

## ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Θέματα Σεπτεμβρίου 2009

1. Ποιες από τις παρακάτω τυπικές δυναμοσειρές είναι αντιστρέψιμα στοιχεία του  $\mathbb{C}[[x]]$ ; Να υπολογίσετε την αντίστροφη τυπική δυναμοσειρά, όταν αυτή υπάρχει.

$$(α) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad (β) \sum_{n=1}^{\infty} (x+2x^2+\dots+nx^n)^n \quad (γ) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (δ) \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}/(n+1).$$

2. Για  $n \in \mathbb{N}$  συμβολίζουμε με  $p(n)$  το πλήθος των διαμερίσεων του ακεραίου  $n$  και με  $q(n)$  το πλήθος εκείνων των διαμερίσεων  $\lambda$  του  $n$  για τις οποίες για κάθε άρτιο θετικό ακέραιο  $i$ , το πλήθος των μερών της  $\lambda$  που είναι ίσα με  $i$  είναι άρτιος αριθμός. Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} q(n)x^n = \left( \sum_{n \geq 0} p(n)x^n \right) \prod_{n \geq 0} (1 - x^{4n+2}).$$

3. Έστω η μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_8$  με  $w(1) = 6, w(2) = 2, w(3) = 5, w(4) = 8, w(5) = 1, w(6) = 4, w(7) = 3$  και  $w(8) = 7$ .

- (α) Υπολογίστε το πλήθος  $\text{des}(w)$  των καθόδων της  $w$ .
- (β) Για πόσες μεταθέσεις  $u \in \mathcal{S}_8$  ισχύει  $\text{des}(u) = \text{des}(w)$ ;
- (γ) Πόσα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας  $\mathcal{S}_{100}$  έχουν άρτιο πλήθος καθόδων;
- (δ) Υπολογίστε το πλήθος των σταθερών σημείων της  $w$ .
- (ε) Υπολογίστε το  $P$ -ταμπλώ και το  $Q$ -ταμπλώ της  $w$ .
- (στ) Αν για τη μετάθεση  $u \in \mathcal{S}_8$  ισχύει  $Q(u) = Q(w)$ , ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το πλήθος  $\text{des}(u)$  των καθόδων της  $u$ ;

4. Βρείτε όλες τις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_4$  για τις οποίες ισχύει  $Q(w) = P(w)^t$ .

5. Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8) \in \mathcal{S}_8$  με τις εξής ιδιότητες:

- (α) υπάρχει αύξουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 4,
- (β) δεν υπάρχει αύξουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 5,
- (γ) υπάρχει φθίνουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 3 και
- (δ) δεν υπάρχει φθίνουσα υποακολουθία της  $w$  μήκους 4.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 3/9/2009 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία