

Αλγεβρική Τοπολογία
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2015

1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) (5 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq a$ για κάθε $x \in S^3$.

(β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχει $x \in S^3$ τέτοιο ώστε $f(-x) = f(x)$.

2. (30 μονάδες) Ποιοι από τους παρακάτω υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$ ή του $\mathbb{R}^3$ είναι μεταξύ τους ομοιομορφικοί; Ποιοι είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι;

(α) $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = 0\}$.

(β) $Y = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \geq 1\}$.

(γ) $Z = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a^2 + b^2 \leq 1\}$.

(δ) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1, c > 0\}$.

3. Θεωρούμε τον κυκλικό δίσκο $E^2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \leq 1\}$ στο επίπεδο και τον υπόχωρό του $S^1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$.

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι αν $\varphi : E^2 \rightarrow E^2$ είναι ομοιομορφισμός, τότε $\varphi(S^1) = S^1$.

(β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : E^2 \rightarrow S^1$ τέτοια ώστε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^1$.

4. Θεωρούμε το χώρο X που προκύπτει από τη σφαίρα S^2 ταυτίζοντας το σημείο $q = (0, 0, 1)$ με το $(0, 0, -1)$ και την αντίστοιχη προβολή $\pi : S^2 \rightarrow X$.

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι ο χώρος X δεν είναι απλά συνεκτικός. Υπόδειξη: Βρείτε κατάλληλο, μη απλά συνεκτικό χώρο Y και συνεχή απεικόνιση $\varphi : X \rightarrow Y$ η οποία επάγει επιμορφισμό ομάδων $\varphi_* : \pi(X, q) \rightarrow \pi(Y, \varphi(q))$.

(β) (5 μονάδες) Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $f : S^1 \rightarrow X$ με $f(a, b) = \pi(a, b, 0)$ για κάθε $(a, b) \in S^1$ είναι ομοτοπική με κάποια σταθερή απεικόνιση.

5. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

(α) (5 μονάδες) Αν $f : S^1 \rightarrow S^1$ είναι συνεχής απεικόνιση μηδενικού βαθμού, τότε το ίδιο ισχύει για την $f \circ g : S^1 \rightarrow S^1$ για κάθε συνεχή απεικόνιση $g : S^1 \rightarrow S^1$.

(β) (5 μονάδες) Ο χώρος που προκύπτει αφαιρώντας ένα σημείο από το προβολικό επίπεδο $\mathbb{RP}^2$ έχει πεπερασμένη θεμελιώδη ομάδα.

(γ) (5 μονάδες) Αν X είναι τοπολογικός χώρος και $\varphi : X \rightarrow S^2$, $\psi : S^2 \rightarrow X$ είναι συνεχείς απεικονίσεις τέτοιες ώστε $\psi(\varphi(x)) = x$ για κάθε $x \in X$, τότε ο χώρος X είναι απλά συνεκτικός.

(δ) (5 μονάδες) Υπάρχει τριγωνισμός του δισδιάστατου τόρου (λουκουμά) με οκτώ κορυφές, εικοσιπέντε ακμές και δεκαέξι πλευρές διάστασης 2.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 14/9/2015 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία