3, \dots, 99$ που μπορεί να επιλεγούν, έτσι ώστε οποιοιδήποτε δύο από τους ακεραίους που επιλέχθηκαν να έχουν τουλάχιστον ένα κοινό περιττό πρώτο διαιρέτη;

(α) 16 (β) 30 (γ) 33 (δ) 50 (ε) 60 (στ) 67

A7. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει πρώτα κανείς μια διαμέριση π του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$ και να χρωματίσει έπειτα κάθε μέρος της π άσπρο, μαύρο ή κίτρινο;

(α) 305 (β) 307 (γ) 309 (δ) 311 (ε) 313 (στ) 315

A8. Το πλήθος των απλών γραφημάτων με κορυφές 1, 2, 3, 4 και 5, καθεμιά από τις οποίες έχει βαθμό 3, είναι ίσο με (α) μηδέν (β) 20 (γ) 64 (δ) 243 (ε) 1024 (στ) 3125

A9. Το πλήθος των δένδρων με κορυφές 1, 2, 3, 4, 5 και 6 στα οποία οι κορυφές 5 και 6 είναι φύλλα είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 16 (γ) 32 (δ) 64 (ε) 128 (στ) 256

A10. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που προκύπτει διαγράφοντας δύο από τις ακμές του πλήρους απλού διμερούς γραφήματος $K_{4,4}$

(α) ισούται με 1 (β) ισούται με 2 (γ) ισούται με 3 (δ) ισούται με 4 (ε) ισούται με 5 (στ) εξαρτάται από την επιλογή των ακμών που διαγράφονται

A11. Το πλήθος των δένδρων με κορυφές 1, 2, 3 και 4 τα οποία έχουν τέλειο ταίριασμα είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 4 (γ) 8 (δ) 12 (ε) 16 (στ) 24

A12. Το πλήθος των ακμών ενός απλού γραφήματος G με χρωματικό πολυώνυμο $x(x-1)^4(x-2)^2$

(α) είναι μικρότερο από 6 (β) είναι ίσο με 6 (γ) είναι ίσο με 7 (δ) είναι ίσο με 8 (ε) είναι μεγαλύτερο από 8 (στ) εξαρτάται από το G

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Δείξτε την ταυτότητα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^k = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$.

(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1}\binom{n}{k}$ για $n \in \mathbb{N}$.

B2.

(α) Θεωρούμε ένα πλήρες απλό γράφημα G με έξι κορυφές και ένα τέλειο ταίριασμα F του G. Είναι το γράφημα που προκύπτει από το G διαγράφοντας τις ακμές του F επιπεδικό;

(β) Έστω a_n το πλήθος των απεικονίσεων $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$ με $1 \le f(x) \le 2x$ για κάθε $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $a_0 := 1$. Βρείτε έναν όσο το δυνατό απλούστερο τύπο για το a_n και υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \ge 0} a_n x^n/n!$.

Καλή Επιτυχία!