

Αλγεβρική Συνδυαστική
Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2011

1. Θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i) \in \mathbb{C}[[x]]$.
- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του x^4 στην $F(x)$.
 - (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του x^3 στην $1/F(x)$.
 - (γ) (5 μονάδες) Για $n \in \mathbb{N}$, βρείτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το συντελεστή του x^n στην $F(x)$.

2. Για δοσμένο θετικό ακέραιο n , υπολογίστε τα αθροίσματα:

- (α) (10 μονάδες) $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{inv}(w)$ και $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{maj}(w)$.
- (β) (5 μονάδες) $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\text{maj}(w)} \text{maj}(w)$.

3. (10 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του q^9 στο q -διωνυμικό πολυώνυμο $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}_q$.

4. Δίνεται μετάθεση $w \in \mathcal{S}_8$ με $Q(w) = \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 6 \\ & 2 & 7 & 8 & \\ & & & & 4 \end{matrix}$.

- (α) (10 μονάδες) Δώστε παράδειγμα τέτοιας μετάθεσης. Υπάρχει τέτοια μετάθεση w η οποία είναι εναλλάσσουσα;
- (β) (5 μονάδες) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος μιας φθίνουσας υποακολουθίας της w ;
- (γ) (5 μονάδες) Για πόσες μεταθέσεις $u \in \mathcal{S}_8$ ισχύει $u \equiv w^{-1}$ και $u^{-1} \equiv w$ (όπου \equiv συμβολίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας του Knuth στην \mathcal{S}_8);
- (δ) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ $P((w^{-1})^t)$ και $P((w^t)^{-1})$.

5. Για δοσμένο $n \in \mathbb{N}$, υπολογίστε:

- (α) (5 μονάδες) Το πλήθος των ακολουθιών $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{2n})$ διαμερίσεων ακεραίων για τις οποίες ισχύουν $\lambda^0 = \emptyset$, $\lambda^{2n} = (n, n)$ και $\lambda^{i-1} \subset \lambda^i$ για $1 \leq i \leq 2n$.
- (β) (5 μονάδες) Το πλήθος των ακολουθιών $((\lambda^0, \mu^0), (\lambda^1, \mu^1), \dots, (\lambda^{4n}, \mu^{4n}))$ διατεταγμένων ζευγών διαμερίσεων ακεραίων, όπου

$$\emptyset = \lambda^0 \subseteq \lambda^1 \subseteq \dots \subseteq \lambda^{4n} = (n, n) \text{ και} \\ \emptyset = \mu^0 \subseteq \mu^1 \subseteq \dots \subseteq \mu^{4n} = (n, n)$$

είναι διαμερίσεις ακεραίων με $|\lambda^i| + |\mu^i| = i$ για $0 \leq i \leq 4n$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 1/7/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία