ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Ασκήσεις #1

1. Έστω $a(n,k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ με k στοιχεία τα οποία δεν περιέχουν διαδοχικούς ακεραίους.

(α) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων $(r_0, r_1, \ldots, r_k)$ του $n+1$ για τις οποίες ισχύει $r_i \geq 2$ για $1 \leq i \leq k-1$.

(β) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων του $n-k+2$ με $k+1$ μέρη.

(γ) Βρείτε έναν απλό τύπο για το $a(n,k)$.

Εργαστείτε παρόμοια για να υπολογίσετε το πλήθος $b(n,k)$ των υποσυνόλων S του $[n]$ τα οποία έχουν k στοιχεία και την εξής ιδιότητα: αν i, j είναι διακεκριμένα στοιχεία του S, τότε $|i-j| > 2$.

2. Έστω m θετικός ακέραιος και έστω $c(n,m)$ το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη περιττούς ακεραίους $\leq 2m-1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} c(n,m) x^n \ = \ \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^{2m+1}},$$

όπου $c(0,m) = 1$ κατά σύμβαση. *Υπόδειξη*: Θεωρήστε πρώτα τις συνθέσεις αυτές με δοσμένο πλήθος μερών k.

3. Έστω m θετικός ακέραιος και έστω $f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2m})$.

(α) Δείξτε ότι η τυπική δυναμοσειρά $f(-x)$ είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{C}[[x]]$ και ότι η $F(x) = f(x)/f(-x)$ έχει μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές.

(β) Περιγράψτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το συντελεστή του x^n στην $F(x)$.

4. Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_n$ έχουν άρτιο πλήθος αντιστροφών; Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_n$ έχουν πλήθος αντιστροφών ισότιμο του μηδέν mod 3; *Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το γνωστό σας τύπο για την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση.

5. Βρείτε έναν απλό τύπο για το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ που έχουν ακριβώς μία κάθοδο. Ποια είναι η απλούστερη απόδειξη αυτού του τύπου που γνωρίζετε;

Έως Παρασκευή, 31 Οκτωβρίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Ασκήσεις #2

6. Δείξτε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\left(\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{m} S(m,n) x^n \right) = \sum_{n \geq 0} n^m \frac{x^n}{n!}$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$, όπου $S(m,n)$ είναι οι αριθμοί Stirling του δεύτερου είδους.

7. Έστω $F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$. Δείξτε συνδυαστικά, με χρήση του εκθετικού τύπου, ότι ισχύει

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(F(x))^n}{n!} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

(δηλαδή η γνωστή ταυτότητα $\exp(\log(\frac{1}{1-x})) = \frac{1}{1-x}$) στο $\mathbb{C}[[x]]$.

8. Έστω $f(n)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $w^3 = 1$ και $g(n)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ οι οποίες δεν έχουν σταθερά σημεία και ικανοποιούν τη σχέση $w^3 = 1$.

(α) Βρείτε έναν απλό κλειστό τύπο για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $E_f(x)$.

(β) Βρείτε έναν απλό κλειστό τύπο για την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση $E_g(x)$, καθώς και για το $g(n)$.

9. Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_0 = 1$ και $a_{n+1} = \sum a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}$ για $n \in \mathbb{N}$, όπου το άθροισμα είναι πάνω σε όλες τις διατεταγμένες τριάδες (k_1, k_2, k_3) φυσικών αριθμών που αθροίζουν στο n.

(α) Αν $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, δείξτε ότι $f(x) = x\,(1 + f(x))^3$.

(β) Συνάγετε από τον τύπο αντιστροφής του Lagrange ότι $a_n = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}$.

10. Για ακεραίους $n \geq 1$ και $k \geq 0$, έστω $a_{n,k}$ το πλήθος των ευθειών στο χώρο $\mathbb{R}^n$ που μπορούν να γραφούν ως τομές κάποιων από τα αφφινικά υπερεπίπεδα

$$H_{i,j,r} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i = x_j + r\}$$

του $\mathbb{R}^n$, όπου οι i, j, k είναι ακέραιοι με $1 \leq i, j \leq n$ και $|r| \leq k$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της συνθέσεως για εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις, δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 1} a_{n,k} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x - 1}{(1+k) - k e^x}.$$

Έως Παρασκευή, 21 Νοεμβρίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Ασκήσεις #3

11. Έστω $f(n)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ για τις οποίες οι w και w^2 δεν έχουν σταθερά σημεία. Δείξτε ότι

$$E_f(x) \ = \ e^{-x-\frac{x^2}{2}}/(1-x).$$

12. Έστω διαβαθμισμένο, τοπικά πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με συνάρτηση τάξεως ρ και $f \in I(P)$ με $f(x,y) = t^{\rho(x,y)}$ για $x \le y$, όπου t είναι μεταβλητή και $\rho(x,y) = \rho(y) - \rho(x)$ είναι η τάξη του κλειστού διαστήματος $[x,y]$ του P.

(α) Δείξτε ότι $(f\zeta)(x,y)$ και $(\zeta f)(x,y)$ είναι οι γεννήτριες συναρτήσεις της τάξης των διαστημάτων $[x,y]$ και $[x,y]^*$, αντίστοιχα, ως προς τη μεταβλητή t.

(β) Δείξτε ότι $f^k(x,y) = t^{\rho(x,y)}\,\zeta^k(x,y)$ για $k \in \mathbb{N}$ και $x \le y$.

(γ) Υπολογίστε την f^{-1} από τη συνάρτηση Möbius του P.

13. Στο σύνολο $P_n = \{-,*,+\}^n$ ορίζουμε μια μερική διάταξη $\le$ ως εξής: Για στοιχεία $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ του P_n θέτουμε $x \le y$ αν $y_i = x_i$ ή $y_i = *$ για κάθε $1 \le i \le n$. Υπολογίστε την τιμή $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης $Q_n = P_n \cup \{\hat{0}\}$ που προκύπτει από την P_n προσθέτοντας ένα ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$, όπου $\hat{1} = (*, *, \ldots, *)$ είναι το μέγιστο στοιχείο της P_n.

14. Έστω ο σύνδεσμος Π_n των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$. Για $\tau \in \Pi_n$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in [\hat{0}, \tau]} |\sigma| \cdot \mu(\hat{0}, \sigma),$$

όπου $|\sigma|$ είναι το πλήθος των μερών της $\sigma \in \Pi_n$. *Υπόδειξη*: $\sum_{\sigma \in \Pi_m} \mu(\hat{0}, \sigma)\, x^{|\sigma|} = x(x-1)\cdots(x-m+1)$.

15. Έστω ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και έστω $\mathcal{B}_n$ το παράταγμα των n^2 γραμμικών υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{array}{ll} x_i = 0, & 1 \le i \le n, \\ x_i - x_j = 0, & 1 \le i < j \le n, \\ x_i + x_j = 0, & 1 \le i < j \le n. \end{array}$$

Υπολογίστε την τιμή $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ της συνάρτησης Möbius του συνόλου L_n των τομών της $\mathcal{B}_n$, όπου $\hat{0} = \mathbb{R}^n$ και $\hat{1} = \{0\}$ είναι το ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο του L_n, αντίστοιχα.

Έως Παρασκευή, 12 Δεκεμβρίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Ασκήσεις #4

16. Έστω ακέραιοι $1 \le k < n$ και έστω P το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με όχι περισσότερα από k στοιχεία, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού. Υπολογίστε την τιμή $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης $P \cup \{\hat{1}\}$ που προκύπτει από το P προσθέτοντας ένα μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$, όπου $\hat{0} = \varnothing$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του P.

17. Έστω r θετικός ακέραιος, Q η αντιαλυσίδα με r στοιχεία και $P = Q \oplus Q \oplus \cdots \oplus Q$ το διατακτικό άθροισμα n αντιτύπων του Q.

(α) Δείξτε ότι για το πολυώνυμο ζήτα του P ισχύει

$$Z(P, m) \;=\; \sum_{k=1}^{n} r^k \binom{n}{k} \binom{m-2}{k-1}.$$

(β) Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta(P)$.

18. Ένα πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ διάστασης d λέγεται *ισχυρά συνεκτικό* αν για οποιεσδήποτε έδρες σ, τ του Δ υπάρχουν έδρες $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \tau$ του Δ, τέτοιες ώστε $\dim(\sigma_{i-1} \cap \sigma_i) = d - 1$ για κάθε $1 \le i \le k$.

(α) Δείξτε ότι κάθε ισχυρά συνεκτικό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα είναι αγνό.

(β) Αν το Δ είναι συνεκτικό και το ζεύγμα $\mathrm{link}_\Delta(v)$ είναι Cohen-Macaulay για κάθε κορυφή v του Δ, δείξτε ότι το Δ είναι ισχυρά συνεκτικό.

(γ) Συνάγετε ότι κάθε Cohen-Macaulay σύμπλεγμα είναι ισχυρά συνεκτικό.

(δ) Δώστε παράδειγμα ισχυρά συνεκτικού συμπλέγματος Δ το οποίο δεν είναι Cohen-Macaulay.

19. Έστω πεπερασμένο, αγνό μονοπλεκτικό σύμπλεγμα Δ. Αν το Δ είναι αποφλοιώσιμο, δείξτε ότι το ζεύγμα $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ είναι αποφλοιώσιμο για κάθε $\sigma \in \Delta$.

20. Έστω θετικός ακέραιος n και έστω P_n το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ τα οποία έχουν άρτιο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι το P_n, εφοδιασμένο με τη διάταξη του εγκλεισμού, είναι Cohen-Macaulay μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Έως Τρίτη, 13 Ιανουαρίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Τελική Εξέταση

Λύστε τρεις από τις ακόλουθες ασκήσεις.

21. Έστω P, Q μερικές διατάξεις του Euler τάξης n, όπου n είναι περιττός θετικός ακέραιος, και έστω $\bar{P} = P \smallsetminus \{\hat{0}_P, \hat{1}_P\}$ και $\bar{Q} = Q \smallsetminus \{\hat{0}_Q, \hat{1}_Q\}$ τα γνήσια μέρη αυτών.

(α) Δείξτε ότι αν R είναι η ξένη ένωση των $\bar{P}$ και $\bar{Q}$, τότε το $\hat{R} = R \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ είναι επίσης μερική διάταξη του Euler τάξης n.

(β) Δώστε παράδειγμα μερικής διάταξης του Euler η οποία δεν είναι Cohen-Macaulay.

22. Έστω ακέραιοι $1 \le k \le n$ και έστω $\Delta_{n,k}$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με όχι περισσότερα από k στοιχεία.

(α) Δείξτε ότι το σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο.

(β) Υπολογίστε το h-διάνυσμα και την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta_{n,k}$.

23. Έστω θετικός ακέραιος n και $S \subseteq [n-1]$. Θεωρούμε σύνολο $P_S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ με n στοιχεία, εφοδιασμένο με τη μερική διάταξη για την οποία το p_i καλύπτει (αντίστοιχα, καλύπτεται από) το p_{i+1} αν $i \in S$ (αντίστοιχα, $i \in [n-1] \smallsetminus S$). Δείξτε ότι το πλήθος των γραμμικών επεκτάσεων του P_S είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με σύνολο καθόδων $\mathrm{Des}(w) = S$.

24. Έστω πεπερασμένη μερική διάταξη P με φυσική επιγραφή ω και έστω

$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} x^{\mathrm{des}(w)} \;=\; h_0 + h_1 x + \cdots + h_r x^r,$$

όπου $h_r \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι $h_i \ge \binom{r}{i}$ για $0 \le i \le r$.

(β) Για δοσμένο θετικό ακέραιο r, δώστε παράδειγμα μερικής διάταξης P για την οποία ισχύει $h_i = \binom{r}{i}$ για $0 \le i \le r$.

Έως Παρασκευή, 13 Φεβρουαρίου 2009