ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #1

1. Για δύο ακολουθίες (a_n) και (b_n) πραγματικών αριθμών ισχύει $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1/(1+x)(1-2x)$, υπολογίστε το b_n για $n \in \mathbb{N}$.

2. Υπολογίστε το γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) πραγματικών αριθμών που ορίζεται θέτοντας $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} \;=\; \frac{3}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k 2^{n-k}$$

για $n \in \mathbb{N}$.

3. Δίνεται τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ με $a_0 = 0$. Ορίζουμε τη $G(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ θέτοντας $b_0 = 1$ και

$$b_n \;=\; \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_k},$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις συνθέσεις $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n.

(α) Δείξτε ότι $G(x) = 1/(1-F(x))$.

(β) Για $n \geq 3$ δείξτε ότι

$$\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=n} (-1)^{n-k} (r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1) \;=\; 0,$$

όπου το άθροισμα διατρέχει όλες τις συνθέσεις $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ του n. *Υπόδειξη*: εφαρμόστε κατάλληλα το αποτέλεσμα του (α).

4. Για $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $f(m,n)$ το πλήθος των διανυσμάτων $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}^m$ για τα οποία $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| \leq n$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n\geq 0} f(m,n) x^n \;=\; \frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}$$

για κάθε m.

5. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\mathrm{inv}(w)}\, \mathrm{inv}(w)$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

Έως Δευτέρα 26 Φεβρουαρίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #2

6. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w)\, x^{c(w)}$, όπου $c(w)$ και $f(w)$ είναι το πλήθος των κύκλων και των σταθερών σημείων, αντίστοιχα, της w.

7. Συμβολίζουμε με B_n το σύνολο των ακολουθιών $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ στις οποίες εμφανίζεται ακριβώς ένα στοιχείο του συνόλου $\{i, -i\}$ για κάθε $1 \le i \le n$. Ένας δείκτης $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ λέγεται *B-κάθοδος* της w αν $w_i > w_{i+1}$, όπου $w_0 = 0$ κατά σύμβαση. Συμβολίζουμε με $\mathrm{des}_B(w)$ το πλήθος των B-καθόδων της w και θέτουμε

$$B_n(x) \;=\; \sum_{w \in B_n} x^{\mathrm{des}_B(w)}$$

για $n \ge 1$.

(α) Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο B_n;

(β) Υπολογίστε το $B_n(x)$ για $n \in \{1, 2, 3\}$ και δείξτε ότι $B_n(x) = x^n B_n(1/x)$ για κάθε $n \ge 1$.

(γ) Δείξτε ότι

$$\sum_{m \ge 0} (2m+1)^n x^m \;=\; \frac{B_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

(δ) Δείξτε ότι

$$B_n(x) \;=\; ((2n-1)x + 1)\, B_{n-1}(x) \;+\; 2(x - x^2)\, B'_{n-1}(x)$$

για $n \ge 2$.

8. Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan

$$C(x) \;:=\; \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \;=\; \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange (ή άλλο τρόπο), δείξτε ότι

$$[x^n]\, (C(x))^k \;=\; \frac{k}{2n+k} \binom{2n+k}{n}$$

για όλα τα $n, k \in \mathbb{N}$.

Έως Δευτέρα 12 Μαρτίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #3

9. Έστω $f_k(n)$ το πλήθος των αντιαλυσίδων με k στοιχεία στην άλγεβρα Boole B_n.

(α) Δείξτε ότι $f_2(n) = (4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n)/2$.

(β) Βρείτε ανάλογο τύπο για το $f_3(n)$. *Υπόδειξη*: Εφαρμόστε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να υπολογίσετε το πλήθος των τριάδων (x, y, z), όπου $\{x, y, z\}$ είναι αντιαλυσίδα της B_n με τρία στοιχεία.

10. Για μεταθέσεις $u, v \in \mathfrak{S}_n$ γράφουμε $u \preceq v$ αν κάθε κύκλος της u προκύπτει διαγράφοντας κάποια από τα στοιχεία κάποιου κύκλου της v. Για παράδειγμα, για $n = 5$ έχουμε $(1\ 2)\,(3\ 4\ 5) \preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ αλλά $(1\ 2)\,(3\ 5\ 4) \not\preceq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

(α) Δείξτε ότι η $\preceq$ αποτελεί διαβαθμισμένη μερική διάταξη τάξης $n-1$ επί της $\mathfrak{S}_n$.

(β) Δείξτε ότι η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση της τάξης δίνεται από τον τύπο

$$F(\mathfrak{S}_n, q) \ = \ (1+q)(1+2q) \cdots (1+(n-1)q).$$

(γ) Σχεδιάστε το διάγραμμα Hasse της $\preceq$ για $n = 3$.

11. Δίνεται πεπερασμένος σύνδεσμος L και θετικός ακέραιος m. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής Möbius ή άλλο τρόπο, δείξτε ότι το πλήθος των $(t_1, t_2, \dots, t_m) \in L^m$ με $t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_m = \hat{0}$ είναι ίσο με

$$\sum_{x \in L} \mu_L(\hat{0}, x)\, (\#V_x)^m,$$

όπου $V_x = \{y \in L : y \ge x\}$ για $x \in L$. Ποια ισότητα προκύπτει για $m = 1$;

12. Στο σύνολο $P_n = \{-, 0, +\}^n$ ορίζουμε μια μερική διάταξη $\le$ ως εξής: Για στοιχεία $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ του P_n θέτουμε $x \le y$ αν $y_i \in \{0, x_i\}$ για $1 \le i \le n$. Υπολογίστε την τιμή $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης που προκύπτει προσθέτοντας ένα ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ στην P_n, όπου $\hat{1} = (0, 0, \dots, 0)$ είναι το μέγιστο στοιχείο.

Έως Πέμπτη 29 Μαρτίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #4

13. Θεωρούμε το σύνολο P_n των ακολουθιών $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ διακεκριμένων στοιχείων του συνόλου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $1 \le k \le n$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση $x \preceq y$ αν η x είναι υποακολουθία της y (δηλαδή αν η x προκύπτει διαγράφοντας κάποια από τα στοιχεία της y). Για παράδειγμα, τα μεγιστικά στοιχεία του P_n είναι ακριβώς οι $n!$ αναδιατάξεις του $[n]$.

(α) Δείξτε ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P_n είναι διαβαθμισμένο τάξης $n - 1$. Πόσα είναι τα στοιχεία δοσμένης τάξης k του P_n;

(β) Πόσες είναι οι μεγιστικές αλυσίδες του P_n;

(γ) Δείξτε ότι η απόλυτος τιμή $|\mu(\hat{0}, \hat{1})|$ της συνάρτησης Möbius της μερικής διάταξης που προκύπτει προσθέτοντας ένα ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και ένα μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$ στο P_n είναι ίση με το πλήθος των μεταθέσεων χωρίς σταθερά σημεία του $[n]$.

14. Έστω ο σύνδεσμος Π_n των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$. Για $\tau \in \Pi_n$ υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{\sigma \in [\hat{0}, \tau]} |\sigma| \cdot \mu(\hat{0}, \sigma),$$

όπου $|\sigma|$ είναι το πλήθος των μερών της $\sigma \in \Pi_n$.

15. Για κάθε γεωμετρικό σύνδεσμο L, δείξτε ότι $\mu_L(x, y) \neq 0$ για $x \le_L y$. Ισχύει το ίδιο για κάθε semimodular σύνδεσμο;

16. Δίνεται παράταγμα $\mathcal{A}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στο χώρο $V = \mathbb{R}^n$. Για $X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}$ θεωρούμε τον περιορισμό $\mathcal{A}^X = \{H \cap X : H \in \mathcal{A}, X \not\subseteq H\}$ του $\mathcal{A}$ στο X (οπότε, για παράδειγμα, $\mathcal{A}^V = \mathcal{A}$).

(α) Δείξτε ότι $\sum_{X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}} \chi(\mathcal{A}^X, q) = q^n$.

(β) Συνάγετε ότι

$$\sum_{X \in \mathcal{L}_\mathcal{A}} (-1)^{n - \dim(X)} \, r(\mathcal{A}^X) \; = \; 1,$$

όπου $r(\mathcal{A}^X)$ είναι το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{A}^X$ (δηλαδή, το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του χώρου $X \smallsetminus \cup_{H \in \mathcal{A}^X} H$).

Έως Πέμπτη 26 Απριλίου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #5

17. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_1, x_2, \dots, x_n$ και το παράταγμα $\mathcal{T}_n$ των γραμμικών υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$\begin{array}{ll} x_i = 0, & 1 \le i \le n, \\ x_i + x_j = 0, & 1 \le i < j \le n. \end{array}$$

(α) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{T}_n$.

(β) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \ge 0} r(\mathcal{T}_n) \frac{x^n}{n!} \;=\; \frac{1}{2e^{-x} - 1},$$

όπου $r(\mathcal{T}_n)$ είναι το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{T}_n$ και $r(\mathcal{T}_0) = 1$ κατά σύμβαση.

18. Δίνονται μη αρνητικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \dots, n_k$. Υπολογίστε το πολυώνυμο $Z(P, m)$ για το ευθύ γινόμενο $P = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_k$, όπου Q_i είναι αλυσίδα μήκους n_i για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Πόσες μεγιστικές αλυσίδες έχει το P;

19. Δίνονται θετικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \dots, n_k$. Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta(P)$ για το διατακτικό άθροισμα $P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \cdots \oplus Q_k$, όπου Q_i είναι αντιαλυσίδα με n_i στοιχεία για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

20. Για ακεραίους $1 \le k \le n$ θεωρούμε το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ των υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ με όχι περισσότερα από k στοιχεία.

(α) Δείξτε ότι το σύμπλεγμα $\Delta_{n,k}$ είναι αγνό και αποφλοιώσιμο.

(β) Υπολογίστε την ανηγμένη χαρακτηριστική Euler του $\Delta_{n,k}$.

(γ) Δείξτε ότι

$$h(\Delta_{n,k}, x) \;=\; \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k+i-1}{i} x^i.$$

Έως Δευτέρα 14 Μαΐου

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εαρινό Εξάμηνο 2018
Ασκήσεις #6

21. Υπολογίστε τους ακεραίους $\beta_P(S)$ για $S \subseteq [n-1]$ όταν P είναι το ευθύ γινόμενο μιας αλυσίδας με $n-1$ στοιχεία και μιας αλυσίδας με τρία στοιχεία.

22. Έστω P, Q μερικές διατάξεις του Euler τάξης n, όπου n είναι περιττός θετικός ακέραιος, και έστω $\bar{P} = P \smallsetminus \{\hat{0}_P, \hat{1}_P\}$ και $\bar{Q} = Q \smallsetminus \{\hat{0}_Q, \hat{1}_Q\}$ τα γνήσια μέρη αυτών.

(α) Δείξτε ότι αν R είναι η ξένη ένωση των $\bar{P}$ και $\bar{Q}$, τότε το $\hat{R} = R \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ είναι επίσης μερική διάταξη του Euler τάξης n.

(β) Δώστε παράδειγμα μη αποφλοιώσιμης μερικής διάταξης του Euler.

23. Έστω L μια μερική διάταξη του Euler τάξης n, η οποία είναι σύνδεσμος.

(α) Δείξτε ότι η L έχει τουλάχιστον $\binom{n}{k}$ στοιχεία τάξης k για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(β) Δείξτε γενικότερα ότι $\alpha_L(S) \geq \alpha_{B_n}(S)$ για κάθε $S \subseteq [n-1]$.

24. Θεωρούμε διαβαθμισμένη μερική διάταξη P τάξης n με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$, για την οποία το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, x]$ είναι ισόμορφο με άλγεβρα Boole κατάλληλης τάξης για κάθε $x \in P$.

(α) Δείξτε ότι

$$\widetilde{\chi}(\Delta(P \smallsetminus \{\hat{0}\})) \;=\; \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} f_{j-1}(P),$$

όπου $f_{j-1}(P)$ είναι το πλήθος των στοιχείων τάξης j του P.

(β) Αν $\mathcal{A}_P$ είναι το σύνολο των ατόμων του P, εκφράστε το άθροισμα $\sum_{x \in \mathcal{A}_P} \mu_{\hat{P}}(x, \hat{1})$ ως συνάρτηση των $f_0(P), f_1(P), \ldots, f_{n-1}(P)$, όπου $\hat{P}$ είναι η μερική διάταξη που προκύπτει από την P προσθέτοντας το μέγιστο στοιχείο $\hat{1}$.

Έως Δευτέρα 11 Ιουνίου