ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2016

Ασκήσεις #1

1. Έστω $a(n,k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1,2,\ldots,n\}$ με k στοιχεία τα οποία δεν περιέχουν διαδοχικούς ακεραίους.

(α) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων $(r_0, r_1, \ldots, r_k)$ του $n+1$ για τις οποίες ισχύει $r_i \geq 2$ για $1 \leq i \leq k-1$.

(β) Δείξτε ότι το $a(n,k)$ είναι ίσο με το πλήθος των συνθέσεων του $n-k+2$ με $k+1$ μέρη.

(γ) Συνάγετε έναν απλό τύπο για το $a(n,k)$.

2. Δίνεται η τυπική δυναμοσειρά $F(x) = \sum_{k\geq 0}(x+x^2-x^3)^k$.

(α) Υπολογίστε την $F(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x.

(β) Δείξτε ότι οι συντελεστές της $F(x)$ είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

(γ) Υπολογίστε το συντελεστή του x^3 στην $(F(x))^2$.

3. Έστω a_n το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη ίσα με 1 ή 3, όπου $a_0 = 1$ κατά σύμβαση.

(α) Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

(β) Δείξτε ότι

$$a_n \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n-2k}{k}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική τυπική δυναμοσειρά $F(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ τέτοια ώστε $F(0) = 1$ και $F(x)^{-1} = (1-x^2)F(x)$ και υπολογίστε το συντελεστή του x^n στην $F(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έως Τετάρτη, 9 Μαρτίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2016

Ασκήσεις #2

5. Θεωρούμε το απλό γράφημα G_n στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ με ακμές τις $\{v_i, v_n\}$ για $1 \leq i \leq n-1$.

(α) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα $A(G_n)$.

(β) Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στο (α), υπολογίστε το πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους ℓ στο G_n.

(γ) Υπολογίστε το πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους ℓ στο G_n χρησιμοποιώντας μόνο στοιχειώδη συνδυαστική.

(δ) Απαντήστε τα προηγούμενα ερωτήματα γενικότερα για το πλήρες απλό διμερές γράφημα $K_{n,m}$.

6. Το πλήθος των κλειστών περιπάτων μήκους ℓ σε κάποιο γράφημα G είναι ίσο με $5^\ell + 4^\ell + 2 \cdot (-3)^\ell + 1$ για κάθε $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

(α) Πόσες κορυφές έχει το G;

(β) Πόσες θηλιές έχει το G;

(γ) Πόσοι κλειστοί περίπατοι μήκους ℓ υπάρχουν στο γράφημα που προκύπτει από το G προσθέτοντας μια θηλιά σε κάθε κορυφή;

7. Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του γραφήματος που προκύπτει διαγράφοντας μια οποιαδήποτε ακμή από το πλήρες απλό γράφημα με n κορυφές.

8. Θεωρούμε το απλό γράφημα C_n στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ με ακμές τις $\{v_i, v_{i+1}\}$ για $1 \leq i \leq n-1$ και $\{v_1, v_n\}$ (δηλαδή τον κύκλο μήκους n).

(α) Υπολογίστε με στοιχειώδη τρόπο το πλήθος των παραγόντων δένδρων του C_n.

(β) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων δένδρων του C_n χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πίνακα-Δένδρου.

Έως Τετάρτη, 30 Μαρτίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2016

Ασκήσεις $\#3$

9. Θεωρούμε το κατευθυνόμενο γράφημα $\mathcal{D}$ στο σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ με $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ακμές, από τις οποίες a_i έχουν αρχή v_i και πέρας v_{i+1} για $1 \le i \le n$ (όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι θετικοί ακέραιοι και $v_{n+1} = v_1$).

(α) Υπολογίστε το πλήθος των παραγόντων προσανατολισμένων δένδρων του $\mathcal{D}$ με ρίζα v_i για $1 \le i \le n$. Για ποιες τιμές των $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι το $\mathcal{D}$ ισορροπημένο;

Έστω ότι το $\mathcal{D}$ είναι ισορροπημένο και έστω $d = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$. Εκφράστε τις απαντήσεις σας στα ακόλουθα ερωτήματα ως συναρτήσεις των n, d και ℓ.

(β) Ποιο είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων δοσμένου μήκους ℓ του $\mathcal{D}$;

(γ) Ποιες είναι οι ιδιοτιμές των πινάκων $A(\mathcal{D})$, $L(\mathcal{D})$; Ποιο είναι το γινόμενο των μη μηδενικών ιδιοτιμών του $L(\mathcal{D})$;

(δ) Ποιο είναι το πλήθος των κλειστών περιπάτων Euler του $\mathcal{D}$;

10. Χρωματίζουμε κάθε ακμή ενός τετραέδρου T με ένα από n χρώματα. Θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με μια άρτια μετάθεση του συνόλου των κορυφών του T. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

11. Χρωματίζουμε καθένα από τα m στοιχεία ενός συνόλου A με ένα από n χρώματα. Θεωρούμε μια υποομάδα G της συμμετρικής ομάδας των μεταθέσεων του A και συμβολίζουμε με $\alpha_G(n)$ το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας των χρωματισμών, όπου δύο χρωματισμοί θεωρούνται ισοδύναμοι αν ανήκουν στην ίδια τροχιά της δράσης της G. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} \alpha_G(n)/n^m$.

12. Δέκα όμοιες μπάλλες είναι τοποθετημένες σε σχηματισμό μπιλιάρδου (μία βρίσκεται πάνω από άλλες δύο, που βρίσκονται πάνω από άλλες τρεις, που βρίσκονται πάνω από άλλες τέσσερις). Χρωματίζουμε κάθε μπάλλα με ένα από n χρώματα και θεωρούμε δύο χρωματισμούς ισοδύναμους αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με κάποια στροφή γύρω από το κέντρο του σχηματισμού.

(α) Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας χρωματισμών υπάρχουν;

(β) Πόσοι από αυτές έχουν τρεις μπάλλες πράσινες, τρεις μπάλλες κόκκινες και τέσσερις μπάλλες μπλέ;

Έως Παρασκευή, 15 Απριλίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2016

Ασκήσεις #4

13. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ οι οποίες έχουν ακριβώς δύο κύκλους.

(α) Υπολογίστε το a_n για $n = 5$ και $n = 6$.

(β) Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \ = \ \infty.$$

14. Συμβολίζουμε με $\mathrm{inv}(w)$ το πλήθος των αντιστροφών μιας μετάθεσης $w \in \mathcal{S}_n$.

(α) Δείξτε ότι
$$\sum_{w\in\mathcal{S}_n} x^{a(w)} q^{\mathrm{inv}(w)} \ = \ x(x+q)(x+q+q^2)\cdots(x+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$
όπου $a(w)$ είναι το πλήθος των δεικτών $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για τους οποίους ισχύει $w(i) < w(j)$ για $i < j \le n$ (ένας από τους δείκτες αυτούς είναι ο $i = n$).

(β) Δείξτε ότι
$$\sum_{w\in\mathcal{S}_n} x^{b(w)} q^{\mathrm{inv}(w)} \ = \ x(x+q)(x+q+q^2)\cdots(x+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$
όπου $b(w)$ είναι το πλήθος των δεικτών $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ για τους οποίους ισχύει $w(i) < w(j)$ για $1 \le i < j$ (ένας από τους δείκτες αυτούς είναι ο $j = 1$).

15. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w\in\mathcal{S}_n} \mathrm{des}(w)$, όπου $\mathrm{des}(w)$ είναι το πλήθος των καθόδων της μετάθεσης $w \in \mathcal{S}_n$.

16. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $w = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε δείκτη $j \in \{2, 3, \dots, n\}$ υπάρχει δείκτης $i \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ τέτοιος ώστε $|a_i - a_j| = 1$. Για παράδειγμα, για $n = 3$ οι μεταθέσεις αυτές είναι οι $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$ και $(3, 2, 1)$.

(α) Πόσες τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν;

(β) Για $k \in [n-1]$, πόσες τέτοιες μεταθέσεις έχουν ακριβώς k καθόδους;

Έως Παρασκευή, 13 Μαΐου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
Εαρινό Εξάμηνο 2016

Ασκήσεις #5

17. Δείξτε ότι

$$f^{(n-k,k)} \ = \ \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$$

για $0 \le k \le n/2$. Συνάγετε ότι το συνολικό πλήθος των Young ταμπλώ με n τετράγωνα και δύο το πολύ γραμμές είναι ίσο με $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

18. Έστω μετάθεση $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathcal{S}_n$. Για $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ συμβολίζουμε με ℓ_i το μέγιστο πλήθος στοιχείων μιας αύξουσας υποακολουθίας της w με τελευταίο όρο ίσο με w_i. Για παράδειγμα, αν $n = 6$ και $w = (3, 5, 1, 6, 4, 2)$, τότε $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 1$, $\ell_4 = 3$, $\ell_5 = 2$ και $\ell_6 = 2$. Έστω $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του ταμπλώ $P(w)$ και $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Δείξτε ότι το a_k είναι ίσο με w_i όπου $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι ο μέγιστος δείκτης με $\ell_i = k$.

Έως Παρασκευή, 3 Ιουνίου