252 Διακριτά Μαθηματικά
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2023
Αθήνα 20/1/2023

Η εξέταση αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας σύντομα την απάντησή σας. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Α1. Το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ με μέγιστο στοιχείο 6 ή 7 ισούται με

(α) 64 (β) 96 (γ) 128 (δ) 160 (ε) 256 (στ) 2048

Α2. Αν X είναι το σύνολο των αναδιατάξεων του $\{1,2,3,4\}$ και Y είναι το σύνολο των κυκλικών αναδιατάξεων του $\{1,2,3,4\}$, τότε το πλήθος των απεικονίσεων $f : X \to Y$ ισούται με

(α) $6 \cdot 24$ (β) 4^4 (γ) 6^6 (δ) 6^{24} (ε) 24^6 (στ) 24^{24}

Α3. Ο συντελεστής του x^4 στο πολυώνυμο $(1 + x + x^4)^9$ είναι ίσος με

(α) μηδέν (β) 84 (γ) 120 (δ) 126 (ε) 135 (στ) 210

Α4. Το πλήθος των απεικονίσεων $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ για τις οποίες $f(1) \neq 1$, $f(2) \neq 2$ και $f(3) \neq 3$ ισούται με

(α) 11 (β) 42 (γ) 74 (δ) 108 (ε) 150 (στ) 186

Α5. Το μέγιστο πλήθος ακεραίων που μπορεί να επιλεγούν από τους $0, 1, 2, \ldots, 100$, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο διαφορετικοί ακέραιοι με άθροισμα 100 μεταξύ αυτών που επιλέχθηκαν, είναι ίσο με

(α) 1 (β) 49 (γ) 50 (δ) 51 (ε) 99 (στ) 100

Α6. Το πλάτος της μερικής διάταξης της διαιρετότητας στο σύνολο $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ισούται με

(α) 2 (β) 3 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 6 (στ) 7

Α7. Το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς πρώτα να επιλέξει ένα δένδρο T με σύνολο κορυφών $\{1,2,3,4,5\}$ και έπειτα να αντιστοιχίσει ένα θετικό ακέραιο σε κάθε ακμή του T, έτσι ώστε οι ακέραιοι αυτοί να έχουν άθροισμα 7, ισούται με

(α) 125 (β) 225 (γ) 750 (δ) 1000 (ε) 1600 (στ) 2500

Α8. Θεωρούμε το απλό γράφημα G με σύνολο κορυφών $\{1,2,3,\ldots,20\}$ και ακμές τις $\{a,b\}$ με $a \in \{1,2,\ldots,10\}$ και $b \in \{11,12,\ldots,20\}$. Αν w είναι η συνάρτηση βάρους που ορίζεται θέτοντας $\mathrm{w}(\{a,b\}) = a$ για $a \in \{1,2,\ldots,10\}$ και $b \in \{11,12,\ldots,20\}$, τότε τα βέλτιστα δένδρα του G έχουν βάρος (α) 60 (β) 64 (γ) 68 (δ) 72 (ε) 76 (στ) 80

Α9. Θεωρούμε ένα πλήρες απλό γράφημα G με έξι κορυφές και ένα τέλειο ταίριασμα F του G. Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος που προκύπτει από το G διαγράφοντας τις ακμές του F

(α) είναι ίσος με 1 (β) είναι ίσος με 2 (γ) είναι ίσος με 3 (δ) είναι ίσος με 4 (ε) είναι ίσος με 5 (στ) εξαρτάται από την επιλογή του F

Α10. Θεωρούμε ένα πλήρες απλό γράφημα G με έξι κορυφές και ένα τέλειο ταίριασμα F του G. Το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων του γραφήματος που προκύπτει από το G διαγράφοντας τις ακμές του F

(α) είναι ίσο με 4 (β) είναι ίσο με 8 (γ) είναι ίσος με 10 (δ) είναι ίσο με 12 (ε) είναι ίσο με 15 (στ) εξαρτάται από την επιλογή του F

Α11. Αν $a_0 = -1$, $a_1 = 0$ και $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ για $n \geq 2$, τότε το a_{101} ισούται με

(α) $2^{101} \cdot 5$ (β) $2^{101} \cdot 5^2$ (γ) $2^{102} \cdot 5$ (δ) $2^{102} \cdot 5^2$ (ε) $2^{103} \cdot 5$ (στ) $2^{103} \cdot 5^2$

Α12. Το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου 8 με μέρη μεγαλύτερα του 1 ισούται με

(α) 7 (β) 8 (γ) 9 (δ) 10 (ε) 11 (στ) 12

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

Β1.

(α) Δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Β2. Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ και συμβολίζουμε με a_n το πλήθος των 1–1 απεικονίσεων $f : [n] \to [2n]$. Για παράδειγμα, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ και $a_2 = 12$.

(α) Βρείτε όσο το δυνατόν απλούστερους τύπους για το a_n και για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $F(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n / n!$.

(β) Υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην τυπική δυναμοσειρά $(F(x))^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Καλή Επιτυχία!