

**Αλγεβρική Συνδυαστική**  
**Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2011**

1. Θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά  $F(x) = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i) \in \mathbb{C}[[x]]$ .
- (α) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του  $x^4$  στην  $F(x)$ .
  - (β) (5 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του  $x^3$  στην  $1/F(x)$ .
  - (γ) (5 μονάδες) Για  $n \in \mathbb{N}$ , βρείτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το συντελεστή του  $x^n$  στην  $F(x)$ .

2. Για δοσμένο θετικό ακέραιο  $n$ , υπολογίστε τα αθροίσματα:

- (α) (10 μονάδες)  $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{inv}(w)$  και  $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} \text{maj}(w)$ .
- (β) (5 μονάδες)  $\sum_{w \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\text{maj}(w)} \text{maj}(w)$ .

3. (10 μονάδες) Υπολογίστε το συντελεστή του  $q^9$  στο  $q$ -διωνυμικό πολυώνυμο  $\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}_q$ .

4. Δίνεται μετάθεση  $w \in \mathcal{S}_8$  με  $Q(w) = \begin{matrix} & 1 & 3 & 5 & 6 \\ & 2 & 7 & 8 & \\ & & & & 4 \end{matrix}$ .

- (α) (10 μονάδες) Δώστε παράδειγμα τέτοιας μετάθεσης. Υπάρχει τέτοια μετάθεση  $w$  η οποία είναι εναλλάσσουσα;
- (β) (5 μονάδες) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος μιας φθίνουσας υποακολουθίας της  $w$ ;
- (γ) (5 μονάδες) Για πόσες μεταθέσεις  $u \in \mathcal{S}_8$  ισχύει  $u \equiv w^{-1}$  και  $u^{-1} \equiv w$  (όπου  $\equiv$  συμβολίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας του Knuth στην  $\mathcal{S}_8$ );
- (δ) (10 μονάδες) Υπολογίστε τα ταμπλώ  $P((w^{-1})^t)$  και  $P((w^t)^{-1})$ .

5. Για δοσμένο  $n \in \mathbb{N}$ , υπολογίστε:

- (α) (5 μονάδες) Το πλήθος των ακολουθιών  $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{2n})$  διαμερίσεων ακεραίων για τις οποίες ισχύουν  $\lambda^0 = \emptyset$ ,  $\lambda^{2n} = (n, n)$  και  $\lambda^{i-1} \subset \lambda^i$  για  $1 \leq i \leq 2n$ .
- (β) (5 μονάδες) Το πλήθος των ακολουθιών  $((\lambda^0, \mu^0), (\lambda^1, \mu^1), \dots, (\lambda^{4n}, \mu^{4n}))$  διατεταγμένων ζευγών διαμερίσεων ακεραίων, όπου

$$\emptyset = \lambda^0 \subseteq \lambda^1 \subseteq \dots \subseteq \lambda^{4n} = (n, n) \text{ και} \\ \emptyset = \mu^0 \subseteq \mu^1 \subseteq \dots \subseteq \mu^{4n} = (n, n)$$

είναι διαμερίσεις ακεραίων με  $|\lambda^i| + |\mu^i| = i$  για  $0 \leq i \leq 4n$ .

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 1/7/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία