

**ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ**  
**Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2009**

Ομάδα Β

Θέμα 1. (2.5 μονάδες)

Έστω  $x, y \in \mathbf{Z}$  δύο μη μηδενικοί ακέραιοι και  $I \subseteq \mathbf{Z}$  το σύνολο που ορίζεται θέτοντας

$$I = \{ax + by : a, b \in \mathbf{Z}\}.$$

- (i) Δείξτε ότι το  $I$  είναι ιδεώδες του  $\mathbf{Z}$ .
- (ii) Δείξτε ότι το  $I$  είτε περιέχει όλους τους πρώτους αριθμούς, είτε περιέχει μόνο έναν πρώτο αριθμό, είτε δεν περιέχει κανέναν πρώτο αριθμό.
- (iii) Σε ποιες από τις τρεις περιπτώσεις που αναφέρονται στο (ii) είναι ο δακτύλιος πηλίκο  $\mathbf{Z}/I$  σώμα;

Θέμα 2. (2.5 μονάδες)

Έστω  $p$  ένας πρώτος αριθμός και  $f(X) = (X^2 - X - 1)^p - (X^2 - X - 1) \in \mathbf{Z}_p[X]$ .

- (i) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο του  $\mathbf{Z}_p$  είναι ρίζα του  $f(X)$  και συμπεράνετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο  $q(X) \in \mathbf{Z}_p[X]$ , τέτοιο ώστε  $f(X) = (X^p - X)q(X)$ .
- (ii) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $q(X)$  που αναφέρεται στο (i);
- (iii) Να αναλύσετε το  $f(X)$  σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στο  $\mathbf{Z}_p[X]$  για  $p = 2$  και  $p = 3$ .

Θέμα 3. (2.5 μονάδες)

Έστω  $\sigma \in S_{10}$  μια μετάθεση με τάξη  $o(\sigma) = 15$ .

- (i) Είναι άρτια ή περιττή η μετάθεση  $\sigma$ ; Εξηγήστε.
- (ii) Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο στοιχεία  $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$  με  $\sigma(i) = i$ .
- (iii) Αν  $\sigma' \in S_{10}$  είναι μια άλλη μετάθεση με τάξη  $o(\sigma') = 15$ , να δείξετε ότι υπάρχει μετάθεση  $\tau \in S_{10}$ , τέτοια ώστε  $\sigma\tau = \tau\sigma'$ .

Θέμα 4. (2.5 μονάδες)

Έστω  $N = \langle a \rangle$  μια άπειρη κυκλική ομάδα.

- (i) Αν  $f : N \rightarrow N$  είναι ένας αυτομορφισμός της  $N$  (δηλαδή, η  $f$  είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί), να δείξετε ότι  $f(a) = a^\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon = 1$  ή  $\varepsilon = -1$ , και να συμπεράνετε ότι  $f(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in N$ .
- (ii) Υποθέτουμε ότι η  $N$  είναι κανονική υποομάδα μιας ομάδας  $G$ . Να δείξετε ότι  $g^2a = ag^2$  για κάθε  $g \in G$ .