

Αλγεβρική Τοπολογία
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2015

1. Θεωρούμε το χώρο πηλίκου X που προκύπτει από το $\mathbb{R}$ ταυτίζοντας το 0 με το 1, καθώς και τους υπόχωρους

$$Y = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\},$$

$$Z = \{(x, 0) : x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$$

του $\mathbb{R}^2$.

- (α) (10 μονάδες) Είναι ο X συνεκτικός χώρος; Είναι συμπαγής;
- (β) (10 μονάδες) Είναι ο χώρος X ομοιομορφικός με τον Y ; Είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον Y ;
- (γ) (10 μονάδες) Είναι ο χώρος Y ομοιομορφικός με τον Z ; Είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με τον Z ;
- (δ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα $\pi(Y, q)$ για $q \in Y$.
- (ε) (5 μονάδες) Δώστε παράδειγμα συνεχούς $f : Y \rightarrow Z$ η οποία δεν είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.

2. Θεωρούμε τις συνεχείς απεικονίσεις $f : S^1 \rightarrow S^1$ με την ιδιότητα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in S^1$.

- (α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε περιττό ακέραιο n υπάρχει τέτοια απεικόνιση βαθμού n .
- (β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοια απεικόνιση άρτιου βαθμού.

3. Θεωρούμε τον κυκλικό δίσκο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (α) (10 μονάδες) Βρείτε όλα τα σημεία $q \in B$ για τα οποία το $B \setminus \{q\}$ είναι συσταλτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.
- (β) (10 μονάδες) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^2$ και σημείο $q \in U$ για τα οποία το $U \setminus \{q\}$ είναι συσταλτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$.

4. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

- (α) (5 μονάδες) Αν $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής και επί απεικόνιση και ο χώρος X είναι συσταλτός, τότε ο χώρος Y είναι επίσης συσταλτός.
- (β) (5 μονάδες) Κάθε συνεχής απεικόνιση $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με κάποια σταθερή απεικόνιση.
- (γ) (5 μονάδες) Η απεικόνιση $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με $p(x, y) = x$ για $x, y \in [0, 1]$ είναι προβολή επικάλυψης.
- (δ) (5 μονάδες) Υπάρχει simplicial σύμπλεγμα Δ διάστασης 2 με πέντε κορυφές, οκτώ ακμές και τέσσερις πλευρές διάστασης 2, τέτοιο ώστε $H_0(\Delta; \mathbb{Z}) \cong H_1(\Delta; \mathbb{Z}) \cong H_2(\Delta; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 2/7/2015 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία