Βασική Άλγεβρα

Κατατακτήριες Εξετάσεις 2009–2010

1. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

(α) Το πλήθος των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου $\mathbb{Z}_{200}$ είναι ίσο με 80.

(β) Ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{Z}_5[x]$ έχει αντιστρέψιμα στοιχεία βαθμού 2.

(γ) Υπάρχει στοιχείο της συμμετρικής ομάδας S_{10}, η τάξη του οποίου είναι ίση με 21.

(δ) Αν G είναι ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο e και H και K είναι υποομάδες της G τάξης 8 και 21, αντίστοιχα, τότε $H \cap K = \{e\}$.

(ε) Αν $\phi : G \to H$ είναι ομομορφισμός ομάδων και το $g \in G$ έχει τάξη 16, τότε η τάξη του $\phi(g) \in H$ είναι ίση με μια δύναμη του 2.

2. Έστω ο υποδακτύλιος $R = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ του δακτυλίου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, όπου $i^2 = -1$.

(α) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\phi : R \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται θέτοντας $\phi(a+bi) = a+b$, για $a, b \in \mathbb{Z}$, είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

(β) Για ακεραίους x, συμβολίζουμε με $\bar{x}$ την κλάση ισοτιμίας του x modulo 5. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $\psi : R \to \mathbb{Z}_5$ που ορίζεται θέτοντας $\psi(a+bi) = \overline{a - 2b}$, για $a, b \in \mathbb{Z}$, είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο $I = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv 2b \pmod 5\}$ είναι ιδεώδες του δακτυλίου R.

(δ) Είναι το I κύριο ιδεώδες του R;

(ε) Δείξτε ότι ο δακτύλιος πηλίκο R/I είναι ισόμορφος με το δακτύλιο $\mathbb{Z}_5$.

3. Έστω η συμμετρική ομάδα S_4 των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$.

(α) Βρείτε όλες τις υποομάδες της S_4 με τέσσερα στοιχεία, οι οποίες είναι ισόμορφες με την κυκλική ομάδα τάξης 4.

(β) Ποιες από τις υποομάδες του ερωτήματος (α) είναι κανονικές υποομάδες της S_4;

(γ) Δώστε παράδειγμα υποομάδας της S_4 με τέσσερα στοιχεία, η οποία δεν είναι ισόμορφη με την κυκλική ομάδα τάξης 4.

(δ) Έστω ομάδα G τάξης 5. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\phi : S_4 \to G$.

(ε) Έστω οι αντιμεταθέσεις $s = (1\ 2)$ και $t = (3\ 4)$ της S_4. Δείξτε ότι υπάρχει αυτομορφισμός $\phi : S_4 \to S_4$ της ομάδας S_4, τέτοιος ώστε $\phi(s) = t$.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 15/12/2009 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία