

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2026

1. (10 μονάδες) Βρείτε όλες τις τυπικές δυναμοσειρές $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ που επαληθεύουν την ισότητα

$$F(x)(F(x) - 2) = \sum_{n \geq 1} (n+1)x^n$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$.

2. Θεωρούμε γράφημα G με κορυφές v_1, v_2, v_3 το οποίο έχει δύο παράλληλες ακμές με άκρα v_1 και v_2 , τρεις παράλληλες ακμές με άκρα v_1 και v_3 , τρεις παράλληλες ακμές με άκρα v_2 και v_3 και καμία θηλιά.

(α) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;

(β) (15 μονάδες) Βρείτε έναν απλό τύπο για το πλήθος $a_G(n)$ των κλειστών περιπάτων μήκους n στο G και υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n \geq 0} a_G(n)x^n$ ως ρητή συνάρτηση του x .

3. (10 μονάδες) Θεωρούμε τις κορυφές, τα μέσα των ακμών και το κέντρο συμμετρίας (βαρύκεντρο) ενός ισοπλεύρου τριγώνου και χρωματίζουμε καθένα από τα επτά αυτά σημεία με άσπρο ή μαύρο χρώμα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια περιστροφή γύρω από το κέντρο του τριγώνου ή με αντικατοπτρισμό σε κάποιοι άξονα συμμετρίας. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

4. (10 μονάδες) Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_n$ έχουν πρωτεύοντα δείκτη $\text{maj}(w) = 1$;

5. (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των Young ταμπλώ σχήματος $(4, 4, 2, 1)$.

6. (15 μονάδες) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του πλήθους $\text{des}(w)$ των καθόδων μιας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_8$ αν το ταμπλώ $P(w)$ έχει σχήμα $(4, 3, 1)$;

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 17/9/2026 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία