Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου 2019

1. (25 μονάδες) Δίνονται πολυώνυμα $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ με $f(x) = x^4+3x^3+4x^2+3x+1$ και $g(x) = x^4 + 3x^2 + 1$.

(α) Αναλύστε τα $f(x)$ και $g(x)$ ως γινόμενα ανάγωγων πολυωνύμων του $\mathbb{Z}_5[x]$.

(β) Υπολογίστε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των $f(x)$ και $g(x)$ στο $\mathbb{Z}_5[x]$.

(γ) Για ποια $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ τέτοια ώστε $(x^3 + x^2 + x + 1)^n = a(x)f(x) + b(x)g(x)$;

2. (30 μονάδες) Θέτουμε $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ και $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z} \right\}$.

(α) Δείξτε ότι το R είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{Z})$. Είναι ο δακτύλιος R ακέραια περιοχή;

(β) Δείξτε ότι το I είναι ιδεώδες του R και ότι $R/I \cong \mathbb{Z}$.

(γ) Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία του R.

(δ) Είναι ο δακτύλιος R ισόμορφος με τον $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

3. (30 μονάδες) Δίνεται η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 10 & 11 & 9 & 3 & 12 & 1 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

Συμβολίζουμε με $\langle x \rangle$ την κυκλική υποομάδα της S_{12} που παράγεται από τη $x \in S_{12}$.

(α) Δείξτε ότι $\langle \sigma^{1821} \rangle = \langle \sigma^{2019} \rangle$.

(β) Πόσους γεννήτορες έχει η $\langle \sigma \rangle$; Πόσοι από αυτούς είναι άρτιες μεταθέσεις;

(γ) Βρείτε τις υποομάδες τάξης 2 και 3 της $\langle \sigma \rangle$ και γράψτε τα στοιχεία τους ως γινόμενα ξένων κύκλων.

(δ) Υπάρχει υποομάδα της $\langle \sigma \rangle$ ισόμορφη με την $U(\mathbb{Z}_8)$;

4. (25 μονάδες) Δίνεται ομάδα G και στοιχεία $a, b \in G$ τάξης 3 για τα οποία η τάξη του ab είναι ίση με 2. Συμβολίζουμε με e το ταυτοτικό στοιχείο της G και με $\langle x \rangle$ την κυκλική υποομάδα της G που παράγεται από το $x \in G$.

(α) Δείξτε ότι $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ και ότι $ab \neq ba$.

(β) Δείξτε ότι $|G| \geq 12$.

(γ) Έστω $K = \langle c \rangle$ κυκλική ομάδα τάξης 9 και ομομορφισμός ομάδων $\varphi : G \to K$. Αν $\varphi(a^{56}) = c^6$, υπολογίστε τα $\varphi(a)$ και $\varphi(b)$.

Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.
Αθήνα 11/2/2019 – Καλή Επιτυχία