

**Βασική Αλγεβρα**  
**Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2023**

1. (20 μονάδες) Συμβολίζουμε με  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{75}$  την κλάση ισοτιμίας του  $a \in \mathbb{Z}$  modulo 75.

- (α) Υπολογίστε την τάξη της ομάδας  $U(\mathbb{Z}_{75})$ .
- (β) Υπολογίστε το αντίστροφο στοιχείο του  $\bar{16} \in \mathbb{Z}_{75}$ .
- (γ) Λύστε την εξίσωση  $\bar{16}x = \bar{13}$  στο  $\mathbb{Z}_{75}$ .

2. (20 μονάδες) Θεωρούμε το πολυώνυμο  $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \in \mathbb{Z}_{31}[x]$ .

- (α) Ποιος είναι ο βαθμός του  $(f(x))^{50} \in \mathbb{Z}_{31}[x]$ ;
- (β) Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $(f(x))^{30}$  με το  $x - 1$  στο  $\mathbb{Z}_{31}[x]$ .
- (γ) Υπολογίστε τον  $\mu\kappa\delta(f(x), x^2 + 1)$  στο  $\mathbb{Z}_{31}[x]$ .

3. (30 μονάδες) Θέτουμε  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ .

- (α) Δείξτε ότι το  $R$  είναι μεταθετικός υποδακτύλιος του  $M_3(\mathbb{Z})$ .
- (β) Ποιες από τις απεικονίσεις  $\varphi, \chi, \psi : R \rightarrow \mathbb{Z}$  με

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a, \quad \chi \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = b, \quad \psi \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = c$$

για  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  είναι επιμορφισμοί δακτυλίων;

- (γ) Βρείτε ιδεώδες  $I$  του  $R$  τέτοιο ώστε  $R/I \cong \mathbb{Z}$ .
- (δ) Είναι ο δακτύλιος  $R$  ισόμορφος με τον  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ;

4. (20 μονάδες) Θεωρούμε την ομάδα  $G = U(\mathcal{T}_2(\mathbb{Z}_3))$  των  $2 \times 2$  άνω τριγωνικών αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{Z}_3$  και την κυκλική της υποομάδα  $H$  που παράγεται από το στοιχείο

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G.$$

- (α) Υπολογίστε την τάξη του  $g$  και το δείκτη της  $H$  στην  $G$ . Είναι η  $H$  κανονική υποομάδα της  $G$ ; Θεωρήστε γνωστό ότι  $|G| = 12$ .
- (β) Είναι η  $G$  ισόμορφη με την εναλλάσσουσα ομάδα  $A_4$ ;

5. (10 μονάδες) Βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους  $p$  που έχουν την εξής ιδιότητα: υπάρχει ομάδα με τουλάχιστον δύο στοιχεία, κάθε στοιχείο της οποίας έχει τάξη 1 ή  $p$ .

**Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.**

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 12/6/2023 – Καλή Επιτυχία