

Βασική Αλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2024

1. (30 μονάδες) Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}_7[x]$ και $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{Z}_7[x]$.

- (α) Αναλύστε τα $f(x)$ και $g(x)$ ως γινόμενα ανάγωγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_7[x]$.
- (β) Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $g(x)$ στο $\mathbb{Z}_7[x]$.
- (γ) Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) \cdot (g(x))^2 = 0$ στο \mathbb{Z}_7 .

2. (20 μονάδες) Έστω n θετικός ακέραιος, $a = [5] \in \mathbb{Z}_n$ και η απεικόνιση $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ με $f(x) = ax$ για $x \in \mathbb{Z}_n$.

- (α) Βρείτε όλους τους n ώστε η f να είναι ένα προς ένα και επί.
- (β) Βρείτε όλους τους n ώστε η f να είναι ισομορφισμός ομάδων $(\mathbb{Z}_n, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$.
- (γ) Βρείτε όλους τους n ώστε η f να είναι ισομορφισμός δακτυλίων.

3. (20 μονάδες) Έστω πρώτος αριθμός p . Δίνεται η ομάδα

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0 \right\},$$

με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, όπου με 0 συμβολίζουμε το μηδενικό στοιχείο του \mathbb{Z}_p , και το υποσύνολο

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

της G , όπου με 1 συμβολίζουμε τη μονάδα του \mathbb{Z}_p .

- (α) Δείξτε ότι το H είναι κανονική υποομάδα της G .
- (β) Δείξτε ότι η ομάδα πηλίκο G/H είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του σώματος \mathbb{Z}_p .

4. (30 μονάδες) Δίνονται οι μεταθέσεις $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_9$ και $\tau = (5\ 6\ 7\ 8\ 9) \in S_9$, η κυκλική υποομάδα $G = \langle \sigma \tau \rangle$ της S_9 που παράγεται από τη $\sigma \tau \in S_9$ και ομάδα K με δύο στοιχεία.

- (α) Υπολογίστε την τάξη της G .
- (β) Δείξτε ότι $\sigma \in G$ και $\tau \in G$.
- (γ) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός επιμορφισμός ομάδων $\varphi : G \rightarrow K$ και βρείτε όλα τα στοιχεία του πυρήνα του φ .

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 23/9/2024 – Καλή Επιτυχία