

**Βασική Αλγεβρα**  
**Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2024**

1. (25 μονάδες) Δίνεται το πολυώνυμο  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \in \mathbb{Z}_7[x]$ .

(α) Βρείτε όλες τις ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{Z}_7$ .

(β) Αναλύστε το  $f(x)$  ως γινόμενο ανάγωγων πολυωνύμων του  $\mathbb{Z}_7[x]$ .

(γ) Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $f(x)$  με το  $1 + 2x + x^2 \in \mathbb{Z}_7[x]$ .

2. (25 μονάδες) Δίνεται πρώτος αριθμός  $p$ , ο υποδακτύλιος  $R = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Z}\}$  του  $\mathbb{R}$  και τα υποσύνολα

$$I = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv 0 \pmod{p}\}$$

$$J = \{a + b\sqrt{p} : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}\}$$

του  $R$ .

(α) Δείξτε ότι τα  $I$  και  $J$  είναι ιδεώδη του  $R$ .

(β) Δείξτε ότι  $R/I \cong \mathbb{Z}_p$ .

(γ) Αληθεύει ότι  $R/J \cong \mathbb{Z}_p$ ; Αληθεύει ότι  $R/J \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ;

3. (30 μονάδες) Θέτουμε  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq 0 \right\}$ .

(α) Δείξτε ότι η  $G$  είναι υποομάδα της ομάδας  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$  των  $2 \times 2$  αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{Z}_3$ .

(β) Υπολογίστε την τάξη της  $G$  και βρείτε όλες τις υποομάδες της.

(γ) Είναι η  $G$  ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα  $S_3$ ;

4. (20 μονάδες) Δίνονται οι μεταθέσεις

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

της  $S_8$ .

(α) Είναι οι κυκλικές υποομάδες  $\langle \sigma \rangle$  και  $\langle \tau \rangle$  της  $S_8$  ισόμορφες;

(β) Πόσα στοιχεία της  $\langle \sigma \rangle$  είναι άρτιες μεταθέσεις και πόσα είναι περιττές; Πόσα στοιχεία της  $\langle \tau \rangle$  είναι άρτιες μεταθέσεις και πόσα είναι περιττές;

(γ) Πόσους γεννήτορες έχει η κυκλική υποομάδα  $\langle \sigma\tau \rangle$  της  $S_8$ ;

**Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.**

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 27/6/2024 – Καλή Επιτυχία