

# ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΤΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2006

Θέματα Εξετάσεων Φεβρουαρίου

1. Πόσες μεταθέσεις του συνόλου  $\{1, 2, \dots, 6\}$  αποτελούνται από τρεις κύκλους όταν γραφούν στην κυκλική τους μορφή;

2. Έστω  $m$  τυχαίος θετικός ακέραιος.

(α) Δώστε παράδειγμα πεπερασμένης μερικής διάταξης  $P$  με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, έστω  $\hat{0}$  και  $\hat{1}$ , αντίστοιχα, και  $\mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = m$ .

(β) Δώστε παράδειγμα πεπερασμένης μερικής διάταξης  $P$  με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, έστω  $\hat{0}$  και  $\hat{1}$ , αντίστοιχα, και  $\mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = -m$ .

(γ) Δώστε παράδειγμα πεπερασμένης διαβαθμισμένης μερικής διάταξης  $P$  τάξεως 3 με τουλάχιστον  $m$  στοιχεία, με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, έστω  $\hat{0}$  και  $\hat{1}$ , αντίστοιχα, και  $\mu_P(\hat{0}, \hat{1}) = -1$ .

3. Έστω το παράταγμα  $\mathcal{A}$  των έξι υπερεπιπέδων στον  $\mathbb{R}^3$  που ορίζονται από τις γραμμικές εξισώσεις  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_1 + x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_3 = 0$  και  $x_2 + x_3 = 0$ , αντίστοιχα. Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $\mathcal{A}$ .

4. Έστω πολυώνυμο  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  και έστω ότι

$$\sum_{n \geq 0} f(n) x^n = \frac{x + x^2}{(1 - x)^5}.$$

(α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου  $f$ ;

(β) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση  $\sum_{n \geq 1} f(-n) x^n$ .

5. Έστω ακέραιοι  $0 \leq r \leq d$  και έστω  $h_0 = h_1 = \dots = h_r = 1$ ,  $h_j = 0$  για  $r < j \leq d$ . Δείξτε ότι υπάρχει Cohen-Macaulay σύμπλεγμα  $\Delta$  διάστασης  $d - 1$  με  $h$ -διάνυσμα  $h(\Delta) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ .

Αθήνα, 20 Φεβρουαρίου 2007.

Καλή Επιτυχία.