

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2021

1. (5 μονάδες) Σωστό ή λάθος; Αν $F(x), G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ είναι τυπικές δυναμοσειρές με πραγματικούς συντελεστές και $(F(x))^2 + (G(x))^2 = 0$ στο $\mathbb{C}[[x]]$, τότε $F(x) = G(x) = 0$. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δίνεται γράφημα G για το οποίο

$$\sum_{m \geq 0} f_G(m)x^m = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - 3x^2},$$

όπου $f_G(m)$ είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους m στο G .

(α) (10 μονάδες) Βρείτε έναν όσο το δυνατόν απλούστερο τύπο για το $f_G(m)$.

(β) (5 μονάδες) Πόσες κορυφές και πόσες θηλιές έχει το G ;

(γ) (5 μονάδες) Πόσοι περίπατοι μήκους m υπάρχουν στο G ;

3. Για ένα απλό γράφημα G έχουμε $\det(L(G) - xI) = x(x - 3)^4(x - 5)^2(x - 8)$.

(α) (5 μονάδες) Ποιο το άθροισμα των βαθμών των κορυφών του G ; Πόσες ακμές έχει το G ;

(β) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα δένδρα έχει το G ;

(γ) (5 μονάδες) Πόσα παράγοντα ριζωμένα δάση (με οποιοδήποτε σύνολο ριζών) έχει το G (η έννοια του ριζωμένου δάσους ορίστηκε στη Διάλεξη 5);

4. (10 μονάδες) Έστω ισόπλευρο τρίγωνο Δ και έστω S το σύνολο που αποτελείται από τις κορυφές, τα μέσα των ακμών και το κέντρο (βαρύκεντρο) του Δ . Χρωματίζουμε καθένα από τα σημεία του S άσπρο ή μαύρο και θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με στροφή γύρω από το κέντρο του Δ κατά γωνία 0 ή $\pm 2\pi/3$, ή με ορθογώνιο αντικατοπτρισμό ως προς έναν από τους τρεις άξονες συμμετρίας του Δ . Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

5. Για $w \in \mathfrak{S}_n$, συμβολίζουμε με $f(w)$ το μεγαλύτερο k για τον οποίο τα $1, 2, \dots, k$ βρίσκονται στην πρώτη γραμμή του ταμπλώ $P(w)$. Συμβολίζουμε, επίσης, με $a(n)$ το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ για τις οποίες το $f(w)$ είναι άρτιος αριθμός.

(α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το $a(5)$.

(β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)/n!$.

6. (10 έξτρα μονάδες, αν υπάρχει χρόνος) Για θετικούς ακεραίους n , υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\text{inv}(w)} x^{\text{exc}(w)}.$$

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 16/6/2021 – Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες – Καλή Επιτυχία