

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2011

1. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$, όπου $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ και $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ για $n \geq 2$.

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του x^3 στην $(F(x))^2$.

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του x^3 στο γινόμενο $\prod_{i \geq 1} F(x^i)$.

(γ) (10 μονάδες) Για $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε το συντελεστή του x^{2n} στην $(1/F(x))^n$.

2. (10 μονάδες) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{des}(w)$, όπου $\text{des}(w)$ είναι το πλήθος των καθόδων της μετάθεσης $w \in \mathcal{S}_n$.

3. Δίνεται η μετάθεση $w \in \mathcal{S}_6$ με $w(1) = 2$, $w(2) = 3$, $w(3) = 1$, $w(4) = 5$, $w(5) = 6$ και $w(6) = 4$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ $P(w)$ και $Q(w)$.

(β) (10 μονάδες) Βρείτε όλες τις μεταθέσεις της \mathcal{S}_6 οι οποίες είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη w .

(γ) (5 μονάδες) Βρείτε λοξό Young ταμπλώ σχήματος $(4, 4)/(2)$ το οποίο να είναι ισοδύναμο με το $P(w)$.

(δ) (5 μονάδες) Βρείτε όλα τα λοξά Young ταμπλώ σχήματος $(4, 4, 3, 1)/(3, 2, 1)$ τα οποία είναι ισοδύναμα με το $P(w)$.

4. Δίνεται μη κατευθυνόμενο απλό γράφημα G στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ με ακμές $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ και $\{v_3, v_6\}$.

(α) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα υπογραφήματα έχει το G ;

(β) (5 μονάδες) Ποιος είναι ο πίνακας Laplace του G (ως προς τη δοσμένη αρίθμηση κορυφών);

(γ) (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του G .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 3/11/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία