

Βασική Άλγεβρα
Θέματα Εξετάσεων Ιανουαρίου 2013
Ομάδα Α

1.

- (α) Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 + x + 1$. Να βρεθεί ο $\mu\kappa\delta(f(x), g(x))$ και πολυώνυμα $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$, τέτοια ώστε $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$.
- (β) Έστω F ένα σώμα και $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$ με $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)) = 1$ και $h(x)$ μη μηδενικό. Δείξτε ότι $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)h(x)) = \mu\kappa\delta(f(x), h(x))$.
- (γ) Δείξτε ότι για κάθε πρώτο p και κάθε $a \in \mathbb{Z}_p$ το πολυώνυμο $x^p - a \in \mathbb{Z}_p[x]$ δεν είναι ανάγωγο.

2. Θεωρούμε τους δακτυλίους $R = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 2 \rangle$ και $S = \mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$, όπου με $\langle f(x) \rangle$ συμβολίζουμε το κύριο ιδεώδες του $\mathbb{Z}_5[x]$ που παράγεται από το $f(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

- (α) Δείξτε ότι ο R είναι σώμα και ότι ο S δεν είναι ακέραια περιοχή.
- (β) Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι R και $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ είναι ισόμορφοι; Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι S και $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ είναι ισόμορφοι;
- (γ) Πόσα στοιχεία έχει ο R ; Πόσα από τα στοιχεία του S είναι αντιστρέψιμα;

3. Θεωρούμε την ομάδα $G = \mathbb{Z}_8$ και την κυκλική υποομάδα $H = \langle [4] \rangle$ της G που παράγεται από το $[4] \in \mathbb{Z}_8$.

- (α) Βρείτε όλες τις αριστερές κλάσεις της H στη G .
- (β) Βρείτε όλες τις υποομάδες της G .
- (γ) Αληθεύει ότι οι ομάδες G/H και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ είναι ισόμορφες; Αληθεύει ότι οι ομάδες G/H και \mathbb{Z}_4 είναι ισόμορφες;
- (δ) Βρείτε όλα τα στοιχεία $a \in G$ τέτοια ώστε $G = \langle a \rangle$.

4. Θεωρούμε τη μετάθεση $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 7\ 9) \in S_9$.

- (α) Βρείτε την τάξη της σ .
- (β) Βρείτε μια παράσταση της σ^{-1} ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων.
- (γ) Είναι η μετάθεση σ άρτια ή περιττή;
- (δ) Βρείτε μια $\tau \in S_9$ που να έχει τη μέγιστη δυνατή τάξη.

Κάθε θέμα αξίζει τρεις μονάδες.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 18/1/2013 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία