

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

5.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω U και V δύο διανυσματικοί χώροι. Μια συνάρτηση

$$F : U \rightarrow V$$

θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση** (ή **ομομορφισμός**, ή απλά **μορφισμός**) εάν ικανοποιεί τις συνθήκες

- (i) $F(u + v) = F(u) + F(v)$ για κάθε $u, v \in U$
- (ii) $F(\lambda u) = \lambda F(u)$ για κάθε $\lambda \in R$ και $u \in U$.

Θα λέγαμε δηλαδή ότι μια γραμμική απεικόνιση «σέβεται» τις δύο πράξεις του διανυσματικού χώρου κατά το πέρασμα από τον U στον V .

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι για κάθε γραμμική απεικόνιση ισχύει

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Αρκεί να θέσουμε $\lambda = 0$ στην ιδιότητα (ii) του ορισμού και η σχέση προκύπτει αμέσως.

Εάν η γραμμική απεικόνιση $F : U \rightarrow V$ είναι «**1-1**» (ένα προς ένα), εάν δηλαδή έχει την ιδιότητα

$$\text{«αν } u \neq v \text{ τότε } F(u) \neq F(v)\text{»}$$

ή την ισοδύναμη της και πιο βολική σε εφαρμογές

$$\text{«αν } F(u) = F(v) \text{ τότε } u = v\text{»}$$

τότε ονομάζεται **μονομορφισμός**.

Εάν η γραμμική απεικόνιση $F : U \rightarrow V$ είναι «**επί**» εάν δηλαδή $F(U) = V$, ή με άλλα λόγια

$$\text{«για κάθε } v \in V, \text{ υπάρχει } u \in U \text{ τέτοιο ώστε } F(u) = v\text{»}$$

τότε ονομάζεται **επιμορφισμός**.

Τέλος αν η $F : U \rightarrow V$ είναι «**1-1**» και «**επί**» θα ονομάζεται **ισομορφισμός** καθώς υποδηλώνει ότι στην ουσία οι δύο υποχώροι έχουν την «ίδια μορφή». Στην περίπτωση αυτή οι δύο διανυσματικοί χώροι ονομάζονται **ισόμορφοι**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω $U = R^3$ και $V = M_{2 \times 2}$. Η απεικόνιση

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

είναι γραμμική καθώς για κάθε $\lambda \in R$, $u = (x, y, z) \in R^3$, $v = (x', y', z') \in R^3$, ισχύει

$$\begin{aligned} F(u+v) &= F(x+x', y+y', z+z') = \begin{pmatrix} x+x' & y+y' \\ y+y' & z+z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{pmatrix} = F(u) + F(v) \end{aligned}$$

και

$$F(\lambda u) = F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \lambda F(u)$$

Η F είναι μάλιστα μονομορφισμός διότι για $u = (x, y, z)$ και $v = (x', y', z')$ έχουμε

$$F(u) = F(v) \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{pmatrix} \Rightarrow \{x = x', y = y', z = z'\} \Rightarrow u = v$$

Η F δεν είναι επιμορφισμός καθώς για παράδειγμα αν $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$ δεν υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $F(u) = v$.

2) Έστω $U = P_n(x)$ και $V = P_{n-1}(x)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$D(p(x)) = p'(x)$$

που απεικονίζει κάθε πολυώνυμο βαθμού το πολύ n στην παράγωγό του, ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$. Η παραγωγήιση πολυωνύμων λοιπόν είναι γραμμική απεικόνιση καθώς για κάθε $\lambda \in R$, $p(x) \in P_n(x)$, $q(x) \in P_n(x)$ ισχύει

$$D(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = D(p(x)) + D(q(x))$$

και

$$D(\lambda p(x)) = (\lambda p(x))' = \lambda p'(x) = \lambda D(p(x))$$

Η D είναι επιμορφισμός καθώς για κάθε πολυώνυμο στο $V = P_{n-1}(x)$ υπάρχει πολυώνυμο του $U = P_n(x)$ που απεικονίζεται σ' αυτό (οποιαδήποτε αντιπαράγωγος).

Δεν είναι όμως μονομορφισμός διότι δύο πολυώνυμα του $U = P_n(x)$ που διαφέρουν κατά μια σταθερά, αν και διαφορετικά μεταξύ τους έχουν την ίδια εικόνα.

5.2 Ο ΠΥΡΗΝΑΣ ΚΑΙ Η ΕΙΚΟΝΑ ΜΙΑΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Έστω $F : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων. Θα ορίσουμε δύο ιδιαίτερους υποχώρους, έναν του U και έναν του V , που σχετίζονται με την απεικόνιση αυτή.

Το σύνολο των στοιχείων του U που απεικονίζονται στο $\mathbf{0} \in V$ λέγεται **πυρήνας** της F και συμβολίζεται $\ker F$. Δηλαδή,

$$\ker F = \{u \in U \mid F(u) = \mathbf{0}\}$$

Το σύνολο των στοιχείων του V που περιέχει μόνο τις εικόνες της F ονομάζεται **εικόνα** της F και συμβολίζεται $\operatorname{Im} F$. Δηλαδή,

$$\operatorname{Im} F = \{v \in V \mid v = F(u) \text{ για κάποιο } u \in U\}$$

Εύκολα δείχνεται ότι τα σύνολα $\ker F$ και $\operatorname{Im} F$ είναι διανυσματικοί υποχώροι των U και V αντίστοιχα. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Έχουμε παρατηρήσει ήδη ότι ο πυρήνας $\ker F$ περιέχει πάντοτε το μηδενικό διάνυσμα. Αξίζει να σημειωθεί τι συμβαίνει όταν περιέχει μόνο αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ: $\ker F = \{\mathbf{0}\}$ αν και μόνο αν η F είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη: Έστω $\ker F = \{\mathbf{0}\}$. Τότε

$$\begin{aligned} F(u) = F(v) &\Rightarrow F(u) - F(v) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow F(u - v) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow (u - v) \in \ker F \\ &\Rightarrow u - v = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow u = v \end{aligned}$$

Άρα η F είναι «1-1».

Αντίστροφα, έστω ότι η F είναι μονομορφισμός. Αν $u \in \ker F$, τότε

$$F(u) = \mathbf{0} = F(\mathbf{0})$$

και επειδή η F είναι «1-1» ισχύει $u = \mathbf{0}$. Συνεπώς $\ker F = \{\mathbf{0}\}$. ■

Για την εικόνα μιας γραμμικής απεικόνισης ισχύει το εξής

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $F : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση. Εάν $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ τότε $\text{Im } F = \langle F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n) \rangle$

Απόδειξη: Έστω $v \in \text{Im } F$. Τότε υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $F(u) = v$. Εφόσον όμως $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$ ισχύει

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$. Συνεπώς

$$v = F(u) = F(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 F(u_1) + \lambda_2 F(u_2) + \dots + \lambda_n F(u_n)$$

που σημαίνει ότι ο $\text{Im } F$ παράγεται από τα διανύσματα $F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n)$. ■

Τέλος, παρουσιάζουμε μια θεμελιώδη σχέση που συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων που αναφέραμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $F : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\dim U \in R$ (δηλαδή ο διανυσματικός χώρος U έχει πεπερασμένη διάσταση). Τότε ισχύει

$$\dim U = \dim(\ker F) + \dim(\text{Im } F)$$

Απόδειξη: Έστω $\dim U = n$, $\dim(\ker F) = k$ και $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ μια βάση του $\text{Ker } F$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\dim(\text{Im } F) = n - k$. Επεκτείνουμε τη βάση του $\text{Ker } F$ σε μια βάση του U :

$$\{u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}.$$

Τότε από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει

$$\text{Im } F = \langle F(u_1), F(u_2), \dots, F(u_n) \rangle$$

Όμως

$$F(u_1) = F(u_2) = \dots = F(u_k) = \mathbf{0}$$

οπότε

$$\text{Im } F = \langle F(u_{k+1}), \dots, F(u_n) \rangle$$

Μένει να δείξουμε ότι τα τελευταία $n-k$ διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε θα αποτελούν βάση του $\text{Im } F$.

Έστω $\lambda_{k+1} F(u_{k+1}) + \dots + \lambda_n F(u_n) = \mathbf{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} & F(\lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n \in \ker F \\ \Rightarrow & \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k \quad \text{για κάποια } \mu_1, \dots, \mu_k \in R \\ \Rightarrow & \mu_1 u_1 + \dots + \mu_k u_k - \lambda_{k+1} u_{k+1} - \dots - \lambda_n u_n = \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \mu_1 = \dots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

όπως επιθυμούσαμε να δείξουμε. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θεωρούμε και πάλι τη γραμμική απεικόνιση $F : R^3 \rightarrow M_{2 \times 2}$ με

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$u = (x, y, z) \in \ker F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \{x=0, y=0, z=0\} \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$$

Άρα $\ker F = \{\mathbf{0}\}$, κάτι που περιμέναμε άλλωστε εφόσον, όπως είδαμε παραπάνω, η F είναι μονομορφισμός.

Προφανώς

$$\operatorname{Im} F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\dim U = 3, \quad \dim(\ker F) = 0, \quad \dim(\operatorname{Im} F) = 3$$

που επαληθεύουν τη θεμελιώδη σχέση.

2) Για τη γραμμική απεικόνιση $D : P_n(x) \rightarrow P_{n-1}(x)$ με

$$D(p(x)) = p'(x)$$

που είδαμε παραπάνω

$$p(x) \in \ker D \Leftrightarrow p'(x) = \mathbf{0} \Leftrightarrow p(x) = c \text{ για κάποιο } c \in R$$

Άρα ο πυρήνας $\ker D$ περιέχει όλα τα σταθερά πολυώνυμα.

Επίσης, $\operatorname{Im} D = P_{n-1}(x)$ διότι η D είναι επιμορφισμός.

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\dim P_n(x) = n+1, \quad \dim(\ker D) = 1, \quad \dim(\operatorname{Im} D) = \dim P_{n-1}(x) = n$$

που επαληθεύουν τη θεμελιώδη σχέση.

3) Έστω $F : U \rightarrow V$ μια γραμμική απεικόνιση και $\dim U = \dim V \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση

$$\dim U = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{Im} F)$$

προκύπτει

$$\begin{array}{lll} F \text{ μονομορφισμός} & \Leftrightarrow & \ker F = \{\mathbf{0}\} \\ & \Leftrightarrow & \dim(\ker F) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \dim(\operatorname{Im} F) = \dim U \\ & \Leftrightarrow & \dim(\operatorname{Im} F) = \dim V \\ & \Leftrightarrow & \operatorname{Im} F = V \quad [\operatorname{Im} F \text{ υποχώρος του } V] \\ & \Leftrightarrow & F \text{ επιμορφισμός} \end{array}$$

Συνεπώς, για να δείξουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός αρκεί να δείξουμε ότι είναι είτε μονομορφισμός είτε επιμορφισμός.
