ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2011
Ασκήσεις #1

1. Έστω a_n το πλήθος των υποσυνόλων του $[2n]$ τα οποία δεν περιέχουν δύο ακεραίους, η διαφορά των οποίων είναι ίση με n. Δείξτε ότι $a_n = 3^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Έστω a_n το πλήθος των συνθέσεων του n με μέρη ίσα με 1 ή 3.

(α) Δείξτε ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n \ = \ \frac{1}{1 - x - x^3},$$

όπου $a_0 = 1$ κατά σύμβαση.

(β) Συνάγετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_n \ = \ \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n-2k}{k}.$$

3. Έστω θετικός ακέραιος n.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει κανείς μία σύνθεση ρ του n με δύο μέρη και έπειτα να επιλέξει μία σύνθεση για κάθε μέρος της ρ;

(β) Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλέξει κανείς μία σύνθεση ρ του n και έπειτα να επιλέξει μία σύνθεση για κάθε μέρος της ρ;

4. Συμβολίζουμε με $s(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n κανένα μέρος των οποίων δεν εμφανίζεται περισσότερες από τέσσερις φορές και με $t(n)$ το πλήθος των διαμερίσεων του n κανένα μέρος των οποίων δεν είναι πολλαπλάσιο του 5 (όπου $s(0) = t(0) = 1$ κατά σύμβαση).

(α) Υπολογίστε τις γεννήτριες συναρτήσεις $\sum_{n \geq 0} s(n) x^n$ και $\sum_{n \geq 0} t(n) x^n$.

(β) Δείξτε ότι ισχύει $s(n) = t(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που ορίζεται θέτοντας $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} \ = \ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \, 2^{2n-2k+1}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $a_n = \binom{2n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έως Παρασκευή, 18 Μαρτίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2011
Ασκήσεις #2

6. Έστω a_n το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ οι οποίες έχουν ακριβώς δύο κύκλους.

(α) Υπολογίστε το a_n για $n = 5$ και $n = 6$.

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \;=\; \infty.$$

7. Συμβολίζουμε με $c(w)$ το πλήθος των κύκλων της μετάθεσης $w \in \mathcal{S}_n$.

(α) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w\in\mathcal{S}_n} c(w)$.

(β) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w\in\mathcal{A}_n} c(w)$, όπου $\mathcal{A}_n$ είναι το σύνολο των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ με άρτιο πλήθος κύκλων.

8. Δίνονται ακέραιοι $1 \le k \le n$. Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$ για τις οποίες το ζεύγος (i, k) είναι αντιστροφή της w για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

9. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $w = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{S}_n$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $2 \le j \le n$ υπάρχει δείκτης $1 \le i < j$ με $|a_i - a_j| = 1$. Για παράδειγμα, για $n = 3$ οι μεταθέσεις αυτές είναι οι $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$ και $(3, 2, 1)$.

(α) Πόσες τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν;

(β) Για $k \in [n-1]$, πόσες τέτοιες μεταθέσεις w υπάρχουν με $\mathrm{des}(w) = k$;

10. Δείξτε ότι για το πολυώνυμο Euler τάξης n ισχύει

$$\frac{1}{x}\, A_n(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k!\, S(n,k)(x-1)^{n-k},$$

όπου $S(n, k)$ συμβολίζει το πλήθος των διαμερίσεων του συνόλου $[n]$ με k μέρη.

Έως Παρασκευή, 8 Απριλίου

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2011
Ασκήσεις #3

11. Δείξτε ότι για ακεραίους $1 \leq k \leq n$ ισχύει ο τύπος

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{i=0}^{n-k} q^{n-k-i} \begin{bmatrix} n-i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

(α) υπολογιστικά,

(β) χρησιμοποιώντας μια από τις συνδυαστικές ερμηνείες των q-διωνυμικών συντελεστών.

12. Θεωρούμε τις μεταθέσεις $w \in \mathcal{S}_n$ με την ιδιότητα $Q(w) = P(w)^t$.

(α) Βρείτε δύο τέτοιες μεταθέσεις για $n = 6$.

(β) Πόσες τέτοιες μεταθέσεις υπάρχουν για $n = 8$;

13. Υπολογίστε το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathcal{S}_n$, το σχήμα των οποίων έχει το πολύ ένα μέρος μεγαλύτερο του ένα.

14. Έστω η μετάθεση $w = (n+1, n+2, \ldots, 2n, 1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{S}_{2n}$.

(α) Πόσες μεταθέσεις της $\mathcal{S}_{2n}$ είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη w;

(β) Περιγράψτε όλες τις μεταθέσεις της $\mathcal{S}_{2n}$ οι οποίες είναι ισοδύναμες κατά Knuth με τη w.

15. Έστω διαμέριση ακεραίου λ. Συμβολίζουμε με Y_λ το διάγραμμα Young της λ και με $h(x)$ το hooklength του $x \in Y_\lambda$. Δείξτε ότι ο ακέραιος

$$\sum_{x \in Y_\lambda} (-1)^{h(x)-1}$$

είναι τριγωνικός αριθμός (δηλαδή φυσικός αριθμός της μορφής $k(k-1)/2$ για κάποιο θετικό ακέραιο k).

Έως Παρασκευή, 13 Μαίου