ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #1

1. Για δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) πραγματικών αριθμών ισχύει $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1/(1+x)(1-2x)$, υπολογίστε το b_n για $n \in \mathbb{N}$.

2. Υπολογίστε το γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) πραγματικών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} \;=\; \frac{3}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

3. Δίνεται τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ με $a_0 = 0$. Ορίζουμε τη $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ θέτοντας $b_0 = 1$ και

$$b_n \;=\; \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_k},$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις συνθέσεις $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n.

(α) Δείξτε ότι $G(x) = 1/(1 - F(x))$.

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε πρώτα μια διαμέριση π του συνόλου $[n]$ σε μέρη της μορφής $\{a, a+1, \ldots, b\}$ και έπειτα ένα υποσύνολο με άρτιο πλήθος στοιχείων για κάθε μέρος της π;

(γ) Έστω m θετικός ακέραιος και έστω $c(n,m)$ το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη περιττούς ακεραίους $\leq 2m-1$, όπου $c(0,m) = 1$ κατά σύμβαση. Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} c(n,m) x^n \;=\; \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^{2m+1}}.$$

Υπόδειξη για τα (β), (γ): εφαρμόστε το αποτέλεσμα του (α) σε κατάλληλες ακολουθίες (a_n).

4. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(w)} \,\mathrm{inv}(w)$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

Έως Δευτέρα 29 Φεβρουαρίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #2

5. Έστω θετικοί ακέραιοι d, r. Για $w = (w_1, w_2, \ldots, w_d) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}^d$ συμβολίζουμε με $\mathrm{des}(w)$ το πλήθος των δεικτών $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ με $w_i > w_{i+1}$, όπου $w_{d+1} = 0$ κατά σύμβαση, και θέτουμε

$$\mathcal{I}_d^r(x) \ = \sum_{w \in \{0,1,\ldots,r-1\}^d} x^{\mathrm{des}(w)}.$$

Δείξτε ότι

$$\sum_{n \ge 0} \binom{d+rn}{d} x^n \ = \ \frac{\mathcal{I}_d^r(x)}{(1-x)^{d+1}}.$$

6. Για $t \in \mathbb{C}$, υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\exp\left(\sum_{k \ge 1} \frac{tx^k}{k}\right)$ με δύο τρόπους:

(α) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sum_{k \ge 1} \frac{x^k}{k} = \log 1/(1-x)$.

(β) Χρησιμοποιώντας τον εκθετικό τύπο.

Τι συμπέρασμα βγάζετε;

7. Θέτουμε $\Omega_n = \{1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n\}$ και συμβολίζουμε με b_n το πλήθος των απεικονίσεων $w : \Omega_n \to \Omega_n$ για τις οποίες ισχύει $w(-x) = -w(x)$ και $w(w(x)) = x$ για κάθε $x \in \Omega_n$, όπου $b_0 = 1$ κατά σύμβαση.

(α) Υπολογίστε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \ge 0} b_n \frac{x^n}{n!}$.

(β) Δείξτε ότι $b_{n+1} = 2\,(b_n + nb_{n-1})$ για $n \ge 1$ και ότι

$$b_n \ = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2k)!}{k!} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

8. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_0 = 1$ και $a_{n+1} = 2 \sum a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}$ για $n \in \mathbb{N}$, όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις διατεταγμένες τριάδες (k_1, k_2, k_3) φυσικών αριθμών που αθροίζουν στο n.

(α) Αν $f(x) = \sum_{n \ge 1} a_n x^n$, δείξτε ότι $f(x) = 2x\,(1 + f(x))^3$.

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange (ή άλλο τρόπο), βρείτε έναν απλό τύπο για το a_n.

Έως Πέμπτη 17 Μαρτίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #3

9. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)\, A_k(x)(1-x)^{n-k} \;=\; n!x$$

για $n \geq 1$, όπου $A_k(x)$ είναι το πολυώνυμο του Euler τάξης k και $c(n,k)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με k κύκλους.

10. Για μεταθέσεις $u, v \in \mathfrak{S}_n$ γράφουμε $u \preceq v$ αν κάθε κύκλος της u προκύπτει διαγράφοντας κάποια από τα στοιχεία κάποιου κύκλου της v. Για παράδειγμα, για $n = 5$ έχουμε $(1\ 2)\,(3\ 4\ 5) \preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ αλλά $(1\ 2)\,(3\ 5\ 4) \not\preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

(α) Δείξτε ότι η $\preceq$ αποτελεί διαβαθμισμένη μερική διάταξη τάξης $n-1$ επί της $\mathfrak{S}_n$.

(β) Δείξτε ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση της τάξης δίνεται από τον τύπο

$$F(\mathfrak{S}_n, q) \;=\; (1+q)(1+2q)\cdots(1+(n-1)q).$$

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse της $\preceq$ για $n = 3$.

11. Δίνεται πεπερασμένος σύνδεσμος L και θετικός ακέραιος m. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής Möbius ή άλλο τρόπο, δείξτε ότι το πλήθος των $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in L^m$ με $t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_m = \hat{0}$ είναι ίσο με

$$\sum_{x \in L} \mu_L(\hat{0}, x)\, (\#V_x)^m,$$

όπου $V_x = \{y \in L : y \geq x\}$ για $x \in L$. Ποια ισότητα προκύπτει για $m = 1$;

12. Στο σύνολο $P_n = \{-, 0, +\}^n$ ορίζουμε μια μερική διάταξη $\leq$ ως εξής: Για στοιχεία $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του P_n θέτουμε $x \leq y$ αν $y_i \in \{0, x_i\}$ για $1 \leq i \leq n$. Υπολογίστε την τιμή $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης που προκύπτει προσθέτοντας ένα ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ στην P_n, όπου $\hat{1} = (0, 0, \ldots, 0)$ είναι το μέγιστο στοιχείο.

Έως Δευτέρα 28 Μαρτίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #4

13. Θεωρούμε το σύνολο P_n των ακολουθιών $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του συνόλου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $1 \le k \le n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση $x \preceq y$ αν η x είναι υποακολουθία της y (δηλαδή αν η x προκύπτει διαγράφοντας κάποια από τα στοιχεία της y). Για παράδειγμα, τα μεγιστικά στοιχεία του P_n είναι ακριβώς οι $n!$ αναδιατάξεις του $[n]$.

(α) Δείξτε ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P_n είναι διαβαθμισμένο τάξης $n-1$. Πόσα είναι τα στοιχεία δοσμένης τάξης k του P_n;

(β) Πόσες είναι οι μεγιστικές αλυσίδες του P_n;

(γ) Δείξτε ότι η απόλυτος τιμή $|\mu(\hat{0}, \hat{1})|$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης που προκύπτει προσθέτοντας ένα ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και ένα μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$ στο P_n είναι ίση με το πλήθος των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία του $[n]$.

14. Έστω ο σύνδεσμος Π_n των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$. Για $\tau \in \Pi_n$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in [\hat{0}, \tau]} |\sigma| \cdot \mu(\hat{0}, \sigma),$$

όπου $|\sigma|$ είναι το πλήθος των μερών της $\sigma \in \Pi_n$.

15. Για κάθε γεωμετρικό σύνδεσμο L, δείξτε ότι $\mu_L(x, y) \neq 0$ για $x \le_L y$. Ισχύει το ίδιο για κάθε semimodular σύνδεσμο;

16. Δίνεται παράταγμα $\mathcal{A}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στο χώρο $V = \mathbb{R}^n$. Για $X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}$ θεωρούμε τον περιορισμό $\mathcal{A}^X = \{H \cap X : H \in \mathcal{A}, X \not\subseteq H\}$ του $\mathcal{A}$ στο X (οπότε, για παράδειγμα, $\mathcal{A}^V = \mathcal{A}$).

(α) Δείξτε ότι $\sum_{X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}} \chi(\mathcal{A}^X, q) = q^n$.

(β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}} (-1)^{n - \dim(X)}\, r(\mathcal{A}^X) \ = \ 1,$$

όπου $r(\mathcal{A}^X)$ είναι το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{A}^X$ (δηλαδή, το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του χώρου $X \smallsetminus \cup_{H \in \mathcal{A}^X} H$).

Έως Δευτέρα 11 Απριλίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #5

17. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, \dots, x_n$ και το παράταγμα $\mathcal{T}_n$ των γραμμικών υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_i &= 0, && 1 \le i \le n, \\ x_i + x_j &= 0, && 1 \le i < j \le n. \end{aligned}$$

(α) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{T}_n$.

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \ge 0} r(\mathcal{T}_n) \frac{x^n}{n!} \;=\; \frac{1}{2e^{-x} - 1},$$

όπου $r(\mathcal{T}_n)$ είναι το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{T}_n$ και $r(\mathcal{T}_0) = 1$ κατά σύμβαση.

18. Δίνονται μη αρνητικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \dots, n_k$. Υπολογίστε το πολυώνυμο $Z(P, m)$ για το ευθύ γινόμενο $P = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_k$, όπου Q_i είναι αλυσίδα μήκους n_i για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Πόσες μεγιστικές αλυσίδες έχει το P;

19. Δίνονται θετικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \dots, n_k$. Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta(P)$ για το διατακτικό άθροισμα $P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_k$, όπου Q_i είναι αντιαλυσίδα με n_i στοιχεία για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

20. Για ακεραίους $1 \le k \le n$ θεωρούμε το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ με όχι περισσότερα από k στοιχεία.

(α) Δείξτε ότι το σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο.

(β) Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta_{n,k}$.

(γ) Δείξτε ότι

$$h(\Delta_{n,k}, x) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k+i-1}{i} x^i.$$

Έως Δευτέρα 9 Μαίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2016
Ασκήσεις #6

21. Υπολογίστε τους ακεραίους $\beta_P(S)$ για $S \subseteq [n-1]$ όταν P είναι το ευθύ γινόμενο μιας αλυσίδας με n στοιχεία και μιας αλυσίδας με δύο στοιχεία.

22. Έστω P, Q μερικές διατάξεις του Euler τάξης n, όπου n είναι περιττός θετικός ακέραιος, και έστω $\bar{P} = P \smallsetminus \{\hat{0}_P, \hat{1}_P\}$ και $\bar{Q} = Q \smallsetminus \{\hat{0}_Q, \hat{1}_Q\}$ τα γνήσια μέρη αυτών.

(α) Δείξτε ότι αν R είναι η ξένη ένωση των $\bar{P}$ και $\bar{Q}$, τότε το $\hat{R} = R \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ είναι επίσης μερική διάταξη του Euler τάξης n.

(β) Δώστε παράδειγμα μη αποφλοιώσιμης μερικής διάταξης του Euler.

23. Έστω θετικός ακέραιος n και $S \subseteq [n-1]$. Θεωρούμε σύνολο $P_S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ με n στοιχεία, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη στην οποία το p_i καλύπτει (αντίστοιχα, καλύπτεται από) το p_{i+1} αν $i \in S$ (αντίστοιχα, $i \in [n-1] \smallsetminus S$), ενώ δεν υπάρχουν άλλες σχέσεις κάλυψης στο P_S. Δείξτε ότι το πλήθος των γραμμικών επεκτάσεων του P_S είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με $\mathrm{Des}(w) = S$.

24. Έστω πεπερασμένη μερική διάταξη P με φυσική επιγραφή ω και έστω

$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\mathrm{des}(w)} \;=\; h_0 + h_1 x + \cdots + h_d x^d,$$

όπου $h_d \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $h_i \geq \binom{d}{i}$ για $0 \leq i \leq d$.

(β) Για κάθε θετικό ακέραιο d, δώστε παράδειγμα μερικής διάταξης P για την οποία ισχύει $h_i = \binom{d}{i}$ για $0 \leq i \leq d$.

Έως Πέμπτη 2 Ιουνίου