ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα $A = (a_{ij})$ τάξης n θα αντιστοιχίσουμε έναν πραγματικό αριθμό[1], τον οποίο θα ονομάσουμε ***ορίζουσα*** του πίνακα. Η ορίζουσα θα συμβολίζεται $\det A$ ή $|A|$ ή

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Αρχικά η ορίζουσα εμφανίζεται στη μελέτη συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, αλλά η χρησιμότητά της επεκτείνεται και σε πολλές άλλες εφαρμογές, όχι μόνο της Άλγεβρας, άλλα και άλλων κλάδων των Μαθηματικών, όπως η Μαθηματική Ανάλυση, η Αναλυτική Γεωμετρία κ.α.

Θα ορίσουμε πρώτα τις ορίζουσες 1ης, 2ης και 3ης τάξης και στη συνέχεια τις ορίζουσες οποιασδήποτε τάξης.

Αν θεωρήσουμε το σύστημα $AX = B$, όπως το περιγράψαμε στην παράγραφο 1.5, θα δούμε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

- Ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος
- $\det A \neq 0$
- Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση

2.2 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ 1ης ΚΑΙ 2ης ΤΑΞΗΣ

Η περίπτωση 1ης *τάξης* είναι τετριμμένη. Αν $A = (a)$ τότε $\det A = a$.

Εάν ο A είναι ένα πίνακας 2x2, με

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

τότε η ορίζουσα $\det A$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

[1] Εφόσον τα στοιχεία του πίνακα ανήκουν στο R

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Προφανώς $\det(5)=5$, $\det(-7)=-7$. Επίσης,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6=-2 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot 9-(-6)(-3)=18-18=0$$

Η επόμενη πρόταση συνδέει τον αντίστροφο ενός πίνακα 2x2 με την ορίζουσά του.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\det A \neq 0$. Τότε ο αντίστροφος του Α είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Έστω ότι ο Α είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε

$$AA^{-1}=I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bw=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+dw=1 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Έστω ότι $c \neq 0$. Η τρίτη εξίσωση δίνει $x=-\frac{d}{c}z$ και η πρώτη γίνεται $(-\frac{ad}{c}+b)z=1$ ή ισοδύναμα $(ad-bc)z=-c$. Συνεπώς, $\det A = ad-bc\neq 0$.

Έστω $c=0$. Η τέταρτη εξίσωση δίνει $d\neq 0$, η τρίτη $z=0$ και η πρώτη $a\neq 0$. Άρα και πάλι $\det A = ad-bc = ad \neq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $D=\det A\neq 0$. Τότε για τον πίνακα

$$B=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$AB=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix}=\frac{1}{D}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}=I$$

καθώς επίσης (με όμοιο τρόπο) και ότι $BA = I$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.3 ΣΥΣΤΗΜΑ CRAMER 2×2

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Οι παρακάτω ορίζουσες θα μας φανούν χρήσιμες

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(Προσέξτε ότι οι D_x, D_y λαμβάνονται από την D αντικαθιστώντας την αντίστοιχη στήλη με τους σταθερούς όρους).

Είναι $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $D_x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, $D_y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

Τώρα, αν θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

το σύστημα γράφεται

$$AX = B.$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με A^{-1} από αριστερά και έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Σύμφωνα με το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου είναι $D = \det A \neq 0$ και η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ: Όταν η ορίζουσα του συστήματος (2.2) είναι $D \neq 0$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad \blacksquare$$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα λέγεται σύστημα Cramer. Θα δούμε παρακάτω ότι ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για οποιοδήποτε σύστημα $n \times n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 12 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned}$$

Επειδή $D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ και $D_x = \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -56$, $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-56}{-14} = 4, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-14} = 0$$

2) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)x + 7(\lambda - 3)y &= 35 \\ x + (\lambda - 3)y &= \lambda \end{aligned}$$

Είναι

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 7(\lambda - 3) \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3) - 7(\lambda - 3) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq 5$, τότε $D \neq 0$ και έχουμε σύστημα Cramer.

Έχουμε

$$D_x = \begin{vmatrix} 35 & 7(\lambda-3) \\ \lambda & \lambda-3 \end{vmatrix} = 35(\lambda-3) - 7\lambda(\lambda-3) = 7(\lambda-3)(5-\lambda) = -7(\lambda-3)(\lambda-5)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 35 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\lambda - 35 = \lambda^2 + 2\lambda - 35 = (\lambda+7)(\lambda-5)$$

και το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = -7\,, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda+7}{\lambda-3}$$

- Αν $\lambda = 3$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 5x + 0y &= 35 \\ x + 0y &= 3 \end{aligned}$$

και προφανώς είναι αδύνατο.

- Αν $\lambda = 5$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 7x + 14y &= 35 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

Οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες, οπότε παίρνουμε τις άπειρες λύσεις

$$(x, y) = (5-2y, y)\,, \quad \text{όπου } y \in R$$

2.4 ΟΡΙΖΟΥΣΑ 3ης ΤΑΞΗΣ

Η ορίζουσα 3ης τάξης ορίζεται ως εξής

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Για να προλάβουμε οποιαδήποτε δυσάρεστη έκπληξη να πούμε ότι δεν χρειάζεται απομνημόνευση του τύπου αυτού διότι πρακτικά ο υπολογισμός γίνεται πιο εύκολα.

Ειδικά για την ορίζουσα 3ης τάξης υπάρχει ένας πρακτικός κανόνας, γνωστός ως κανόνας του Sarrus. Γράφουμε ξανά τις δύο πρώτες στήλες δίπλα στην ορίζουσα και υπολογίζουμε τα έξι γινόμενα του ορισμού σύμφωνα με το σχήμα

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array} \qquad \begin{array}{l} -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ \\ \\ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Με τον κανόνα του Sarrus έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$D = 1\cdot 5\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 0\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot 2 = 20 + 6 - 45 - 2 = -21$$

Ή ορίζουσα τάξης 3 μπορεί να υπολογιστεί και με τη βοήθεια της ορίζουσας τάξης 2.

Συμβολίζουμε με A_{ij} την ορίζουσα τάξης 2 που προκύπτει αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη. Η ορίζουσα αυτή λέγεται *ελάσσων ορίζουσα* του στοιχείου a_{ij}. Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Αρκεί να κάνουμε τις πράξεις στο 2^{o} μέλος:

$$a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = D$$

Ο υπολογισμός αυτός λέγεται ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής. Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε και με αναπτύγματα κατά της στοιχεία των άλλων γραμμών. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= -a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} - a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}\,. \end{aligned}$$

Τέλος, το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε και με αναπτύγματα κατά τα στοιχεία στηλών. Έτσι,

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ &= -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32} \\ &= a_{13}A_{13} - a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Θα υπολογίσουμε πάλι την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Με ανάπτυγμα της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής έχουμε

$$D = 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 2(-3) + 3(-15) = -21$$

όπως είχαμε βρει και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Συμφέρει ωστόσο να υπολογίσουμε την ορίζουσα με το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης διότι εκεί υπάρχει στοιχείο 0:

$$D = 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 3(-13) = -21$$

2) Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 3 \\ x & 5 & -71 \\ -20 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

Συμφέρει να την υπολογίσουμε κατά τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης:

$$D = -0 + 5\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -20 & 14 \end{vmatrix} - 0 = 5(140 + 60) = 1000$$

3) Η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα υπολογίζεται εύκολα. Πολλαπλασιάζουμε απλώς τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου. Πράγματι,

$$D = \begin{vmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & e \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Έτσι π.χ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 75 & \sqrt{2} \\ 0 & -3 & -83 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$$

Προφανώς το ίδιο ισχύει και για έναν κάτω τριγωνικό πίνακα.

2.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ο υπολογισμός μιας ορίζουσας μπορεί να γίνει ακόμη πιο εύκολος αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα τις παρακάτω ιδιότητες των οριζουσών

1. $\det A = \det A^T$

Δηλαδή η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται αν οι γραμμές γίνουν στήλες. Αυτό είναι φανερό εφόσον το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας είτε ως προς μια γραμμή είτε ως προς μια στήλη δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

2. Αν εναλλάξουμε δυο γραμμές (ή δυο στήλες), η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.

Π.χ. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Δείχνεται εύκολα με πράξεις

3. Αν δύο γραμμές (ή δυο στήλες) είναι ίδιες η ορίζουσα είναι 0.

Πράγματι, εάν εναλλάξουμε τις ίδιες γραμμές (ή στήλες) παίρνουμε την ίδια ορίζουσα οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

4. Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) με τον αριθμό *λ,* τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με το λ.

Π.χ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\lambda a_{12}A_{12} + \lambda a_{22}A_{22} - \lambda a_{32}A_{32}$$

$$= \lambda(-a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32})$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Έτσι λοιπόν, κατά τον υπολογισμό μιας ορίζουσας, μπορούμε να βγάζουμε κοινό παράγοντα από μια γραμμή ή μια στήλη.

5. Αν μια γραμμή (ή μια στήλη) είναι πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) τότε η ορίζουσα είναι 0.

Προκύπτει από τον συνδυασμό των ιδιοτήτων 3 και 4.

Π.χ. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda 0 = 0$$

6. Αν κάθε στοιχείο μιας γραμμής (ή στήλης) είναι άθροισμα δύο αριθμών τότε η ορίζουσα ανάγεται σε άθροισμα δύο οριζουσών ως εξής

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Δείχνεται εύκολα με πράξεις

7. Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή (η μια στήλη) το πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) η ορίζουσα παραμένει ίδια.

Π.χ. $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+\lambda a_1 & b_2+\lambda a_2 & b_3+\lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda\alpha_1 & \lambda\alpha_2 & \lambda\alpha_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά για να μηδενίζουμε στοιχεία σε μια γραμμή ή μια στήλη ώστε το αντίστοιχο ανάπτυγμα να γίνεται πιο απλό. Μπορούμε ακόμη να φέρουμε την ορίζουσα σε (άνω ή κάτω) τριγωνική μορφή ώστε να πάρουμε αμέσως το αποτέλεσμα, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3 της προηγούμενης παραγράφου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Αφαιρούμε την $1^η$ στήλη από τις άλλες δύο (ιδιότητα 7)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 2 & 3-2 & 4-2 \\ 5 & 2-5 & 7-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

και τώρα παίρνουμε το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της $1^{ης}$ γραμμής

$$D_1 = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$$

2) $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 15x \\ 1 & 1 & 6x \\ 1 & 2 & 9x \end{vmatrix} = 3x\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [κοινό παράγοντα από την $3^η$ στήλη]

$= 3x\begin{vmatrix} 2+3 & 3 & 5 \\ 1+1 & 1 & 2 \\ 1+2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [προσθέσαμε τη $2^η$ στήλη στην $1^η$]

$= 3x\begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 0$ [δυο στήλες ίδιες]

3) $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & a \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ [προσθέσαμε $2^η$ και $3^η$ στήλη στην $1^η$]

$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ [κοινό παράγοντα από την $1^η$ στήλη]

$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}$ [αφαιρέσαμε $1^η$ γραμμή από $2^η$ & $3^η$]

$= (a+2)(a-1)(1-a)$ [άνω τριγωνική μορφή]

$= -(a+2)(a-1)^2$

2.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΙΝΑΚΑ 3×3

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Συμβολίζουμε με A_{ij} την ελάσσονα ορίζουσα $2^{ης}$ τάξης που προκύπτει αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη του πίνακα *A*.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $D = \det A \neq 0$, τότε ο πίνακας *A* είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας[2]

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix}$$

Απόδειξη: Έστω

$$B = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix}$$

Τότε

$$AB = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix}$$

Στην κύρια διαγώνιο του γινομένου των δύο πινάκων θα πάρουμε αναπτύγματα της ορίζουσας *D*. Σε κάθε άλλη θέση θα πάρουμε 0. Ουσιαστικά θα πάρουμε τα ίδια αναπτύγματα, όπου όμως θα έχει αντικατασταθεί μια γραμμή της *D* με μια άλλη γραμμή: π.χ. το γινόμενο της $1^{ης}$ γραμμής με τη $2^{η}$ στήλη δίνει

$$-a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} - a_{13}A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(πήραμε το ανάπτυγμα ως προς την $2^{η}$ γραμμή).

---

[2] Προσέξτε ότι οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων μιας <u>γραμμής</u> μπαίνουν στην αντίστοιχη <u>στήλη</u>.

Άρα,

$$AB = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} = I$$

Όμοια παίρνουμε και $BA = I$, οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα. ■

<u>Σημείωση:</u> Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος, οπότε ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο κεφάλαιο 1 (παράγραφος 1.9) υπολογίσαμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

και βρήκαμε

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε πάλι τον αντίστροφο με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος. Βρίσκουμε πρώτα την ορίζουσα του πίνακα

$$\det A = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11 + 12 = 1$$

και στη συνέχεια τις ελάσσονες ορίζουσες

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -11 & A_{12} = 4 & A_{13} = 6 \\ A_{21} = -2 & A_{22} = 0 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = 2 & A_{32} = -1 & A_{33} = -1 \end{array}$$

Επομένως,

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} +A_{11} & -A_{21} & +A_{31} \\ -A_{12} & +A_{22} & -A_{32} \\ +A_{13} & -A_{23} & +A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} +(-11) & -(-2) & +(2) \\ -(4) & +(0) & -(-1) \\ +(6) & -(1) & +(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

όπως αναμέναμε.

Σημείωση: Όπως βλέπουμε, ο υπολογισμός με τον τρόπο αυτό είναι πιο επίπονος. Πρακτικά χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του κεφαλαίου 1. Ωστόσο το αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου έχει μεγάλη θεωρητική αξία.

2.7 ΣΥΣΤΗΜΑ CRAMER 3×3

Έστω το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Όπως στην περίπτωση του συστήματος 2x2 (παράγραφος 2.3), έτσι κι εδώ θέτουμε

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ενώ

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Τότε,

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Όταν η ορίζουσα του συστήματος είναι $D \neq 0$, το σύστημα λέγεται σύστημα Cramer και έχει τη μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$ ■

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της παραγράφου 2.3.

Σημείωση: Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος, δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$. Συνεπώς, όταν $D = 0$, το σύστημα είτε είναι αδύνατο είτε έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή το λύνουμε με κάποιον από τους γνωστούς τρόπους (με επαυξημένο πίνακα, με αντικατάσταση, κλπ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στην παράγραφο 1.6 λύσαμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 5x + 11y - 21z &= -22 \\ x + 2y - 4z &= -4 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

και βρήκαμε $(x, y, z) = (2,-1,1)$. Εδώ θα το λύσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών.

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 11 & -21 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

Πρόκειται λοιπόν για σύστημα Cramer. Έχουμε επίσης

$$D_x = \begin{vmatrix} -22 & 11 & -21 \\ -4 & 2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -22 & -21 \\ 1 & -4 & -4 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 11 & -22 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = -7$$

άρα

$$x = \frac{D_x}{D} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1 \quad z = \frac{D_z}{D} = 1$$

όπως αναμέναμε.

2.8 ΟΡΙΖΟΥΣΑ ΤΑΞΗΣ *n*

Στην παράγραφο 2.4 υπολογίσαμε την ορίζουσα $3^{ης}$ τάξης με την βοήθεια οριζουσών $2^{ης}$ τάξης, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα ως προς κάποια γραμμή ή κάποια στήλη. Μπορούμε να επεκτείνουμε επαγωγικά τον ορισμό της ορίζουσας για τετραγωνικούς πίνακες οποιασδήποτε τάξης *n*. Ορίζουμε λοιπόν

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n}A_{1n}$$

όπου με A_{ij} συμβολίζουμε την ελάσσονα ορίζουσα τάξης n-1 που προκύπτει αν διαγράψουμε την i-γραμμή και την j-στήλη.

Αποδεικνύεται και πάλι ότι το ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Τα πρόσημα στο αντίστοιχο ανάπτυγμα μπαίνουν εναλλάξ σύμφωνα με το σχήμα

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Οι ιδιότητες των οριζουσών που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.5 ισχύουν και εδώ.

Τέλος, τα αποτελέσματα των παραγράφων 2.6 και 2.7 επεκτείνονται και για τον αντίστροφο ενός πίνακα $n \times n$ και για το σύστημα Cramer $n \times n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a & b & c \\ 2 & a & b & c \\ 7 & 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ 15 & 5 & 10 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0+0+0 = 0$$

διότι η πρώτη και η τρίτη ορίζουσα έχουν από δύο ίδιες γραμμές ενώ η δεύτερη έχει δύο γραμμές ανάλογες.

2) Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Έχουμε

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(3x-1)\,(1+x)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = -1$$