

**Αλγεβρική Συνδυαστική**  
**Θέματα Εξετάσεων Ιουλίου 2014**

1. Έστω  $a_n$  το πλήθος των συνθέσεων του  $n$  με περιττό πλήθος μερών. Για παράδειγμα, για  $n = 4$  οι συνθέσεις αυτές είναι οι  $(4)$ ,  $(2, 1, 1)$ ,  $(1, 2, 1)$  και  $(1, 1, 2)$ . Έστω  $F(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ .

- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το  $a_n$  για  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
- (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε την  $F(x)$  ως ρητή συνάρτηση του  $x$ .
- (γ) (5 μονάδες) Ποιες από τις  $F(x)$ ,  $F'(x)$  είναι αντιστρέψιμα στοιχεία του  $\mathbb{C}[[x]]$ ;
- (δ) (10 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική τυπική δυναμοσειρά  $G(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  με  $G(0) = 0$ , τέτοια ώστε

$$F(x) = \sum_{k \geq 1} (G(x))^k = G(x) + (G(x))^2 + (G(x))^3 + \dots$$

και ότι η  $G(x)$  έχει μη αρνητικούς (πραγματικούς) συντελεστές.

2. (10 μονάδες) Πόσες μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_n$  έχουν ακριβώς μία αντιστροφή; Γράψτε όλες τις μεταθέσεις αυτές για  $n = 8$ .

3. (10 μονάδες) Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^n kA(n, k) = \frac{(n+1)!}{2}$$

για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , όπου  $A(n, k)$  είναι το πλήθος των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  με ακριβώς  $k - 1$  καθόδους.

4. Θεωρούμε τις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{S}_8$  με σύνολο καθόδων  $\text{Des}(w) \supseteq \{1, 2, 4, 6, 7\}$ .

- (α) (5 μονάδες) Πόσες τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν;
- (β) (5 μονάδες) Υπάρχει τέτοια μετάθεση  $w$  για την οποία η πρώτη γραμμή του  $P(w)$  έχει τέσσερα στοιχεία;
- (γ) (10 μονάδες) Δώστε παράδειγμα τέτοιας μετάθεσης  $w$  με σχήμα  $\lambda(w) = (3, 3, 2)$  και υπολογίστε τα ταμπλώ  $P(w)$  και  $Q(w)$ .

5. Έστω  $\mathcal{B}_n$  το σύνολο των μεταθέσεων  $w \in \mathcal{S}_n$  σχήματος  $\lambda(w) = (n - 1, 1)$ .

- (α) (5 μονάδες) Πόσα στοιχεία έχει το  $\mathcal{B}_n$ ;
- (β) (5 μονάδες) Για πόσες μεταθέσεις  $w \in \mathcal{B}_n$  ισχύει  $w = w^{-1}$ ;
- (γ) (5 μονάδες) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του πρωτεύοντος δείκτου  $\text{maj}(w)$  για τις μεταθέσεις  $w \in \mathcal{B}_n$ ;

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 31/7/2014 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία