

Κεφάλαιο 3¹

Ιδιοτιμές και Ιδιάζουσες Τιμές

3.1. Ανάλυση (αποσύνθεση) Ιδιοτιμών και Ιδιαζουσών Τιμών.

Μία *ιδιοτιμή* ή *χαρακτηριστική τιμή* (*eigenvalue*) και ένα *ιδιοδιάνυσμα* (*eigenvector*) ενός τετράγωνου πίνακα A είναι ένα μονότιμο μέγεθος λ και ένα μη-μηδενικό άνυσμα x τέτοια, ώστε

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

Μία *ιδιάζουσα τιμή* (*singular value*) και ένα ζεύγος *ιδιαζόντων ανυσμάτων* (*singular vectors*) ενός τετράγωνου ή ορθογώνιου A πίνακα είναι ένα μη-μηδενικό μονότιμο μέγεθος σ και δύο μη-μηδενικά ανύσματα u και v τέτοια, ώστε

$$Av = \sigma u \quad (2\alpha)$$

$$A^H u = \sigma v \quad (2\beta)$$

Ο «εκθέτης» στην A^H δηλώνει τον *Ερμιτιανό ανάστροφο* (*Hermitian transpose*), δηλαδή τον συζυγή ανάστροφο ενός μιγαδικού πίνακα. Εάν πίνακας είναι πραγματικός, τότε ο ανάστροφός του δηλώνεται ως A^T . Ο όρος *ιδιάζουσα τιμή* σχετίζεται με την «απόσταση» ενός πίνακα από το σύνολο των ιδιαζόντων πινάκων.

Οι ιδιοτιμές έχουν μεγάλη σημασία σε περιπτώσει όπου ένας πίνακας (μήτρα) περιγράφει *μετασχηματισμό* από ένα διανυσματικό χώρο επί του εαυτού του. Τα συστήματα γραμμικών κανονικών διαφορικών εξισώσεων αποτελούν σπουδαίο τέτοιο παράδειγμα. Οι τιμές της λ μπορεί να αντιστοιχούν σε συχνότητες ταλάντωσης, κρίσιμες τιμές παραμέτρων ευστάθειας, ενεργειακές στάθμες ατόμων κ.ο.κ. Οι ιδιάζουσες τιμές έχουν μεγάλη σημασία όταν ένας πίνακας περιγράφει μετασχηματισμό από ένα διανυσματικό χώρο σε ένα άλλο διανυσματικό χώρο, πιθανόν διαφορετικών διαστάσεων. Τα συστήματα με περισσότερους ή λιγότερους άγνωστους από εξισώσεις αλγεβρικών εξισώσεων αποτελούν τα αντίστοιχα σπουδαία παράδειγμα

Οι ορισμοί των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιαζόντων ανυσμάτων δεν περιλαμβάνουν κανονικοποίηση. Ένα ιδιοδιάνυσμα x , ή ένα ζεύγος ιδιαζόντων ανυσμάτων u και v , μπορούν να πολλαπλασιασθούν (υποστούν μεταβολές κλίμακας) με οιοδήποτε μη-μηδενικό παράγοντα χωρίς αλλαγή καμίας από τις σημαντικές ιδιότητές τους. Τα ιδιοδιανύσματα συμμετρικών πινάκων είναι συνήθως κανονικοποιημένα ώστε να έχουν μοναδιαίο Ευκλείδειο μήκος, $\|x\|_2=1$. Αντιθέτως, τα ιδιοδιανύσματα μη-συμμετρικών πινάκων μπορούν να έχουν διαφορετικές κανονικοποιήσεις σε διαφορετικές περιπτώσεις. Τα ιδιάζοντα ανύσματα σχεδόν πάντοτε κανονικοποιούνται ώστε να έχουν Ευκλείδειο μήκος ίσο προς την μονάδα, $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Η εξίσωση ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων ενός τετράγωνου πίνακα είναι

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad x \neq 0 \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $A - \lambda I$ είναι ιδιάζων και ότι

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (4)$$

¹ Τα Μέρη 3.1 – 3.5 και 3.7 των παρούσων σημειώσεων έχουν βασισθεί στο Κεφαλαίο 3 (Eigenvalues and Singular Values) του βιβλίου «*Numerical Computing with Matlab*», από τον Cleve Moller, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.

Η εξίσωση (4) ονομάζεται *χαρακτηριστική εξίσωση* ή *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A . Ο βαθμός του πολυωνύμου είναι ο αυτός με τον βαθμό του πίνακα, πράγμα που σημαίνει ότι ένας πίνακας $n \times n$ έχει n ιδιοτιμές, συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλών (δηλ. των πολλαπλών ριζών του πολυωνύμου). Όπως η ορίζουσα, έτσι και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι πολύ χρήσιμο για θεωρητική εργασία, αλλά όχι για στιβαρούς και αξιόπιστους αριθμητικούς αλγορίθμους.

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A , έστω x_1, x_2, \dots, x_n το σύνολο των αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων, Λ ένας $n \times n$ διαγώνιος πίνακας με τα λ_j στην διαγώνιο και X ένας $n \times n$ πίνακας του οποίου η j -στη στήλη είναι x_j . Τότε,

$$AX = X\Lambda \quad (5)$$

Η τοποθέτηση του Λ στα δεξιά του X είναι απαραίτητη, ώστε εκάστη στήλη του X να πολλαπλασιάζεται με την αντίστοιχη ιδιοτιμή της. Ας κάνουμε τώρα την κρίσιμη παραδοχή – η οποία δεν αληθεύει για όλους τους πίνακες – ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, υπάρχει ο αντίστροφος X^{-1} και

$$A = X\Lambda X^{-1} \quad (6)$$

Για μη-ιδιάζοντα X , η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως *αποσύνθεση ή παραγοντοποίηση ιδιοτιμών* του πίνακα A . Εφόσον υπάρχει, μας επιτρέπει να διερευνήσουμε τις ιδιότητες του A αναλύοντας τον διαγώνιο πίνακα Λ . Για παράδειγμα, οι δυνάμεις του πίνακα μπορούν να εκφραστούν ως δυνάμεις μονοτίμων μεγεθών (των ιδιοτιμών) ως ακολούθως:

$$A^p = X\Lambda^p X^{-1} \quad (7)$$

Εάν τα ιδιοδιανύσματα του A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε αυτή η αποσύνθεση δεν υπάρχει και οι δυνάμεις του A έχουν πιο σύνθετη συμπεριφορά.

Εάν T είναι οιοσδήποτε μη-ιδιάζων πίνακας, τότε το γινόμενο

$$B = T^{-1}AT \quad (8)$$

είναι γνωστό ως *μετασχηματισμός ομοιότητας* (*similarity transformation*) και οι A και B λέγεται ότι είναι *όμοιοι*. Εάν $Ax = \lambda x$ και $y = Tx$, τότε $By = \lambda y$. Με άλλα λόγια, ένας μετασχηματισμός ομοιότητας διατηρεί τις ιδιοτιμές αναλλοίωτες. Η αποσύνθεση ιδιοτιμών είναι μία προσπάθεια να ευρεθεί μετασχηματισμός ομοιότητας σε διαγώνια μορφή.

Οι εξισώσεις που ορίζουν τις ιδιάζουσες τιμές και διανύσματα είναι:

$$AV = U\Sigma \quad (9^a)$$

$$A^H U = V\Sigma^H \quad (9^b)$$

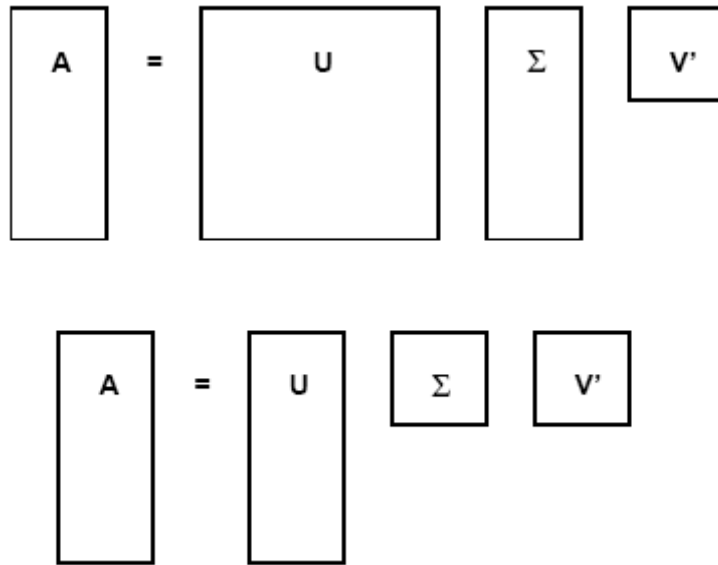
Εδώ Σ είναι ένας πίνακας του αυτού μεγέθους με τον A , τα στοιχεία του οποίου είναι παντού μηδέν εκτός από τη κύρια διαγώνιο. Αποδεικνύεται ότι τα ιδιάζοντα ανύσματα μπορούν πάντοτε να επιλεγούν ώστε να είναι *αμοιβαία ορθογώνια*, οπότε οι πίνακες U και V , των οποίων οι στήλες είναι κανονικοποιημένα ιδιάζοντα ανύσματα ικανοποιούν τις συνθήκες $U^H U = I$ and $V^H V = I$. Με άλλα λόγια, οι U και V are *ορθογώνιοι* εφόσον είναι πραγματικοί, ή *μοναδιαίοι* εφόσον είναι μιγαδικοί. Συνακολούθως,

$$A = U\Sigma V^H \quad (10)$$

Με Σ διαγώνιο και ορθογώνιους ή μοναδιακούς U και V . Η (10) είναι γνωστή ως *αποσύνθεση ή παραγοντοποίηση ιδιάζουσών τιμών* (*singular value decomposition*, ή *SVD*) του πίνακα A .

Σε όρους γραμμικής άλγεβρας, η αποσύνθεση ιδιοτιμών ισχύει όταν ένας $n \times n$ τετράγωνος πίνακας A αντιπροσωπεύει απεικόνιση ενός n -διάστατου χώρου επί του εαυτού του. Στη περίπτωση αυτή προσπαθούμε να βρούμε την *ανυσματική βάση* (δηλ. το σύστημα συντεταγμένων) του χώρου, στο οποίο ώστε ο πίνακας γίνεται διαγώνιος. Η βάση αυτή μπορεί να είναι μιγαδική ακόμη και αν ο A είναι πραγματικός. Εάν τα ιδιοδιανύσματα *δεν* είναι γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους, τότε ένας τέτοιος ανυσματικός χώρος *δεν υφίσταται* καν.

Η αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών ισχύει εάν ένα δυνητικά ορθογώνιος $m \times n$ πίνακας A αντιπροσωπεύει απεικόνιση ενός n -χώρου (n -διάστατου χώρου) επί ενός m -χώρου. Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να βρούμε μία αλλαγή ανυσματικής βάσης τέτοια, ώστε ο A να γίνεται διαγώνιος. Τέτοιες βάσεις υπάρχουν πάντοτε και είναι πάντα πραγματικές εάν ο A είναι πραγματικός. Οι πίνακες μετασχηματισμού είναι ορθογώνιοι ή μοναδιαίοι και πάντοτε διατηρούν τα μήκη και *δεν* μεγεθύνουν τα σφάλματα.



Εικόνα 3.1. Πλήρης και «οικονομική» SVD.

Εάν ο A είναι $m \times n$ με $m > n$, τότε στην πλήρη SVD, ο U είναι ένας μεγάλος τετράγωνος πίνακας $m \times m$, του οποίου οι τελευταίες $m - n$ στήλες είναι «πρόσθετες» με την έννοια ότι *δεν* απαιτούνται για την ανακατασκευή του A . Μία δεύτερη έκδοση της SVD που εξοικονομεί μνήμη όταν ο A είναι παραλληλόγραμμος, είναι γνωστή ως «SVD οικονομικού μεγέθους». Στην περίπτωση αυτή υπολογίζονται μόνο οι πρώτες n στήλες του U και οι πρώτες n γραμμές του Σ . Ο πίνακας V είναι πάντοτε $n \times n$ σ' αμφότερες τις περιπτώσεις. Η Εικόνα 3.1 δείχνει τις μορφές των σχετικών πινάκων στις δύο εκδόσεις, αμφότερες των οποίων μπορούν να γραφούν $A = U \Sigma V^H$, έστω και αν οι U and Σ της οικονομικής έκδοσης είναι υπο-πίνακες της πλήρους έκδοσης!

3.2 Ένα παράδειγμα

Παράδειγμα των αποσυνθέσεων ιδιοτιμών και ιδιαζουσών τιμών ενός μικρού τετράγωνου πίνακα δίδεται με ένα από τους δοκιμαστικούς πίνακες από την πινακοθήκη του MATLAB.

```
A = gallery(3)
```

Αυτός είναι

$$A = \begin{pmatrix} -149 & -50 & -154 \\ 537 & 180 & 546 \\ -27 & -9 & -25 \end{pmatrix}$$

και έχει κατασκευασθεί έτσι, ώστε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο να παραγοντοποιείται «όμορφα».

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές λοιπόν είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, και

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων μπορεί να κανονικοποιηθεί ώστε τα στοιχεία του να είναι όλα ακέραια:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -3 & 9 & -49 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Ο αντίστροφος του X επίσης έχει ακέραια στοιχεία:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 130 & 43 & 133 \\ 27 & 9 & 28 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες αυτοί δίδουν την αποσύνθεση ιδιοτιμών:

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

Η αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών δεν μπορεί να εκφρασθεί το ίδιο καλά με μικρούς ακεραίους. Οι ιδιάζουσες τιμές είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma^6 - 668737\sigma^4 + 4096316\sigma^2 - 36 = 0$$

η οποία δεν παραγοντοποιείται «όμορφα». Για τον λόγο αυτό καταφεύγουμε σε αριθμητική επίλυση:

$$[U, S, V] = \text{svd}(A)$$

η οποία δίδει

$$U = \begin{pmatrix} -0.2691 & -0.6798 & 0.6822 \\ 0.9620 & -0.1557 & 0.2243 \\ -0.0463 & 0.7167 & 0.6959 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 817.7597 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4750 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0030 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.6823 & -0.6671 & 0.2990 \\ 0.2287 & -0.1937 & -0.9540 \\ 0.6944 & 0.7193 & 0.0204 \end{pmatrix}$$

Η έκφραση U^*S^*V' ανακατασκευάζει τον αρχικό πίνακα A εντός των σφαλμάτων στρογγύλευσης.

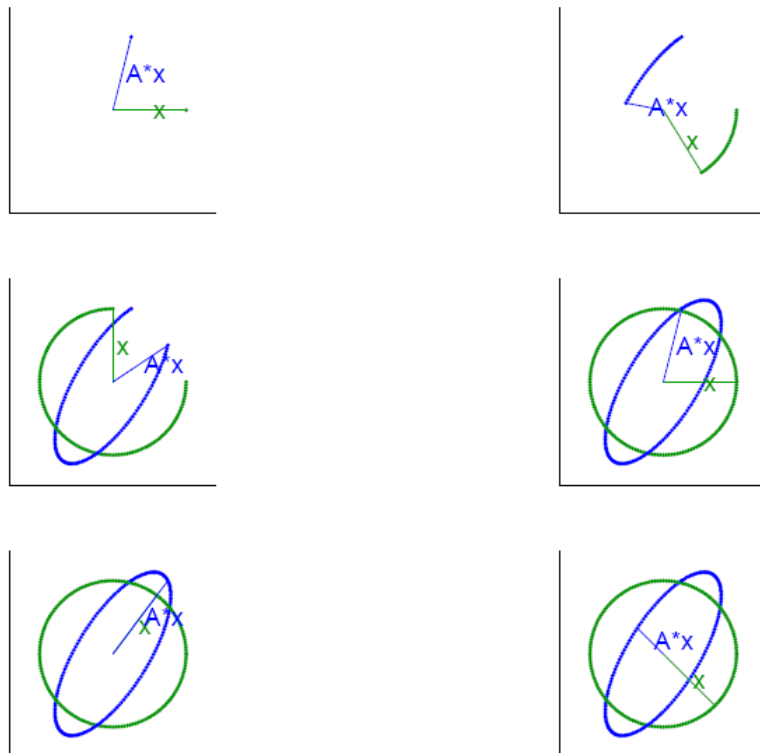
Για τον πίνακα `gallery(3)` υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των ιδιοτιμών 1, 2 και 3, και των ιδιζουσών τιμών, 817, 2.47, και 003. Αυτό οφείλεται – και θα διευκρινισθεί αργότερα – στο γεγονός ότι ο πίνακας του παραδείγματος πόρω απέχει από του να είναι συμμετρικός.

3.3. Το πρόγραμμα επίδειξης eigshow

Η συνάρτηση `eigshow` διατίθεται μαζί με το πακέτο προγραμμάτων επίδειξης του MATLAB. Μπορεί να εκτελεσθεί χωρίς ορίσματα και κατά βάση αποτελεί πρόγραμμα-οδηγό ενός GUI που βοηθά στην εξοικείωση με την παραγοντοποίηση ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων και ιδιζουσών τιμών – ιδιζόντων ανυσμάτων με ανάλυση πραγματικών 2×2 πινάκων. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να επιλεγθούν από το drop-down μενού την κορυφή του GUI. Ο προεπιλεγμένος πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Αρχικά, η `eigshow` εικονίζει το μοναδιαίο άνυσμα $x = [1, 0]^T$, καθώς και το άνυσμα Ax , το οποίο βασικά είναι η πρώτη στήλη του A . Το άνυσμα x εικονίζεται με πράσινο χρώμα και μπορεί να αλλάξει (περιστραφεί) γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο με την βοήθεια του ποντικιού. Η μεταβολή του x , προκαλεί αντίστοιχη μεταβολή του Ax η οποία εικονίζεται με μπλέ χρώμα. Τα τέσσερα πρώτα γραφήματα της Εικόνας 3.2 παριστάνουν ενδιάμεσα βήματα καθώς το x διαγράφει έναν πράσινο μοναδιαίο κύκλο. Το σχήμα της προκύπτουσας μπλέ τροχιάς Ax είναι ελλειπτικό, όπως επίσης διδάσκει ένα σημαντικό θεώρημα και καθόλου τετριμμένο θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Η `eigshow` παρέχει μία «γραφική απόδειξη» αυτού του θεωρήματος.

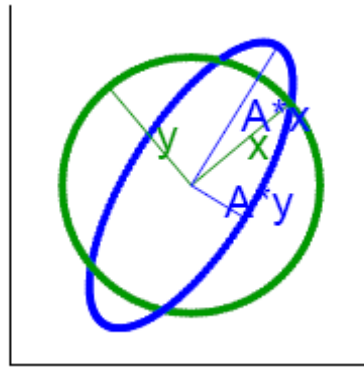


Εικόνα 3.2. Στιγμιότυπα από την εκτέλεση της `eigshow`.

Η eigshow προτρέπει: «*Make Ax parallel to x*». Εάν ακολουθήσετε την προτροπή θα διαπιστώσετε ότι στην διεύθυνση x στην οποία τα δύο άνυσματα γίνονται παράλληλα, ο τελεστής A δεν είναι παρά ένας πολλαπλασιαστικός παράγοντας λ . Με άλλα λόγια, το άνυσμα x καθίσταται ιδιοδιάνυσμα και το μήκος του Ax είναι η αντιστοιχούσα ιδιοτιμή.

Τα δύο τελευταία γραφήματα της Εικόνας 3.2 δείχνουν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του ανωτέρω πίνακα. Η πρώτη ιδιοτιμή είναι θετική, έτσι ώστε το γινόμενο Ax να είναι ομόρροπο του ιδιοδιανύσματος x . Το μήκος του Ax είναι η αντίστοιχη ιδιοτιμή, που στην προκειμένη περίπτωση είναι $5/4$. Η δεύτερη ιδιοτιμή είναι αρνητική, ώστε το Ax να είναι παράλληλο μεν, αντίρροπο δε του x . Το μήκος Ax είναι $1/2$ και η αντίστοιχη ιδιοτιμή $-1/2$.

Είναι αξιοσημείωτο ότι τα δύο ιδιοδιανύσματα δεν ταυτίζονται με τον μεγάλο και μικρό άξονα της έλλειψης. Αυτό θα συνέβαινε εάν ο πίνακας ήταν συμμετρικός. Ο προεπιλεγμένος ανωτέρω πίνακας A είναι σχεδόν συμμετρικός, αλλά όχι ακριβώς. Υπάρχουν επίσης πίνακες για τους οποίους δεν είναι δυνατόν να βρεθεί πραγματικό x τέτοιο ώστε Ax να είναι παράλληλο στο x .



Εικόνα 3.3. Η eigshow σε τύπο εκτέλεσης SVD.

Οι άξονες της έλλειψης έχουν μεγάλη σημασία στην περίπτωση της αποσύνθεσης ιδιαζουσών τιμών. Τα αποτελέσματα της eigshow, όταν εκτελείται σε επιλογή svd, φαίνονται στην Εικόνα 3.3. Εδώ επίσης το ποντίκι μπορεί να μεταβάλλει το άνυσμα x γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο, αλλά τώρα υπάρχει και ένα δεύτερο άνυσμα y που παρακολουθεί το x και παραμένει ορθογώνιο προς αυτό. Τα μήκη Ax και Ay διαγράφουν ελλείψεις αλλά συνήθως δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Όταν τα κάνετε ορθογώνια θα παρατηρήσετε ότι ταυτίζονται με τους άξονες την έλλειψης. Τα άνυσματα x και y είναι οι στήλες του U στην SVD, ενώ τα άνυσματα Ax και Ay είναι πολλαπλάσια των στηλών του V , και τα μήκη των αξόνων είναι οι ιδιάζουσες τιμές.

3.4. Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο

Έστω A ο 20×20 διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $1, 2, \dots, 20$ επί της διαγωνίου. Προφανώς, οι ιδιοτιμές του A είναι τα διαγώνια στοιχεία του. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμό του $\det(A - \lambda I)$, είναι

$$\begin{aligned} &\lambda^{20} - 210\lambda^{19} + 20615\lambda^{18} - 1256850\lambda^{17} + 53327946\lambda^{16} \\ &- 1672280820\lambda^{15} + 40171771630\lambda^{14} - 756111184500\lambda^{13} \\ &+ 11310276995381\lambda^{12} - 135585182899530\lambda^{11} \\ &+ 1307535010540395\lambda^{10} - 1014229986551145\lambda^9 \\ &+ 63030812099294896\lambda^8 - 31133364316139064\lambda^7 \\ &+ 1206647803780373360\lambda^6 - 3599979517947607200\lambda^5 \\ &+ 8037811822645051776\lambda^4 - 12870931245150988800\lambda^3 \end{aligned}$$

+13803759753640704000 λ^2 - 8752948036761600000 λ
 +2432902008176640000

Ο συντελεστής του $-\lambda^{19}$ είναι 210, αριθμός που αντιστοιχεί στο άθροισμα των ιδιοτιμών. Ο συντελεστής του όρου λ^0 είναι 20!, το οποίο αντιστοιχεί στο γινόμενο των ιδιοτιμών. Οι λοιποί συντελεστές είναι διάφορα αθροίσματα και γινόμενα των ιδιοτιμών.

Οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολωνύμου παρατέθηκαν σε όλη τους την μεγαλοπρέπεια, προκειμένου να καταστεί σαφές ότι εάν επιχειρηθούν με αυτούς αριθμητικοί υπολογισμοί κινητής υποδιαστολής, τι πιθανότερο είναι να προκληθούν σοβαρά σφάλματα στρογγύλευσης και/ή υπερχείλιση μνήμης (overflow). Η αναπαράστασή τους και μόνο ως αριθμών κινητής υποδιαστολής κατά το πρότυπο IEEE αλλάζει πέντε εξ αυτών: Για παράδειγμα, τα τρία τελευταία ψηφία του συντελεστή του λ^4 αλλάζουν από 776 σε 392. Με ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων, οι ρίζες του πολωνύμου που εξάγονται με αναπαράσταση των συντελεστών ως αριθμών κινητής υποδιαστολής είναι

```
1.0000000000000000
2.000000000000096
2.99999999986640
4.00000000495944
4.99999991473414
6.00000084571661
6.99999455544845
8.00002443256894
8.99992001186835
10.00019696490537
10.99962843024064
12.00054374363591
12.99938073455790
14.00054798867380
14.99962658217055
16.00019208303847
16.99992773461773
18.00001875170604
18.99999699774389
20.00000022354640
```

Βλέπουμε ότι αποθηκεύοντας και μόνο τους συντελεστές ως αριθμούς διπλής ακρίβειας αλλάζει τις υπολογιζόμενες τιμές ορισμένων ιδιοτιμών από το πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Τα χαρακτηριστικό πολυώνυμο δεν είναι ένας καλός τρόπος ανάλυσης των ιδιοτιμών του αντιστοιχούντος πίνακα!

3.5. Συμμετρικοί και Ερμιτιανοί Πίνακες.

Ένας πραγματικός πίνακας είναι συμμετρικός όταν είναι ίσος με τον ανάστροφό του, $A = A^T$. Ένας μιγαδικός πίνακας είναι συμμετρικός, όταν ισούται με τον μιγαδικό συζυγή ανάστροφό του, $A = A^H$. Οι ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικές. Επιπλέον, ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων μπορεί να επιλεγεί να είναι ορθογώνιος, οπότε εάν ο A είναι πραγματικός, και $A = A^T$, τότε η αποσύνθεση ιδιοτιμών του είναι

$$A = X\Lambda X^T \tag{11}$$

με $X^T X = I = X X^T$. Οι ιδιοτιμές ενός μιγαδικού Ερμιτιανού πίνακα είναι οπωσδήποτε πραγματικές, αν και τα ιδιοδιανύσματα οφείλουν να είναι μιγαδικά. Επιπλέον, τα ιδιοδιανύσματά του μπορεί να επιλεγούν να είναι μοναδιαία. Συνακολούθως, εάν ο A είναι μιγαδικός και $A = A^H$, τότε η αποσύνθεση ιδιοτιμών του είναι

$$A = X\Lambda X^H \tag{12}$$

με with Λ πραγματικό και $X^H X = I = X X^H$.

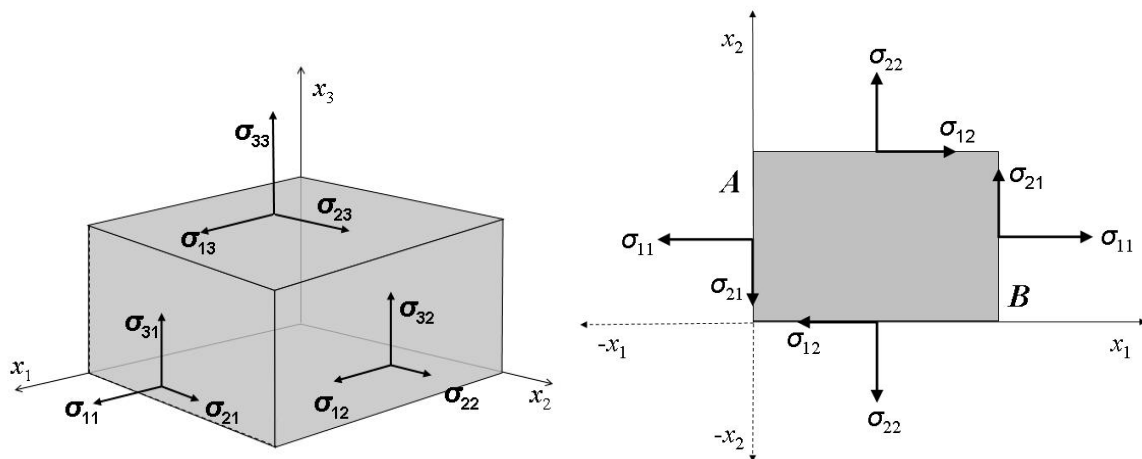
- Στους συμμετρικούς και Ερμιτιανούς πίνακες οι ιδιοτιμές και ιδιάζουσες τιμές είναι στενά συνδεδεμένες. Μία μη-μηδενική ιδιοτιμή $\lambda \geq 0$ είναι επίσης και ιδιάζουσα τιμή, $\sigma = \lambda$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και ιδιάζοντα ανύσματα είναι μεταξύ τους ίσα, $u = v = x$. Μία αρνητική ιδιοτιμή $\lambda < 0$, πρέπει να αντιστρέψει το πρόσημό της προκειμένου να γίνει ιδιάζουσα τιμή, $\sigma = |\lambda|$. Στην περίπτωση αυτή, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και ιδιάζοντα ανύσματα είναι $u = -v = x$.

3.6. Τανυστής τάσης, κύριες τάσεις και ελλειψοειδές τάσεων.

Η Εικόνα 3.2 (αριστερά) αναπαριστά ένα παραλληλεπίπεδο διαφορικό (απειροστικό) όγκο με πλευρά επιφάνειας δa . Υποθέτοντας ότι:

1. Οι τάσεις είναι ομογενείς σε όλο το υλικό που περιλαμβάνει τον θεωρούμενο διαφορικό όγκο·
2. Το υλικό ευρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας·
3. Δεν ασκούνται εσωτερικές δυνάμεις όπως η βαρύτητα επί της μάζας εντός του παραλληλεπίπεδου, και ροπές όπως εξωτερικό μαγνητικό πεδίο επί μαγνητικών διπόλων (π.χ. μαγνητικών ορυκτών)·

οι τάσεις (πιέσεις) σ_{ii} που εφαρμόζονται κατά την διεύθυνση x_i λόγω άσκησης δύναμης επί της επιφάνειας, και των οποίων οι κάθετες σ_{ij} κατά την διεύθυνση x_j οφείλονται σε δυνάμεις μέτρου $\sigma_{ij} \delta a$. Για λόγους καθαρότητας εικονίζονται μόνο οι τάσεις επί των προσθίων εδρών, ενώ οι τάσεις επί των ομολόγων τους οπισθίων εδρών θα έχουν αντίθετο πρόσημο όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2 (δεξιά). Για παράδειγμα, σ_{21} είναι η *διατμητική* τάση κατά την διεύθυνση x_2 που εφαρμόζεται επί της έδρας B . Εφόσον οι δυνάμεις είναι ομογενείς, η ομόλογος τάση που εφαρμόζεται από την πλευρά A προς το εξωτερικό του διαφορικού όγκου πρέπει να έχει το *αυτό* μέτρο. Για να διατηρηθεί στατική ισορροπία, η τάση που εφαρμόζεται από το εξωτερικό του διαφορικού όγκου επί της έδρας A πρέπει να έχει αντίθετη φορά (πρόσημο) κατά την διεύθυνση $-x_2$.



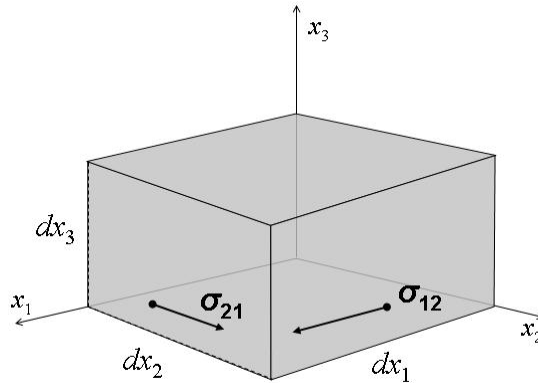
Εικόνα 3.2. *Αριστερά:* Παραλληλεπίπεδος διαφορικός όγκος με αναπαράσταση των κανονικών και διατμητικών τάσεων. *Δεξιά:* Αντιστροφή προσήμου στην περίπτωση ομογενών τάσεων.

Με βάση τα ανωτέρω, είναι δυνατόν να γίνουν αποσαφηνίσεις και να τεθούν περαιτέρω περιορισμοί στις ιδιότητες των σ_{ij} . Θεωρήσατε την καθαρή ροπή που ασκείται επί του παραλληλεπίπεδου των Σχημάτων 3.2 αριστερά και 3.3, γύρω από τον άξονα x_3 . Οι κανονικές τάσεις σ_{ii} δεν ασκούν ροπή. Οι διατμητικές τάσεις σ_{31} και σ_{32} επίσης δεν μπορούν να ασκήσουν ροπή γύρω από τον x_3 διότι δεν υπάρχει ο κατάλληλος βραχίονας. Οι διατμητικές τάσεις σ_{13} και σ_{23}

αντισταθμίζονται από ίσες και αντίθετες δυνάμεις πεί της κάτω έδρας του παραλληλεπιπέδου ($x_3=0$). Έτσι μένουν μόνο οι ροπές $\sigma_{21}(dx_2 \cdot dx_3) \cdot dx_1$ και $\sigma_{12}(dx_1 \cdot dx_3) \cdot dx_2$, οι οποίες πρέπει να αντισταθμίζονται για υπάρχει στατική ισορροπία. Τελικά:

$$\sigma_{21}(dx_2 \cdot dx_3) \cdot dx_1 = \sigma_{12}(dx_1 \cdot dx_3) \cdot dx_2 \Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12}.$$

Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα για την αντιστάθμιση ροπών γύρω από τους άξονες x_2 και x_1 τελικά διαπιστώνουμε ότι $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, δηλ. οι τάσεις είναι συμμετρικές. Η συμμετρία φυσικά αναφέρεται στο μέτρο των τάσεων και όχι στην φορά κατά την οποία ασκούνται και η οποία παριστάνεται με τον πρώτο δείκτη.



Εικόνα 3.3. Ομογενείς τάσεις – αντιστάθμιση ροπών.

Η προκύπτουσα διάταξη τάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί με μία μήτρα ως εξής:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Η μήτρα $\bar{\sigma}$ είναι *τανυστής*, αν και επί του παρόντος δεν θα επιχειρηθεί η απόδειξη του διατί.

Η αποσύνθεση ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων του τανυστή τάσης δίδεται από την εξίσωση (6):

$$\bar{\sigma} = R \cdot \Sigma \cdot R^{-1},$$

Οι ιδιοτιμές του τανυστή λαμβάνονται με επίλυση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0,$$

όπου οι συντελεστές I_1 , I_2 και I_3 είναι *αμετάβλητοι* κάτω από ισομετρικούς μετασχηματισμούς (βλ. κατωτέρω), δηλ. η τιμή τους είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων. Το φυσικό περιεχόμενο του τανυστή συμποσούται στις αμετάβλητες παραμέτρους του! Για παράδειγμα, η ολική τάση προς όλες τις διευθύνσεις, όπως στην περίπτωση της υδροστατικής ή λιθοστατικής πίεσης δίδεται από την αμετάβλητη I_1 . Οι τρεις αμετάβλητες του τανυστή τάσης είναι

$$I_1 = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

το *ίχνος* του τανυστή,

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

είναι η διακρίνουσα του τανυστή.

Οι τρεις λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου σ_1, σ_2 και σ_3 ονομάζονται *κύριες κανονικές τάσεις* και όπως θα συζητηθεί κατωτέρω, παριστούν τα μέτρα τριών ανυσμάτων. Τα συνημίτονα διεύθυνσης των τριών ανυσμάτων αντιστοίχως είναι οι τρεις στήλες τη μήτρας R . Οι διπλοί δείκτες των κυρίων κανονικών τάσεων συγχωνεύονται σε έναν, αφού κατά μήκος αυτών των ανυσμάτων οι διατμητικές τάσεις γίνονται εξ' ορισμού μηδενικές. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας:

$$(\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3) = 0$$

και οι αμετάβλητες του τανυστή γράφονται, συναρτήσσει των κυρίων κανονικών τάσεων με την μορφή:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

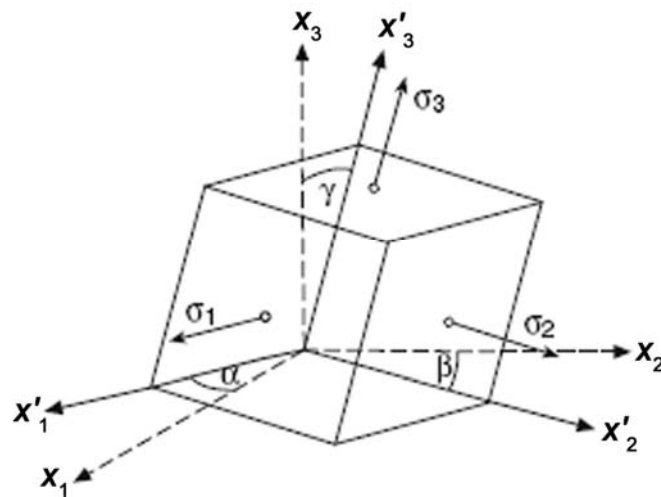
$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Μετά τον μετασχηματισμό ο τανυστής ανάγεται στην διαγώνιο μορφή

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

όπου οι κύριοι άξονες επιλέγονται έτσι ώστε να ισχύει $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



Εικόνα 3.4. Αναπαράσταση του τανυστή τάσης μετά την περιστροφή στο χαρακτηριστικό του σύστημα συντεταγμένων (x'_1, x'_2, x'_3)

Οι κύριες κανονικές τάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν σε τρεις διαστάσεις με περιστροφή του διαφορικού όγκου του Σχήματος 3.2. Στο Σχήμα 3.4, οι διευθύνσεις των κυρίων τάσεων (x'_1, x'_2, x'_3) έχουν περιστραφεί σε σχέση με το σύστημα αναφοράς (x, y, z) . Στο σύστημα αναφοράς απαιτούνται έξι συνιστώσες κανονικών και διατμητικών τάσεων (λαμβάνοντας υπ' όψη και την συμμετρία του τανυστή), προκειμένου να καθορισθεί η εντατική κατάσταση του υλικού. Στο σύστημα περιστρεφόμενο σύστημα (x'_1, x'_2, x'_3) απαιτούνται τρεις συνιστώσες κύ-

ριων κανονικών τάσεων ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) και τρεις διευθύνσεις των αξόνων των κύριων κανονικών τάσεων (α, β, γ), ήτοι συνολικά έξι στοιχεία πληροφορίας ώστε να είναι η αντιστοιχία $(x, y, z) \rightarrow (x'_1, x'_2, x'_3)$ αμφιμονοσήμαντη και τοπολογικά πλήρης. Οι κύριες κανονικές τάσεις εφαρμόζονται καθέτως προ τις έδρες του απειροστικού παραλληλεπίπεδου, οι οποίες είναι ελεύθερες διατμητικών τάσεων.

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στον αναλυτικό προσδιορισμό των ιδιοδιανυσμάτων του τανυστή τάσης, δηλ. του χαρακτηριστικού συστήματος συντεταγμένων. Μία μέθοδος που μπορεί άμεσα να εφαρμοσθεί για τον σκοπό αυτό είναι ο μετασχηματισμός ομοιότητας (εξίσωση 8) και, ειδικότερα, περιστροφές του συστήματος συντεταγμένων με τρόπο που να διατηρεί τα μήκη αναλλοίωτα (ισομετρικοί μετασχηματισμοί).

Χωρίς να υπεισέλθουμε σε πολλές λεπτομέρειες, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι μία περιστροφή τριδιάστατου συστήματος ορθοκανονικών συντεταγμένων κατά γωνία α γύρω από τον άξονα x_3 (που συνήθως $\equiv z$) μπορεί να γίνει με τον τελεστή

$$R_{x_3}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δεδομένου ότι ο R_{x_3} είναι ορθογώνιοι, οπότε ισχύει $R_{x_3}^T = R_{x_3}^{-1}$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η πράξη

$$A'(\alpha) = R_{x_3}^T(\alpha) \cdot A \cdot R_{x_3}(\alpha),$$

επιφέρει στροφή αντίθετη προς την φορά των δεικτών του ωρολογίου και διατηρεί τα μήκη αναλλοίωτα. Κατ' αντιστοιχία, περιστροφή τριδιάστατου συστήματος ορθοκανονικών συντεταγμένων κατά γωνία β γύρω από το άξονα x_2 (που συνήθως $\equiv y$) γίνεται με χρήση του τελεστή.

$$R_{x_2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

και αντίστοιχης πράξης.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η περιστροφή κάθε ανύσματος $(x \ y \ z)^T$ γύρω από τον άξονα z αφήνει τα μήκη x και y αναλλοίωτα.

Μία πλήρης περιστροφή τριδιάστατου ορθοκανονικού (τρισορθογώνιου) συστήματος συντεταγμένων γίνεται με τρεις πράξεις: γνωστές ως *περιστροφές Euler*:

- a) Οι άξονες (x_1, x_2, x_3) περιστρέφονται γύρω από άξονα x_3 κατά γωνία α , αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Το νέο σύστημα συντεταγμένων $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ είναι τέτοιο ώστε $x_3 \equiv \tilde{x}_3$.
- b) Οι άξονες $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ περιστρέφονται γύρω από άξονα \tilde{x}_2 κατά γωνία β , αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Τα νέο σύστημα (x_1, x_2, x_3) είναι τέτοιο ώστε $\tilde{x}_2 \equiv x_2$.
- c) Οι άξονες (x_1, x_2, x_3) περιστρέφονται γύρω από άξονα x_3 κατά γωνία γ , αντίστροφα προς την φορά των δεικτών του ωρολογίου. Το νέο σύστημα (x'_1, x'_2, x'_3) είναι τέτοιο ώστε $x'_3 \equiv x_3$.

Τρεις στροφές είναι απαραίτητες προκειμένου να ορισθεί πλήρως ένα νέο τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων σε σχέση με το τρισσορθογώνιο σύστημα αφοράς (τρεις παράμετροι). Οι τρεις περιστροφές εκτελούνται ταυτόχρονα μέσω του τελεστή

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_{x_3}(\alpha) \cdot R_{x_2}(\beta) \cdot R_{x_1}(\gamma),$$

και της πράξης

$$\bar{\sigma}(\alpha, \beta, \gamma) = R^T(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \bar{\sigma} \cdot R(\alpha, \beta, \gamma)$$

έως ότου

$$\bar{\sigma}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \Sigma,$$

δηλ. έως ότου ο τανυστής τάσης διαγωνιοποιηθεί. Τότε,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = R^T(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot R(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

και επειδή

$$R^T = R^{-1} \quad \therefore \quad R^T R = 1,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = R(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot R^T(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$$

Τελικά, τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή τάσης ταυτίζονται με τα τρία ανύσματα που ορίζουν οι στήλες του τελεστή περιστροφής $R(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Η περιστροφή του τανυστή καταλήγει σε αποσύνθεση ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων, όταν το σύστημα συντεταγμένων καταλήξει να καθορίζεται από τις γωνίες $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Στην προκειμένη περίπτωση, η αποσύνθεση ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων ταυτίζεται με την αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών (SVD) διότι ο τανυστής τάσης είναι τετράγωνος και συμμετρικός. Κατά την διάρκεια της περιστροφής τα ανύσματα που καθορίζονται από τις στήλες του $\bar{\sigma}(\alpha, \beta, \gamma)$ περιγράφουν γεωμετρικό τόπο πού όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί έχει μορφή ελλειψοειδούς, το οποίο είναι γνωστό ως *ελλειψοειδές τάσεων*. Οι κύριοι άξονες του ελλειψοειδούς τάσεων έχουν μέτρα σ_1, σ_2 και σ_3 .

3.7. Ανάλυση κυρίων συνιστωσών.

Η *ανάλυση κυρίων συνιστωσών* (*principal component analysis* ή *PCA*), ανακατασκευάζει ένα πίνακα από το άθροισμα «απλών» πινάκων, των συνιστωσών του. Με το όρο «απλός» εννοείται πίνακας βαθμού 1, του οποίου όλες οι γραμμές είναι πολλαπλάσια μίας εκάστης, και όλες οι στήλες πολλαπλάσια μίας εκάστης. Έστω A ένας πραγματικός $m \times n$ πίνακας. Η (οικονομική) αποσύνθεση ιδιαζουσών τιμών του

$$A = U \Sigma V^T$$

μπορεί να γραφτεί επίσης ως

$$A = E_1 + E_2 + \dots + E_p \tag{13}$$

όπου $p = \min(m, n)$. Οι συνιστώντες πίνακες E_k είναι εξωτερικά γινόμενα βαθμού 1 της μορφής

$$E_k = \sigma_k \cdot u_k \cdot v_k^T. \tag{14}$$

Εκάστη στήλη του E_k είναι πολλαπλάσιο του u_k , δηλ. της k -στης στήλης του U , και κάθε γραμμή του είναι πολλαπλάσιο του v_k^T , δηλ. του αναστρόφου της k -στης στήλης του V . Οι συνιστώσες πίνακες είναι ορθογώνιοι προς αλλήλους, κατά την έννοια

$$E_j E_k^T = 0, \quad j \neq k \quad (15)$$

Η νόρμα εκάστου συνιστώσας πίνακα είναι η αντίστοιχη ιδιάζουσα τιμή,

$$\|E_k\| = \sigma_k. \quad (16)$$

Κατά συνέπεια, η συμβολή εκάστου E_k στην σύνθεση του A καθορίζεται από το μέγεθος της ιδιάζουσας τιμής σ_k .

Εάν το άθροισμα (13) τερματισθεί μετά από $r < p$ όρους,

$$A_r = E_1 + E_2 + \dots + E_r,$$

Το αποτέλεσμα είναι μία r -βάθμια προσέγγιση του αρχικού πίνακα A , η οποία ταυτόχρονα είναι και η καλύτερη δυνατή r -βάθμια αναπαράσταση του A . Η απόκλιση αυτής της προσέγγισης αποδεικνύεται ότι είναι

$$\|A - A_r\| = \sigma_{r+1}$$

Επειδή οι ιδιάζουσες τιμές ταξινομούνται κατά κατ'όχιον μέγεθος η ακρίβεια της προσέγγισης αυξάνεται συναρτήσει του βαθμού της.

Η ανάλυση κυρίων συνιστωσών χρησιμοποιείται σε μεγάλο εύρος εφαρμογών, συμπεριλαμβανομένων της στατιστικής, γεωπεπιστημών και αρχαιολογίας. Ο κοινότερος ίσως τρόπος περιγραφής της, είναι με τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του εξωτερικού γινομένου $A^T A$. Δεδομένου ότι

$$A^T A V = V \Sigma^2,$$

οι στήλες του V είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A^T A$. Οι στήλες του U , πολλαπλασιασμένες επί τις ιδιάζουσες τιμές, μπορούν να ληφθούν από την

$$U \Sigma = A V.$$

Ο πίνακας δεδομένων A συχνά τυποποιείται αφαιρώντας από κάθε στήλη τον μέσο όρο της και διαιρώντας με την τυπική της απόκλιση. Εφόσον γίνει αυτό, το ανωτέρω εξωτερικό γινόμενο μετατρέπεται σε πίνακα συσχέτισης.

Η παραγοντική ανάλυση (*factor analysis*) είναι μία στενά σχετιζόμενη στατιστική μέθοδος, η οποία κάνει περαιτέρω παραδοχές για τα στοιχεία του A και τροποποιεί τα διαγώνια στοιχεία του $A^T A$ πριν υπολογίσει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα.

Για να δοθεί ένα απλό παράδειγμα ανάλυσης κυρίων συνιστωσών, έστω ότι μετράμε το ύψος και βάρος έξι ομοειδών αντικειμένων και λαμβάνουμε τα ακόλουθα δεδομένα, τα οποία στην Εικόνα 3.5 φαίνονται με κυανό χρώμα.

$$A = \begin{bmatrix} 47 & 15 \\ 93 & 35 \\ 53 & 15 \\ 45 & 10 \\ 67 & 27 \\ 42 & 10 \end{bmatrix}$$

Επειδή αναμένεται ότι το ύψος και το βάρος είναι θα άμεσα συσχετισμένα, υποψιαζόμαστε ότι ουσιαστικά θα υπάρχει μόνο μία πιστεύουμε ότι θα υπάρχει μόνο μία υποκείμενη συνιστώσα, την οποία θα αποκαλέσουμε «μέγεθος», με βάση τη οποία θα μπορούν να προβλεφθούν αμφοτέρω το ύψος και το βάρος. Η εντολή

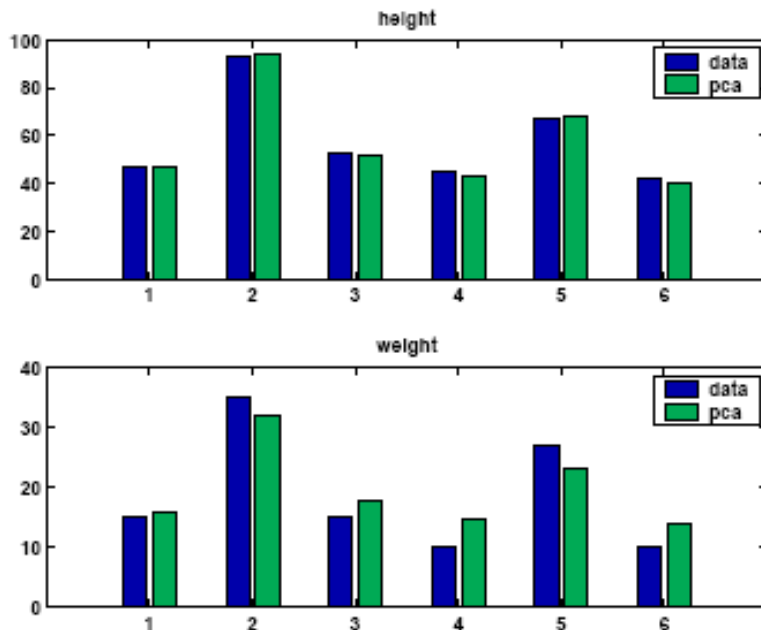
$$[U, S, V] = \text{svd}(A, 0)$$

```

sigma = diag(S)
παράγει
U = 0.3153    0.1056
    0.6349   -0.3656
    0.3516    0.3259
    0.2929    0.5722
    0.4611   -0.4562
    0.2748    0.4620

V = 0.9468  0.3219
    0.3219 -0.9468

sigma = 156.4358
       8.7658
    
```



Εικόνα 3.5. Παράδειγμα ανάλυσης κυρίων συνιστωσών.

Παρατηρούμε ότι η σ_1 είναι πολύ μεγαλύτερη από την σ_2 . Η πρωτοβάθμια προσέγγιση του A είναι

```

E1 = sigma(1)*U(:,1)*V(:,1)'
E1 = 46.7021 15.8762
     94.0315 31.9657
     52.0806 17.7046
     43.3857 14.7488
     68.2871 23.2139
     40.6964 13.8346
    
```

Με άλλα λόγια, η μία υποκείμενη κύρια συνιστώσα είναι

```

size = sigma(1)*U(:,1)
size = 49.3269
      99.3163
      55.0076
      45.8240
      72.1250
      42.9837
    
```

Οι δύο μετρηθείσες ποσότητες προσεγγίζονται αρκετά καλά ως

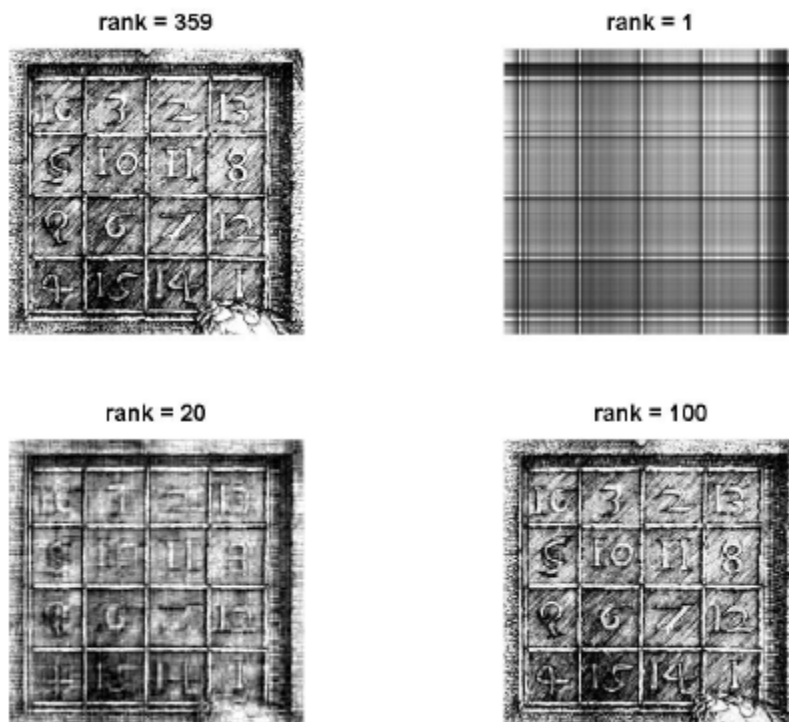
$$\text{height} \approx \text{size} * V(1,1)$$

`weight ≈ size*V(2,1)`
 και φαίνονται στην Εικόνα 3.2 με πράσινο χρώμα.

Ένα μεγαλύτερο παράδειγμα περιλαμβάνει ψηφιακή επεξεργασία εικόνας. Οι εντολές

```
load detail; subplot(2,2,1); image(X);
colormap(gray(64));
axis image; axis off;
r = rank(X);
title(['rank = ' int2str(r)]);
```

παράγουν το άνω αριστερά γράφημα της Εικόνας 3.6. Ο πίνακας X που φορτώνεται με την εντολή `load` έχει διαστάσεις 359×371 και αριθμητικά είναι πλήρους βαθμού. Τα στοιχεία του κυμαίνονται μεταξύ 1 και 64 και χρησιμεύουν ως δείκτες της τεφρής (γκρίζας) χρωματικής κλίμακας. Η Εικόνα 3.6 αποτελεί λεπτομέρεια του χαρακτηριστικού του Albrecht Durer «Μελαγχολία II» και δείχνει ένα 4×4 μαγικό τετράγωνο.



Εικόνα 3.6. Οι κύριες συνιστώσες του μαγικού τετραγώνου του Durer

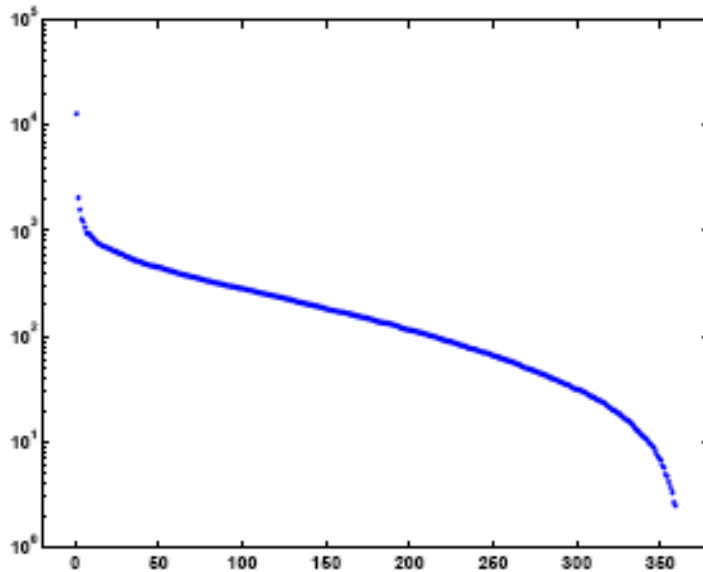
Οι εντολές

```
[U,S,V] = svd(X,0);
sigma = diag(S);
semilogy(sigma, '.')
```

παράγουν σε λογαριθμική κλίμακα, γράφημα των ιδιζουσών τιμών του X το οποίο φαίνεται στην Εικόνα 3.7. Είναι σαφές ότι οι ιδιζουσες τιμές ελαττώνονται ταχύτατα: υπάρχει μόνο μία μεγαλύτερη του 10^4 και μόνο έξι μεγαλύτερες του 10^3 .

Τα υπόλοιπα τρία γραφήματα στην Εικόνα 3.6 δείχνουν τα είδωλα που λαμβάνονται με προσεγγίσεις κυρίων συνιστωσών του X για βαθμούς $r = 1$, $r = 20$, και $r = 100$. Η πρωτοβάθμια προσέγγιση δείχνει ότι οι οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές προκύπτουν από ένα και μόνο εξωτερικό γινόμενο $E_1 = \sigma_1 \cdot u_1 \cdot v_1^T$. Αυτή η ορθογώνια διάταξη είναι περίπου τυπική των χαμηλόβαθμων προσεγγίσεων κυρίων συνιστωσών ψηφιακών εικόνων. Οι αριθμοί του μαγικού

τετραγώνου είναι αναγνωρίσιμοι στην προσέγγιση $r = 20$, ενώ δεν υπάρχουν ορατές διαφορές μεταξύ της εκατονταβάθμιας προσέγγισης και του πλήρους πίνακα.



Εικόνα 3.7. Οι ιδιάζουσες τιμές του μαγικού τετραγώνου από το χαρακτηριστικό του Durer.

Αν και οι χαμηλόβαθμες αναπαραστάσεις εικόνων απαιτούν μικρότερη αποθηκευτική μνήμη και χρόνους μετάδοσης από τις εικόνες πλήρους βαθμού, υπάρχουν αρκετά αποτελεσματικότερες μέθοδοι συμπίεσης εικόνων. Η κύρια χρήση της ανάλυσης κυρίων συνιστωσών στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας αφορά την αναγνώριση μορφών και χαρακτηριστικών.

3.8. Άσκηση

Η παρούσα άσκηση πραγματοποιείται τη αποσύνθεση/ ανασύνθεση ψηφιακών τοπογραφικών δεδομένων (Digital Elevation Model – DEM) και την μελέτη τους με Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών. Τα δεδομένα αφορούν Ανατολική Στερεά Ελλάδα, είναι προβεβλημένα στο σύστημα ΕΓΣΑ87 και είναι διαμορφωμένα σε πίνακα διαστάσεων 566×1036 με ανάλυση $100 \times 100m$, διατίθενται δε στο ASCII αρχείο `Cgt.dat`· μπορούν να εισαχθούν στο MATLAB με το πρόγραμμα

```
import_data
```

το οποίο επίσης υπολογίζει τους άξονες x (Easting) και y (Northing) και την SVD:

```
[u,s,v] = svd(c)
```

όπου c είναι ο πίνακας του DEM και s ο διαγώνιος πίνακας ιδιαζουσών τιμών.

Η ανάλυση πραγματοποιείται με το πρόγραμμα `toporca`. Κατ' αρχάς κατασκευάζεται γράφημα των ιδιαζουσών τιμών

```
figure(1)
set(gcf, 'Name', 'DEM SINGULAR VALUES')
semilogy(diag(s));
xlabel('Singular Value Order')
ylabel('Singular Values')
```


Κατόπιν επιλέγεται από τον χρήστη φάσμα ιδιαζουσών τιμών (IT) επί των οποίων εστιασθεί η ανάλυση κυρίων συνιστωσών. Η επιλογή γίνεται γραφικά επί του διαγράμματος της Εικόνα «DEM SINGULAR VALUES» με την εντολή `ginput`:

```
[no,ss] = ginput(2);  
s1 = min(ss);  
su = max(ss);
```

`s1` και `su` είναι το κάτω και άνω όρια του επιλεγμένου φάσματος IT αντίστοιχα. Στην συνέχεια μηδενίζονται οι επιλεγμένες IT (ανάγεται ο μετρικός χώρος του DEM), ανασυντίθεται αναπαράσταση του DEM στον ανηγμένο μετρικό χώρο και λαμβάνεται ο συμπληρωματικός του, ήτοι λαμβάνεται ανηγμένη αναπαράσταση του DEM που βασίζεται αποκλειστικά και μόνο στις επιλεγμένες IT· αυτή φυλάσσεται στην μεταβλητή `c1`. Κατά την διαδικασία αυτή διαφυλάσσεται ο αρχικός πίνακας IT, `c`.

```
s1=s;  
i0= s1>=s1 & s1<=su;  
s1(i0)=0;  
% Compute reduced SVD  
c1 =  $\psi - (u*s1*v')$ ;
```

Σε επόμενο στάδιο κατασκευάζεται φωτιζόμενη αναπαράσταση των αρχικού και ανηγμένου DEM. Η διαδικασία είναι ταυτόσημη και στις δύο περιπτώσεις και για τον λόγο αυτό παρουσιάζεται μόνο σε ότι αφορά το αρχικό DEM. Εφόσον διατίθεται το Mapping Toolbox©, κατασκευάζεται αυτόματα και *ad hoc* τοπογραφική χρωματική κλίμακα με χρήση της συνάρτησης `demcmap`.

```
figure(2)  
set(gcf, 'Name', 'DEM')  
if exist('demcmap', 'file')  
    cc = demcmap(c,128);  
else  
    cc = jet(128);  
end
```

Η επιφάνεια λαμβάνει το χειριστήριο `hc` και κατασκευάζεται

```
hc = surf(x,y,c);  
shading flat  
colormap(cc)
```

και κατασκευάζεται με λόγο αξόνων 1:1:1

```
daspect([1 1 1]);
```

πλήρη κάλυψη της δραστηκής επιφάνειας σχεδιασμού

```
axis tight
```

και θεώρηση από επάνω.

```
view(0,90)
```

Κατόπιν ρυθμίζονται οι παράμετροι απόδοσης του φωτισμού, έντασης φωτός,

```
set(hc, 'facelifting', 'phong', 'facecolor', 'interp', ...  
    'ambientstrength', 0.5)
```

και τύπου/ διεύθυνσης φωτισμού (παράλληλες ακτίνες από πηγή στο άπειρο).

```
lc=light('Style', 'infinite');  
lightangle(lc,80,75)
```

Τέλος, δημιουργούνται μενού για την ρύθμιση της διεύθυνσης και έντασης του φωτισμού πό τον χρήστη. Το βασικό μενού επιγράφεται «LIGHT»

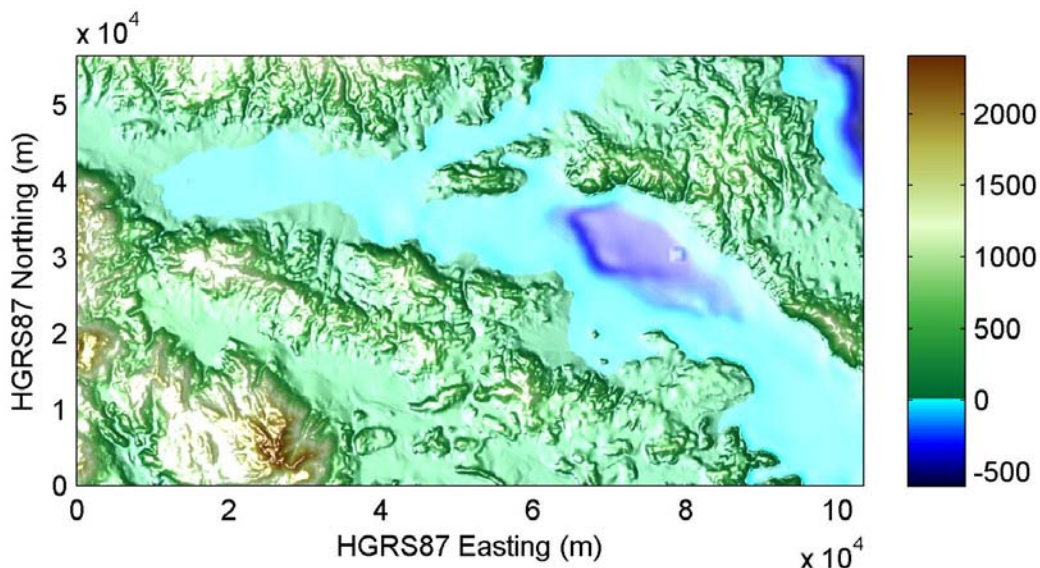
```
uimenu('label','LIGHT','tag','DEMlight1');
```

και περιλαμβάνει τα υπομενού «Source Position» και «Ambient Strength». Κάθε ένα από αυτά ορίζει μία *συνάρτηση επιστροφής (callback function)* η οποία εκτελείται μόλις γίνει η επιλογή. Για παράδειγμα, στο μενού «Source Position» η συνάρτηση επιστροφής καθορίζεται μέσω μίας μακράς αλφαριθμητικής σταθεράς:

```
['[azl,ell] = lightangle(lc); ' ...
 'prompt = {'Source Azimuth', 'Source Elevation'}; '...
 'defAns = {num2str(azl), num2str(ell)}; '...
 'answer = inputdlg(prompt,'Light Source Azimuth/ Eleva-
 tion',1,defAns);'...
 'if size(answer,1)==0, return, end; ' ...
 'azl = str2num(answer{1}); '...
 'ell = str2num(answer{2}); '...
 'lightangle(lc,azl,ell); '...
 'lightangle(l1,azl,ell); '...
 'clear prompt defAns answer azl ell']])
```

που από το MATLAB ερμηνεύεται με την σειρά εντολών:

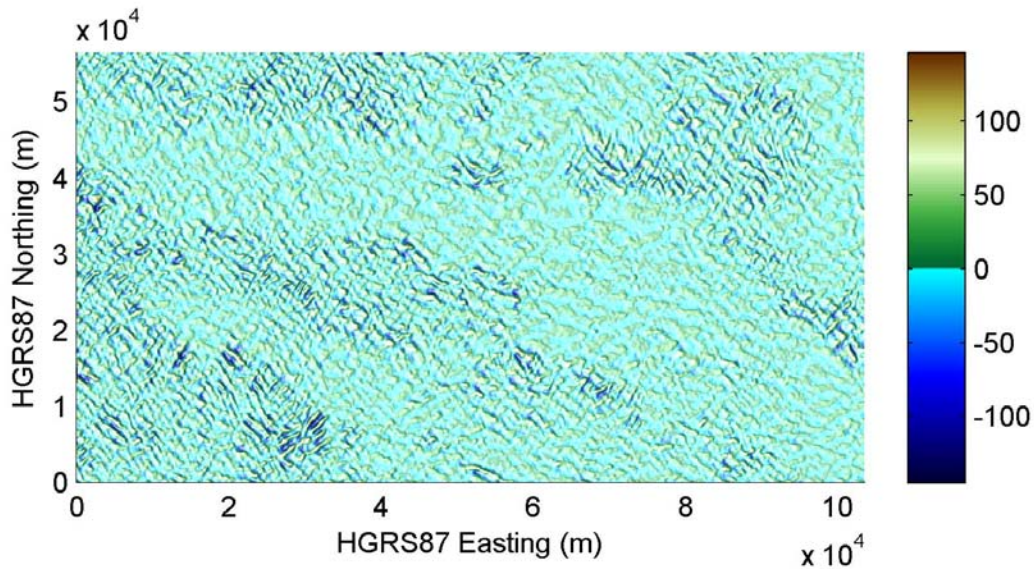
```
[azl,ell] = lightangle(lc);
prompt = {'Source Azimuth', 'Source Elevation'};
defAns = {num2str(azl), num2str(ell)};
answer = inputdlg(prompt,'Light Source Azimuth/ Elevation',1,defAns);
if size(answer,1)==0, return, end;
azl = str2num(answer{1});
ell = str2num(answer{2});
lightangle(lc,azl,ell);
lightangle(l1,azl,ell);
clear prompt defAns answer azl ell
```



Εικόνα 3.8. DEM της Ανατολικής Στερεάς Ελλάδος με ανάλυση 100×100m, φωτισμένο από την θέση (-70°, 75°) σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων 0°-Ανατολή, 90°-Βορράς, 90°-Άνω και με ένταση περιβάλλοντος φωτισμού 0.25.

Το DEM της Ανατολικής Στερεάς Ελλάδος παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.8 και το αποτέλεσμα της ανασύστασής του από κύριες συνιστώσες (ιδιάζουσες τιμές) μεγέθους $1000 \leq s \leq 4000$ παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.9. Δεδομένου του ελέγχου της τεκτονικής επί του αναγλύ-

φου της περιοχής μελέτης, οι γραμμώσεις που είναι εμφανείς στην Εικόνα 3.9 αποδίδονται σε τοπογραφικά ίχνη τεκτονικής δραστηριότητας (μορφοτεκτονικά στοιχεία).



Εικόνα 3.9. Το DEM της Εικόνας 3.8 ανασυσταθέν από τις κύριες συνιστώσες (ιδιάζουσες τιμές) $1000 \leq s \leq 4000$. Ο φωτισμός προέρχεται από την θέση $(-70^\circ, 75^\circ)$ σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων 0° -Ανατολή, 90° -Βορράς, 90° -Ανω και η ένταση του περιβάλλοντος φωτισμού είναι 0.05.

- ➔ Αποστολή σας είναι να πραγματοποιήσετε μία κατά το δυνατόν λεπτομερή ανάλυση και καταγραφή των μορφοτεκτονικών στοιχείων της Ανατολικής Στερεάς Ελλάδος με βάση την κλίμακα του τοπογραφικού τους ίχνους, επιλέγοντας διαφορετικά εύρη ιδιάζουσών τιμών με επαναληπτικές εκτελέσεις του προγράμματος *toporca* και κατάλληλες διευθύνσεις φωτισμού και έντασης φωτός. Στην άσκηση αυτή δεν υπάρχουν «κονσερβαρισμένες» απαντήσεις! Το πείραμα και η παρατήρηση οδηγεί σε καλύτερα ή χειρότερα αποτελέσματα. Όσο πληρέστερη και μεστότερη η εξαγόμενη πληροφορία, τόσο καλύτερο το αποτέλεσμα.
- ➔ Τι συμπεράσματα μπορείτε να εξάγετε συγκρίνοντας τα αποτελέσματά σας με τις υπάρχουσες γνώσεις σας για την τεκτονική της περιοχής;