

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2024

1. (10 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Αν $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι τυπικές δυναμοσειρές με $F(0) = G(0) = 0$ και

$$\sum_{n \geq 0} (F(x))^{2n+1} = \sum_{n \geq 0} (G(x))^{2n+1}$$

στο $\mathbb{C}[[x]]$, τότε $F(x) = G(x)$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δίνεται το γράφημα G με σύνολο κορυφών το $\{1, 2, 3\}$ και ακμές τις $\{1, 2\}$ και $\{2, 3\}$.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους ℓ στο G για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$.

(β) (10 μονάδες) Πόσοι περίπατοι μήκους 101 με αρχή το 1 και πέρας το 2 υπάρχουν στο G ;

3. (5 μονάδες) Ένα γράφημα G έχει πίνακα γειτνίασης

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;

4. (10 μονάδες) Τα στοιχεία του συνόλου $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ είναι σημεία του επιπέδου. Χρωματίζουμε καθένα από τα σημεία αυτά με ένα από n χρώματα και θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια στροφή γύρω από το σημείο $(0, 0)$, ή με ορθογώνιο αντικατοπτρισμό ως προς έναν από τους τέσσερις άξονες συμμετρίας του τετραγώνου $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

5. (10 μονάδες) Πόσες μεταθέσεις $w \in \mathfrak{S}_6$ υπάρχουν με $\text{inv}(w) = 7$ και $w(4) = 6$;

6.

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ $P(w)$ και $Q(w)$, αν $w \in \mathfrak{S}_6$ είναι η μετάθεση με $w(1) = 2, w(2) = 4, w(3) = 1, w(4) = 3, w(5) = 6, w(6) = 5$.

(β) (10 μονάδες) Πόσα ζεύγη μεταθέσεων $(u, v) \in \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4$ υπάρχουν με $Q(u) = P(v)$;

(γ) (5 μονάδες) Πόσα Young ταμπλώ με 9 τετράγωνα έχουν το 2 στην πρώτη γραμμή;

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 12/6/2024 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία