

ΒΑΣΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2009

Ομάδα Β

Θέμα 1. Έστω S ο δακτύλιος των κάτω τριγωνικών 3×3 μιγαδικών πινάκων και $R, I \subseteq S$ με

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{C} \right\} \quad \text{και} \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} : d \in \mathbf{C} \right\}.$$

- (i) Ναδειχτεί ότι ο R είναι ένας υποδακτύλιος του S . Είναι ο δακτύλιος R μεταθετικός;
- (ii) Ναδειχτεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες του R . Είναι το I ένα ιδεώδες του S ;
- (iii) Ναδειχτεί ότι υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων $R/I \simeq \mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Θέμα 2.

(i) Έστω $a \in \mathbf{R}$ ένας πραγματικός αριθμός και $\varphi_a : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}$ ο ομομορφισμός δακτυλίων που ορίζεται θέτοντας $\varphi_a(f(X)) = f(a)$ για κάθε $f(X) \in \mathbf{R}[X]$. Ναδείξετε ότι ο φ_a είναι επί αλλά όχι 1-1.

(ii) Ναεξετάσετε αν οι δακτύλιοι $\mathbf{R}[X]/(X-3)$ και $\mathbf{R}[X]/(X-\sqrt{3})$ είναι ισόμορφοι.

(iii) Ναεξετάσετε αν οι δακτύλιοι $\mathbf{R}[X]/(X-3)$ και $\mathbf{R}[X]/(X^2-3)$ είναι ισόμορφοι.

Θέμα 3. Έστω $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$, $\sigma = \tau^{2009}$ και $H = \langle \tau \rangle$ η κυκλική υποομάδα της S_8 που παράγεται από το τ .

(i) Ναεκφράσετε τη μετάθεση τ ως γινόμενο ξένων ανά δύο κύκλων και ναβρείτε την τάξη της τ .

(ii) Ναεξετάσετε αν η μετάθεση σ είναι άρτια και ναυπολογίσετε τα $\sigma(2)$ και $\sigma(4)$.

(iii) Ναεξετάσετε αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\theta : S_8 \rightarrow S_8$ με $\ker \theta = H$.

Θέμα 4. Έστω $G = U(\mathbf{Z}_{14})$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου \mathbf{Z}_{14} .

(i) Ναγράψετε όλα τα στοιχεία της ομάδας G και ναβρείτε την τάξη της.

(ii) Είναι η ομάδα G κυκλική;

(iii) Έστω $n \in \mathbf{Z}$ ένας ακέραιος και $f_n : G \rightarrow G$ ο ομομορφισμός ομάδων με $f_n(g) = g^n$ για κάθε $g \in G$. Ναβρείτε όλες τις τιμές του n για τις οποίες η απεικόνιση f_n είναι επί.

*Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες.
Καλή επιτυχία!*