

Βασική Άλγεβρα
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2013

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ και $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ του $\mathbb{Z}_5[x]$.

- (α) Αναλύστε τα $f(x)$ και $g(x)$ ως γινόμενα ανάγωγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_5[x]$.
- (β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν πολυώνυμα $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ τέτοια ώστε να ισχύει $a(x)f(x) + b(x)g(x) = x + 2$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.
- (γ) Βρείτε πολυώνυμο $h(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ ελάχιστου βαθμού, τέτοιο ώστε το $f(x) + h(x)$ να διαιρείται με το $g(x)$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. Θεωρούμε τους υποδακτυλίους

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

του $M_2(\mathbb{Z})$.

- (α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\varphi : R \rightarrow S$ που ορίζεται θέτοντας $\varphi(X) = X^t$ για $X \in R$ δεν είναι ισομορφισμός δακτυλίων.
- (β) Υπάρχει ιδεώδες I του R για το οποίο ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι ισόμορφος με το δακτύλιο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- (γ) Δείξτε ότι οι δακτύλιοι R και S είναι ισόμορφοι.

3. Δίνεται η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$.

- (α) Υπολογίστε την τάξη της σ . Είναι άρτια ή περιττή μετάθεση η σ ;
- (β) Υπολογίστε την τάξη της υποομάδας $\langle \sigma^{10} \rangle \cap \langle \sigma^{27} \rangle$ της S_8 .
- (γ) Υπάρχουν στοιχεία x, y τάξης 3 της S_8 τέτοια ώστε $xy = \sigma$;

4. Δίνεται ομάδα G και το υποσύνολο $N = \{(x, x) : x \in G\}$ της ομάδας $G \times G$.

- (α) Δείξτε ότι το N είναι υποομάδα της $G \times G$.
- (β) Δείξτε ότι το N είναι κανονική υποομάδα της $G \times G$ αν και μόνο αν η ομάδα G είναι αβελιανή.
- (γ) Αν η G είναι αβελιανή, δείξτε ότι η ομάδα $(G \times G)/N$ είναι ισόμορφη με τη G .

Κάθε θέμα αξίζει τρεις μονάδες.

Ο βαθμός σας είναι ίσος με $\min\{a, 10\}$, όπου a είναι το άθροισμα των μονάδων του γραπτού σας.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 18/1/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία