

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2014

1. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ με $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$ και $a_n = a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-4}$ για $n \geq 4$.

- (α) (10 μονάδες) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x .
- (β) (15 μονάδες) Υπολογίστε τους εξής συντελεστές: του x^6 στην $(F(x))^2$, του x^{42} στην $(1-x)F(x)$ και του x^{24} στην $1/F(x)$.
- (γ) (5 μονάδες) Δείξτε ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. (10 μονάδες) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μία μετάθεση $w \in \mathcal{S}_n$ και να χρωματίσουμε με ένα από δύο χρώματα (άσπρο ή μαύρο) κάθε κύκλο της; (Για παράδειγμα, η απάντηση είναι 6 για $n = 2$ αφού υπάρχουν τέσσερις τρόποι για να χρωματιστούν οι κύκλοι του ταυτοτικού στοιχείου της \mathcal{S}_2 και δύο τρόποι για να χρωματιστεί ο κύκλος μήκους 2).

3. Για κάθε θετικό ακέραιο n υπολογίστε:

- (α) (5 μονάδες) Το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με $\text{des}(w) + \text{des}(w^{-1}) = 2n - 2$.
- (β) (5 μονάδες) Το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με πρωτεύοντα δείκτη ίσο με 2.
- (γ) (5 μονάδες) Το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με ακριβώς $n-2$ σταθερά σημεία.

4. Δίνεται η μετάθεση $w \in \mathcal{S}_8$ με $w(1) = 5, w(2) = 3, w(3) = 8, w(4) = 4, w(5) = 1, w(6) = 7, w(7) = 2$ και $w(8) = 6$.

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ $P(w)$ και $Q(w)$.
- (β) (5 μονάδες) Για ποιες μεταθέσεις $u \in \mathcal{S}_8$ ισχύει $P(u) = Q(u) = P(w)$;
- (γ) (5 μονάδες) Δείξτε ότι κάθε μετάθεση $u \in \mathcal{S}_8$ με σχήμα ίσο με εκείνο της w έχει το πολύ πέντε καθόδους.

5. (10 μονάδες) Σε πόσα Young ταμπλώ σχήματος $(3, 3, 2)$ το στοιχείο 2 εμφανίζεται στην πρώτη γραμμή;

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 16/9/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία