

Οι Αριθμοί Catalan στην Άλγεβρα, τη Γεωμετρία και τη Συνδυαστική

Χρήστος Αθανασιάδης

Πανεπιστήμιο Αθηνών

3 Νοεμβρίου, 2017

- ❶ Οι αριθμοί Catalan και το πρόβλημα του Euler
- ❷ Οι αριθμοί Catalan στη συνδυαστική
- ❸ Οι αριθμοί Catalan στην άλγεβρα και τη γεωμετρία

Οι αριθμοί Catalan

Ο n -οστός αριθμός Catalan ορίζεται ως

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1},$$

όπου

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

και $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ για $n \in \mathbb{N}$, με $0! = 1$.

Έτσι, έχουμε την ακολουθία $C_0 = C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$,
 $C_5 = 42$, $C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, κ.ο.κ.

Στην ιστορία των αριθμών Catalan παίζουν ρόλο οι

- Sharabiin Myangat (1730)
- Leonhard Euler (1751)
- Eugène Charles Catalan (1838)
- John Riordan (1948)
- Martin Gardner (1976)

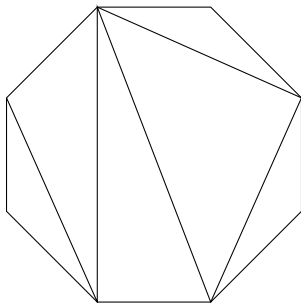
Λεπτομέρειες βρίσκονται στο βιβλίο του Richard P. Stanley

- Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015.

Το πρόβλημα του Euler

Τριγωνισμός ενός κυρτού n -γώνου λέγεται μια υποδιαίρεσή του με $n - 3$ διαγωνίους, οι οποίες ανά δύο δε διασταυρώνονται.

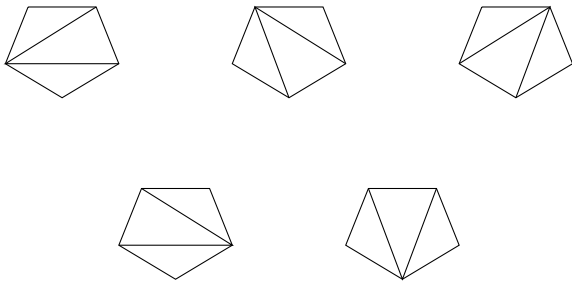
Παράδειγμα.



Σχήμα: Ένας τριγωνισμός του οκταγώνου

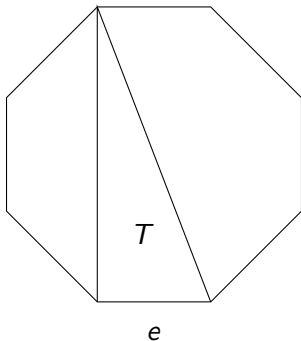
Ερώτημα (Euler, 1751): Πόσους τριγωνισμούς έχει ένα κυρτό n -γωνο;

Θεώρημα (Lamé, 1838): Το πλήθος των τριγωνισμών ενός κυρτού πολυγώνου με $n + 2$ κορυφές είναι ίσο με τον αριθμό C_n .



Σχήμα: Οι πέντε τριγωνισμοί του πενταγώνου

Απόδειξη: Έστω κυρτό πολύγωνο Π με $n + 2$ κορυφές και έστω a_n το πλήθος των τριγωνισμών του Π . Έστω ακμή e του Π . Θεωρώντας το μοναδικό τρίγωνο T ενός τριγωνισμού του Π με ακμή e , όπως στο σχήμα, προκύπτει ο αναγωγικός τύπος:



Ο αναγωγικός τύπος

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, \quad n \geq 1,$$

όπου $a_0 := 1$.

Η μέθοδος των γεννητριών συναρτήσεων

Για να υπολογίσουμε το a_n , θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αναγωγικό τύπο με x^{n-1} και αθροίζοντας για $n \geq 0$ παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i} \right) x^{n-1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = x \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n a_i a_{n-i} \right) x^n.$$

Όμως,

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = F(x) - 1$$

και

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n a_i a_{n-i} \right) x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = (F(x))^2,$$

αφού γενικότερα

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + \cdots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \cdots \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε στην ισότητα $F(x) - 1 = x(F(x))^2$, δηλαδή

$$x(F(x))^2 - F(x) + 1 = 0.$$

Η μοναδική λύση είναι η

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Ερώτημα: Γιατι όχι

$$F(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x};$$

Απάντηση: Ο τύπος του Taylor

$$(1+y)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} y^n = \sum_{n \geq 0} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{y^n}{n!}.$$

ορίζει την $\sqrt{1-4x}$ ως τυπική δυναμοσειρά. Για $y = -4x$, $\alpha = 1/2$,
 $\sqrt{1-4x} = 1 - 2x - 2x^2 + 4x^3 - \cdots$ και συνεπώς η

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = 1 + x - 2x^2 + \cdots$$

ορίζεται ως τυπική δυναμοσειρά, ενώ η

$$\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{x} - 1 - x + 2x^2 - \cdots$$

δεν ορίζεται.

Συνοψίζοντας:

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 0} a_n x^n &= \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1 - 4x}) = \frac{1}{2x} \left(1 - \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \\&= -\frac{1}{2x} \sum_{n \geq 0} \binom{1/2}{n+1} (-4x)^{n+1} = \dots \\&= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n, \quad n \geq 0.$$

Συμπέρασμα

Πόρισμα: Η ακολουθία $(C_n)_{n \geq 0}$ των αριθμών Catalan καθορίζεται πλήρως από

- τον αναγωγικό τύπο

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}, \quad n \geq 1,$$

και τη $C_0 = 1$,

- τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{n \geq 1} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Young ταμπλώ

Πρόβλημα: Τοποθετούμε τους ακεραίους $1, 2, \dots, 2n$ στα τετράγωνα ενός $n \times 2$ ορθογωνίου (έναν σε κάθε τετράγωνο), έτσι ώστε σε κάθε γραμμή του ορθογωνίου οι ακέραιοι να αυξάνουν προς τα δεξιά. Το πλήθος αυτών των διατάξεων (ταμπλώ) είναι ίσο με

$$\binom{2n}{n}.$$

Παραδείγματα:

1	4	5	6
2	3	7	8

,

1	3	4	7
2	5	6	8

Πόσα τέτοια ταμπλώ έχουν την επιπλέον ιδιότητα ότι οι ακέραιοι αυξάνουν προς τα κάτω σε κάθε στήλη;

Παράδειγμα: Για $n = 2$

1	2				
3	4	,	1	3	
			2	4	,
			2	3	,
			2	3	,
			1	4	,
			2	4	,
			1	3	,
			3	4	
			1	2	

υπάρχουν $C_2 = 2$ τέτοια ταμπλώ και για $n = 3$

1	2	3			
4	5	6	,	1	2
				3	4
				3	5
				6	,
				1	2
				3	5
				3	4
				6	,
				1	3
				2	4
				5	6
				2	4
				6	
				1	3
				2	5
				6	

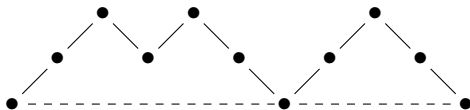
υπάρχουν $C_3 = 5$. Θα δείξουμε ότι η απάντηση είναι C_n για κάθε n .

Μονοπάτια Dyck

Μονοπάτι Dyck μήκους $2n$ λέγεται κάθε μονοπάτι στο $\mathbb{Z}^2$ με τις εξής ιδιότητες:

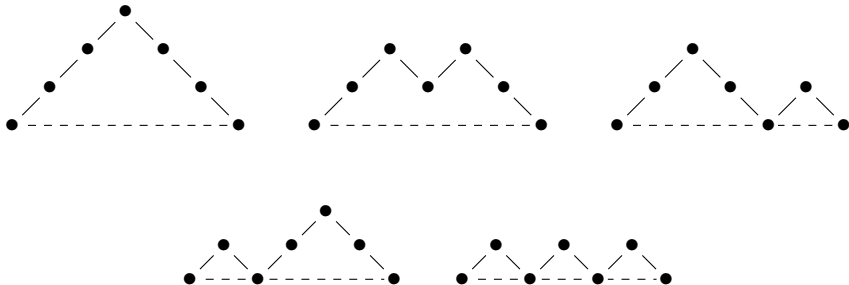
- έχει αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρασ το $(2n, 0)$,
- έχει $2n$ βήματα, το καθένα της μορφής $(1, 1)$ ή $(1, -1)$, και
- βρίσκεται εξολοκλήρου στο ημιεπίπεδο $y \geq 0$ του $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα:



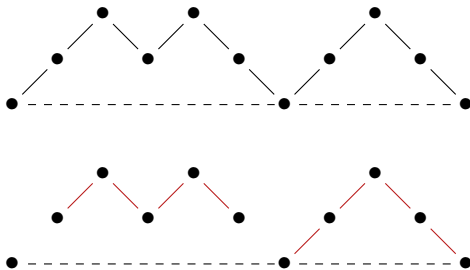
Σχήμα: Ένα μονοπάτι Dyck μήκους 10

Παράδειγμα: Υπάρχουν



$C_3 = 5$ μονοπάτια Dyck μήκους 6.

Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι Dyck μήκους $2n$ διασπάται σε δύο μονοπάτια Dyck συνολικού μήκους $2n - 2$, όπως στο σχήμα:



Αυτό δείχνει ότι

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, \quad n \geq 1,$$

για το πλήθος a_n των μονοπατιών Dyck μήκους $2n$ και συνεπώς $a_n = C_n$ για κάθε n .

Επιστροφή στα ταμπλώ

Ένα ταμπλώ ορθογωνίου σχήματος $n \times 2$ λέγεται **Young ταμπλώ** αν τα στοιχεία σε κάθε γραμμή του αυξάνουν προς τα δεξιά και τα στοιχεία σε κάθε στήλη αυξάνουν προς τα κάτω.

Υπενθυμίζουμε την εξής βασική αρχή:

Πρόταση: Αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, τότε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A είναι ίσο με εκείνο του B .

Έστω A_n το σύνολο των Young ταμπλώ ορθογωνίου σχήματος και B_n το σύνολο των μονοπατιών Dyck μήκους $2n$. Ορίζουμε τη

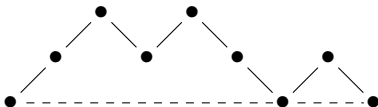
$$\varphi : A_n \rightarrow B_n$$

ως εξής:

Για $T \in A_n$ συμβολίζουμε με $\varphi(T)$ το μονοπάτι στο $\mathbb{Z}^2$ μήκους $2n$ με αρχή το σημείο $(0, 0)$ και i -οστό βήμα ίσο με $(1, 1)$ ή $(1, -1)$, αν το i βρίσκεται στην πρώτη ή τη δεύτερη γραμμή του T , αντίστοιχα.

Παράδειγμα:

$$\varphi\left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 8 \\ \hline\end{array}\right) =$$



Πρόταση: Η $\varphi : A_n \rightarrow B_n$ είναι καλά ορισμένη, αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Κατά συνέπεια,

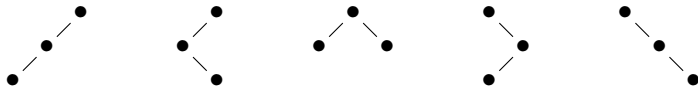
$$\# A_n = \# B_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Πόρισμα: Επιλέγοντας τυχαία και ομοιόμορφα ένα ταμπλώ T ορθογωνίου σχήματος $n \times 2$ τα στοιχεία σε κάθε γραμμή του οποίου αυξάνουν προς τα δεξιά, η πιθανότητα να αυξάνουν τα στοιχεία και σε κάθε στήλη του T προς τα κάτω είναι ίση με $1/(n+1)$.

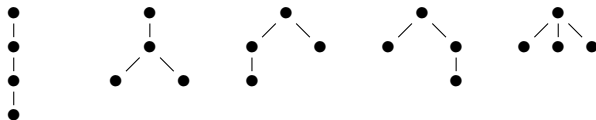
Άλλες συνδυαστικές ερμηνείες

Άλλες οικογένειες συνδυαστικών αντικειμένων που απαριθμούνται από τον n -στό αριθμό Catalan περιλαμβάνουν:

- Τα **δυαδικά δένδρα** με n κορυφές.



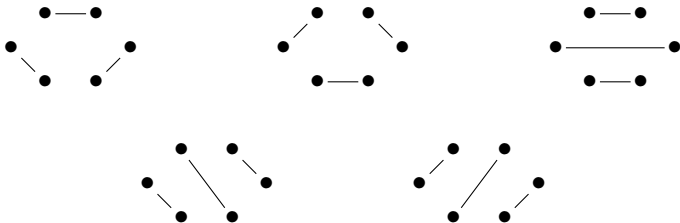
- Τα **επίπεδα δένδρα** με $n + 1$ κορυφές.



- Τις **αύξουσες ακολουθίες** $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ με $a_i \leq i$ για κάθε i .

(1, 1, 1) (1, 1, 2) (1, 1, 3) (1, 2, 2) (1, 2, 3)

- Τα **μη διασταυρούμενα τέλεια ταιριάσματα** του συνόλου των κορυφών ενός $2n$ -γώνου.



- Τις **μη διασταυρούμενες διαμερίσεις** του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$.

- Τις **ακολουθίες ακεραίων** $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$ με $a_i \geq 2i$ για κάθε i .

(2, 4, 6) (2, 5, 6) (3, 4, 6) (3, 5, 6) (4, 5, 6)

- Τις **αναδιατάξεις** του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ που αποφεύγουν το μοτίβο 123.

(1, 3, 2) (2, 1, 3) (3, 1, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

- Τις **αναδιατάξεις** του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ που αποφεύγουν το μοτίβο 132.

(1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

...

Στο βιβλίο του Richard P. Stanley

- Catalan Numbers, Cambridge University Press, 2015

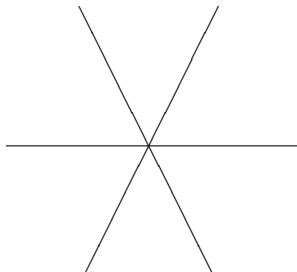
περιγράφονται 214 συνδυαστικές ερμηνείες του αριθμού C_n !

Υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τα $n(n-1)/2$ υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$

Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε τα υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^3$ με εξισώσεις $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ και $x_2 = x_3$.



Ερώτημα: Σε πόσες περιοχές χωρίζουν τα υπερεπίπεδα αυτά τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$;

Απάντηση: Κάθε τέτοια περιοχή είναι της μορφής

$$R_w = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{w_1} > x_{w_2} > \dots > x_{w_n}\}$$

για κάποια αναδιάταξη $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Οι περιοχές είναι ακριβώς τόσες, όσες και οι αναδιατάξεις, δηλαδή $n!$.

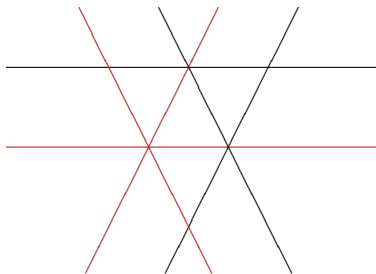
Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε τις περιοχές

$$\begin{array}{lll} x_1 > x_2 > x_3, & x_1 > x_3 > x_2, & x_2 > x_1 > x_3, \\ x_3 > x_1 > x_2, & x_2 > x_3 > x_1, & x_3 > x_2 > x_1. \end{array}$$

Θεωρούμε τώρα τα $n(n-1)$ υπερεπίπεδα στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζονται από τις εξισώσεις

- $x_i - x_j = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$
- $x_i - x_j = 1, \quad 1 \leq i < j \leq n.$

Παράδειγμα: Για $n = 3$ έχουμε



Παρατήρηση: Τα έξι υπερεπίπεδα χωρίζουν τον $\mathbb{R}^3$ σε 16 περιοχές και το τμήμα του $x_1 > x_2 > x_3$ σε $C_3 = 5$ περιοχές.

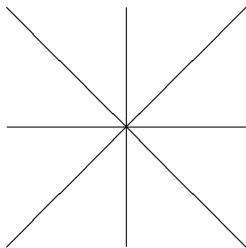
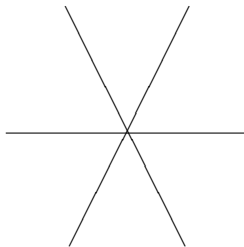
Πρόταση: Για κάθε $n \geq 2$, τα υπερεπίπεδα αυτά χωρίζουν τον $\mathbb{R}^n$ σε $(n+1)^{n-1}$ περιοχές και το τμήμα του

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n$$

σε C_n περιοχές.

Παρατήρηση: Οι ορθογώνιες ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα $x_i - x_j = 0$ του $\mathbb{R}^n$ παράγουν μια ομάδα ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_n .

Παράδειγμα: Οι ορθογώνιες ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα (ευθείες)



του $\mathbb{R}^2$ παράγουν μια ομάδα ισόμορφη με τη συμμετρική ομάδα S_3 και τη διεδρική ομάδα τάξης 8, αντίστοιχα.

Ομάδες ανακλάσεων

Μια πεπερασμένη ομάδα που παράγεται από ορθογώνιες ανακλάσεις σε έναν Ευκλείδειο χώρο λέγεται **πεπερασμένη (πραγματική) ομάδα ανακλάσεων**. Οι ομάδες αυτές υπόκεινται στην ταξινόμηση των **Cartan–Killing**. Με παρόμοιο τρόπο ταξινομούνται:

- οι πεπερασμένες ομάδες **Coxeter**,
- τα κανονικά πολύτοπα,
- τα συστήματα ριζών,
- οι ημιαπλές άλγεβρες **Lie**,
- οι πεπερασμένες υποομάδες της **SU_2** ,
- τα quivers πεπερασμένου τύπου,
- οι άλγεβρες σμηνών πεπερασμένου τύπου,
- ...

Έστω

- W μια ανάγωγη πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων,
- ℓ η τάξη της,
- $e_1, e_2, \dots, e_\ell$ οι εκθέτες της,
- h ο αριθμός Coxeter,
- m ένας τυχαίος θετικός ακέραιος.

Ο αριθμός

$$C(W, m) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{e_i + mh + 1}{e_i + 1}$$

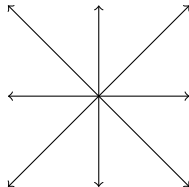
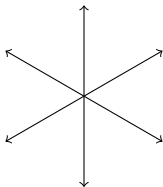
λέγεται m -γενικευμένος αριθμός Catalan για τη W . Ο αριθμός αυτός εξειδικεύεται στον C_n για $W = S_n$ και $m = 1$.

Παράδειγμα: Για τη συμμετρική ομάδα $W = S_n$,

$$C(S_n, m) = \frac{1}{mn+1} \binom{(m+1)n}{n}.$$

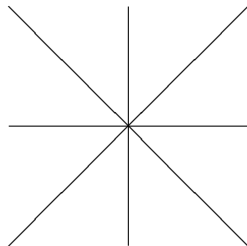
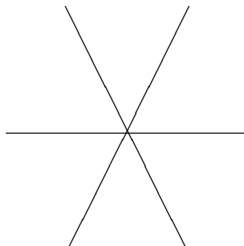
Υποθέτοντας ότι η W είναι κρυσταλλογραφική, έστω

- Φ ένα σύστημα ριζών στον $V = \mathbb{R}^\ell$ για τη W ,
- Φ^+ ένα θετικό υποσύστημα.



Τα υπερεπίπεδα ανάκλασης της W είναι τα

$$(\alpha, x) = 0, \quad \alpha \in \Phi^+.$$



Έστω

$$R_\Phi = \{x \in V : (\alpha, x) > 0 \text{ για } \alpha \in \Phi^+\}$$

η θεμελιώδης περιοχή της W .

Θεώρημα (A, 2004): Το πλήθος των περιοχών στις οποίες διαχωρίζεται η θεμελιώδης περιοχή R_Φ της W από τα υπερεπίπεδα

$$(\alpha, x) = 1, 2, \dots, m, \quad \alpha \in \Phi^+$$

είναι ίσο με $C(W, m)$.

Άλγεβρα των συναναλλοιώτων

Η ομάδα W δρα φυσιολογικά στο χώρο $(\mathbb{C}^\ell)^*$ των γραμμικών συναρτήσεων πάνω στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^\ell$ και επομένως και στον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_\ell]$.

Η **άλγεβρα των συναναλλοιώτων** ορίζεται ως το πηλίκο

$$R_W = \frac{\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_\ell]}{I_W},$$

όπου

$$I_W = \{ f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_\ell] : w \cdot f = f, f(0) = 0 \}$$

είναι το ιδεώδες των W -αναλλοιώτων πολυωνύμων μηδενικού σταθερού όρου, πάνω στο οποίο η W δρα επίσης.

Παράδειγμα: Η δράση της συμμετρικής ομάδας S_n επί του δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ είναι η

$$w \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{w(1)}, x_{w(2)}, \dots, x_{w(n)}), \quad w \in S_n$$

και

$$I_W = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$$

όπου

$$f_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$f_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

...

$$f_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα στα $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Θεώρημα (Chevalley, 1955): Ως W -αναπαράσταση, η R_W είναι ισόμορφη με την κανονική αναπαράσταση της W για κάθε πεπερασμένη, πραγματική ομάδα ανακλάσεων W . Ειδικότερα,

$$\dim_{\mathbb{C}}(R_W) = |W|.$$

Παράδειγμα: Για τη συμμετρική ομάδα S_n , η διάσταση της άλγεβρας των συναναλλοιώτων είναι ίση με $n!$.

Διαγώνια δράση

Θεωρούμε τώρα τη διαγώνια δράση

$$w \cdot f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = f(x_{w(1)}, \dots, x_{w(n)}, y_{w(1)}, \dots, y_{w(n)})$$

της S_n επί του δακτυλίου $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ και το πηλίκο

$$\mathcal{R}_n = \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]}{\mathcal{I}_n},$$

όπου $\mathcal{I}_n$ είναι το ιδεώδες των W -αναλλοίωτων πολυωνύμων μηδενικού σταθερού όρου.

Θεώρημα (Haiman, 2001): Για τη διάσταση της $\mathcal{R}_n$ ισχύει

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{R}_n) = (n+1)^{n-1}.$$

Επιπλέον, η πολλαπλότητα της αναπαράστασης του προσήμου στην S_n -αναπαράσταση $\mathcal{R}_n$ είναι ίση με τον n -οστό αριθμό Catalan C_n .