

Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2017

1. Να υπολογιστεί το πλήθος:

- (α) των στοιχείων $x \in \mathbb{Z}_{30}$ για τα οποία ισχύει $x^9 = 1$ στο \mathbb{Z}_{30} ,
- (β) των ζευγών (x, y) στοιχείων του \mathbb{Z}_{180} για τα οποία ισχύει $x^2y = 1$ στο \mathbb{Z}_{180} ,
- (γ) των ιδεωδών του δακτυλίου \mathbb{Z}_{60} .

2. Για πρώτο αριθμό p θεωρούμε τα ιδεώδη $I = \langle x^3 - x \rangle$ και $J = \langle x^3 + x \rangle$ του $\mathbb{Z}_p[x]$, τους δακτυλίους $R = \mathbb{Z}_p[x]/I$ και $S = \mathbb{Z}_p[x]/J$ και το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

- (α) Για ποιους πρώτους p είναι το $f(x) + I$ αντιστρέψιμο στοιχείο του R ;
- (β) Για ποιους πρώτους p είναι το $f(x) + J$ αντιστρέψιμο στοιχείο του S ;
- (γ) Βρείτε περιττό πρώτο p για τον οποίο οι δακτύλιοι R και S είναι ισόμορφοι.

3. Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

της S_6 .

- (α) Υπολογίστε τη μετάθεση $\sigma\tau\sigma^{-1}$.
- (β) Δείξτε ότι οι σ και τ ανήκουν σε μια υποομάδα τάξης 6 της S_6 .
- (γ) Δώστε παράδειγμα υποομάδας τάξης 8 της S_6 .
- (δ) Υπάρχει υποομάδα τάξης 8 της S_6 που περιέχει τις σ και τ ;

4. Δίνονται επιμορφισμός ομάδων $\varphi : G \rightarrow K$ και ανά δύο διαφορετικά στοιχεία x, y, z της G τέτοια ώστε τα $zxy^{-1}z^{-1}$ και $xyz^{-1}x^{-1}$ να ανήκουν στον πυρήνα $\ker(\varphi)$ του φ .

- (α) Δείξτε ότι $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(z)$.
- (β) Αν η G είναι πεπερασμένη, δείξτε ότι $|G| \geq 3 \cdot |K|$.

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 4/9/2016 – Καλή Επιτυχία