Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2018

1. (25 μονάδες) Βρείτε όλες τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων στο $\mathbb{Z}_{128}$:
(α) $2x = 1$ (β) $35x = 1$ (γ) $x^2 = x$ (δ) $x^2 = 1$ (ε) $x^{32} = 1$

2. (30 μονάδες) Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x^{101} - x$ και $g(x) = x^{101} - x + 1$ του $\mathbb{Z}_{101}[x]$.

(α) Βρείτε όλες τις ρίζες των $f(x)$ και $g(x)$ στο $\mathbb{Z}_{101}$.

(β) Πόσα στοιχεία έχει ο δακτύλιος πηλίκο $\mathbb{Z}_{101}[x]/\langle f(x)\rangle$; Είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{Z}_{101}[x]/\langle g(x)\rangle$;

(γ) Πόσα αντιστρέψιμα στοιχεία έχει ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{101}[x]/\langle f(x)\rangle$; Πόσα από αυτά είναι ίσα με τον αντίστροφό τους;

3. (20 μονάδες) Δίνεται η μετάθεση $\sigma \in S_n$ με $\sigma(x) = n + 1 - x$ για $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(α) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους η σ είναι άρτια μετάθεση.

(β) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους υπάρχει $\tau \in S_n$ με $\tau^2 = \sigma$.

4. (25 μονάδες) Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές;

(α) Αν H είναι υποομάδα μιας ομάδας G και $a, b \in G$ με $ab \in H$, τότε $a^2b^2 \in H$.

(β) Αν N είναι κανονική υποομάδα μιας ομάδας G και για τα $a, b \in G$ έχουμε $ab \in N$, τότε $a^2b^2 \in N$.

(γ) Αν N είναι κανονική υποομάδα μιας ομάδας G και για τα $a, b \in G$ έχουμε $ab \in N$, τότε $a^m b^m \in N$ για κάθε θετικό ακέραιο m.

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.
Αθήνα 5/9/2018 – Καλή Επιτυχία