

Βασική Αλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2023

Συμβολίζουμε με \mathbb{Z}_m το δακτύλιο $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ των ακεραίων modulo m .

1. (25 μονάδες)

- (α) Υπολογίστε τον $\mu\kappa\delta(121, 212)$ στο \mathbb{Z} και βρείτε $a, b \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\mu\kappa\delta(121, 212) = 121a + 212b$.
- (β) Λύστε την εξίσωση $121x = 1$ στο \mathbb{Z}_{212} και την εξίσωση $212y = 1$ στο \mathbb{Z}_{121} .
- (γ) Σωστό ή λάθος; Αν m, n είναι θετικοί ακέραιοι και η εξίσωση $mx = 1$ έχει λύση στο \mathbb{Z}_n , τότε η εξίσωση $ny = 1$ έχει λύση στο \mathbb{Z}_m .

2. (15 μονάδες) Ποια από τα πολυώνυμα $x^2 + 1, x^2 + x + 1, (x^2 + 1)^2$ είναι ανάγωγα επί του σώματος \mathbb{Z}_3 και ποια είναι ανάγωγα επί του \mathbb{Z}_5 ;

3. (30 μονάδες) Έστω η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ που ορίζεται θέτοντας $\varphi(a+bi) = \bar{a} + 3\bar{b}$ για $a, b \in \mathbb{Z}$, όπου με $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{10}$ συμβολίζουμε την κλάση ισοτιμίας modulo 10 του $x \in \mathbb{Z}$.

- (α) Δείξτε ότι η απεικόνιση φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων.
- (β) Δείξτε ότι ο πυρήνας $\ker(\varphi)$ ισούται με το κύριο ιδεώδες $\langle 3 - i \rangle$ του $\mathbb{Z}[i]$. Υπόδειξη: (β1) Δείξτε πρώτα ότι $\langle 3 - i \rangle \subseteq \ker(\varphi)$. (β2) Δείξτε έπειτα ότι αν $a + bi \in \ker(\varphi)$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $a = k(3 - i)(3 + i) - 3b$. (β3) Συμπεράνετε ότι $\ker(\varphi) \subseteq \langle 3 - i \rangle$.
- (γ) Τι συμπεράνετε για το δακτύλιο πηλίκο $\mathbb{Z}[i]/\langle 3 - i \rangle$; Πόσα στοιχεία έχει ο δακτύλιος αυτός; Είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του κυκλική;

4. (20 μονάδες) Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 8 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

της S_8 .

- (α) Ποιες από τις μεταθέσεις $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$ είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές;
- (β) Είναι οι κυκλικές υποομάδες $\langle \sigma \rangle$ και $\langle \tau \rangle$ της S_8 ισόμορφες;
- (γ) Σωστό ή λάθος; Αν $u, v \in S_n$ είναι μεταθέσεις με ίσες τάξεις και η u είναι άρτια μετάθεση, τότε η v είναι επίσης άρτια μετάθεση.

5. (10 μονάδες) Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- (α) Αν a, b είναι στοιχεία μιας ομάδας τάξης 20 και $a^4 = b^4$, τότε $a = b$.
- (β) Αν a, b είναι στοιχεία μιας ομάδας τάξης 25 και $a^4 = b^4$, τότε $a = b$.

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 22/9/2023 – Καλή Επιτυχία