ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Δρ Χρήστου Νικολαΐδη

Δεκέμβριος 2003

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΠΙΝΑΚΕΣ

1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

Ένας ***πίνακας*** είναι απλά μια ορθογώνια διάταξη στοιχείων της μορφής

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα ανήκουν στο σώμα[1] των πραγματικών αριθμών |R. Λέμε ότι ο πίνακας έχει *m γραμμές* και *n στήλες* είτε ότι είναι ένας *m x n πίνακας,* είτε ότι έχει *διαστάσεις m x n.*

Προσέξτε ότι ο συμβολισμός a_{ij} παριστάνει το στοιχείο που βρίσκεται στην *i*-γραμμή και *j*-στήλη. Ο παραπάνω πίνακας συμβολίζεται πολλές φορές και (a_{ij}), όπου a_{ij} παριστάνει το γενικό στοιχείο του πίνακα. Οι πίνακες θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα *A, B* κλπ, ενώ τα στοιχεία τους με μικρά *α, b* κλπ.

Ας δούμε τον επόμενο ορισμό

Δύο πίνακες $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$ θα λέμε ότι είναι ίσοι, και θα γράφουμε $A=B$, εάν καταρχάς οι δύο πίνακες έχουν τις ίδιες διαστάσεις και επιπλέον τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, με άλλα λόγια αν

$$a_{ij}=b_{ij}, \qquad \text{για όλα τα } i,j$$

Τα πράγματα είναι πιο απλά αν τα δούμε μέσα από ένα παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω οι 2x3 πίνακες

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 17 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

[1] Μπορεί να ανήκουν και στο σώμα των μιγαδικών αριθμών C, είτε σε οποιοδήποτε άλλο σώμα F. Εάν δεν γνωρίζετε τι είναι σώμα δεν υπάρχει λόγος ανησυχίας. Το γεγονός ότι θεωρούμε στοιχεία του |R για τους πίνακές μας εξυπηρετεί μια χαρά το σκοπό μας.

Το στοιχείο a_{12} του πίνακα *A* είναι το *y*, ενώ το στοιχείο a_{22} είναι το *a*. Η ισότητα *A*=*B* των δύο πινάκων ανάγεται ουσιαστικά σε έξι εξισώσεις:

$$x = 2 \qquad y = 0 \qquad z = -1$$
$$a = 5 \qquad b = 17 \qquad c = \sqrt{2}$$

Ένας πίνακας $1 x\, n$ έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

και θα ονομάζεται ***πίνακας-γραμμή***.

Επίσης, ένας πίνακας $m\ x\ 1$ έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

και θα ονομάζεται ***πίνακας-στήλη***.

Τέλος, υπάρχει και η περίπτωση να έχουμε έναν *πίνακα-στοιχείο*, δηλαδή έναν 1x1 πίνακα όπως είναι οι πίνακες (5), (-3), κλπ.

1.2 ΑΠΛΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

- **Πρόσθεση πινάκων**

Μπορούμε να προσθέτουμε δύο πίνακες *A* και *B* αρκεί να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Απλά προσθέτουμε τα αντίστοιχα στοιχεία και το αποτέλεσμα, που έχει επίσης τις ίδιες διαστάσεις, το συμβολίζουμε *A*+*B*. Δηλαδή,

Για τους *m x n* πίνακες $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$, ορίζουμε

$$A+B = (c_{ij})$$

όπου $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, για όλα τα *i,j*.

Πιο πρακτικά ας δούμε το

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

τότε
$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

ή και απευθείας
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix}.$$

- **Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα (βαθμωτός πολλαπλασιασμός)**

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό λ με έναν πίνακα A, πολλαπλασιάζοντας απλά τον αριθμό λ με κάθε στοιχείο του πίνακα. Το αποτέλεσμα έχει προφανώς τις ίδιες διαστάσεις με τον A και συμβολίζεται λA. Με άλλα λόγια

Εάν $\lambda\in \mathbb{R}$ και A είναι ένας $m \times n$ πίνακας $A=(a_{ij})$, τότε ορίζουμε
$$\lambda A=(c_{ij})$$
όπου $c_{ij}=\lambda a_{ij}$, για όλα τα i,j.

Επίσης, συμβολίζουμε με $-A$ τον πίνακα $(-1)A$, οπότε μπορούμε να μιλάμε και για αφαίρεση πινάκων αν ορίσουμε
$$A - B = A + (-B).$$

Πιο πρακτικά,

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τους πίνακες A και B του προηγούμενου παραδείγματος,
$$5A=5\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & -25\\ 15 & 5\end{pmatrix},$$

$$-B=-1B=-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -2 & -5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

ενώ
$$5A-2B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & -25\\ 15 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6\\ 4 & 10\\ 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & -35\\ 15 & 13\end{pmatrix}$$

Ανάμεσα στους mxn πίνακες ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο μηδενικός πίνακας, δηλαδή ο πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 0. Τον συμβολίζουμε[2] **Ο**. Π.χ. ο *2*x*3* μηδενικός πίνακας είναι ο

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο μηδενικός πίνακας συμπεριφέρεται όπως και το 0 στους αριθμούς, δηλαδή

$$A+\boldsymbol{O} = A = \boldsymbol{O}+A$$

Η γενική μορφή Α=(a_{ij}) βοηθάει να αποδεικνύουμε τέτοιου είδους ιδιότητες καθώς μας επιτρέπει να «περνάμε» από πράξεις πινάκων σε πράξεις αριθμών.

Πράγματι, για το πρώτο σκέλος της παραπάνω ιδιότητας έχουμε

$$\begin{aligned} A+\boldsymbol{O} &= (a_{ij}+0) && \text{[από τον ορισμό του αθροίσματος πινάκων]} \\ &= (a_{ij}) && \text{[από την ιδιότητα του αριθμού 0]} \\ &= A \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τις επόμενες ιδιότητες[3] για οποιουσδήποτε m x n πίνακες A, B, C και αριθμούς $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ [προσεταιριστική ιδιότητα]
2. $A+\boldsymbol{O} = A$ [ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου]
3. $A+(-A) = \boldsymbol{O}$ [ύπαρξη αντίθετου στοιχείου]
4. $A+B = B+A$ [αντιμεταθετική ιδιότητα]
5. $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$ [επιμεριστική ιδιότητα[4]]
6. $(\lambda+\mu)A = \lambda A+\mu A$ [επιμεριστική ιδιότητα[5]]
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. $1A = A$

Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση.

1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Η χρησιμότητα των πινάκων οφείλεται στον ιδιόμορφο τρόπο με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε πίνακες. Μετά από όσα είπαμε θα περίμενε κανείς να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων κατά ανάλογο τρόπο με την πρόσθεση, δηλαδή σε δύο πίνακες ίδιων διαστάσεων να πολλαπλασιάζουμε τα αντίστοιχα στοιχεία. Αν ήταν έτσι, οι πίνακες θα αποτελούσαν απλά «αποθήκες» στοιχείων χωρίς ουσιαστικό λόγο ύπαρξης καθώς δεν θα έκαναν τίποτα περισσότερο από το να ομαδοποιούν πράξεις

---

[2] συμβολίζεται έτσι ανεξάρτητα από τις διαστάσεις του, υπονοώντας κάθε φορά ότι έχει τις κατάλληλες διαστάσεις

[3] αυτές τις 8 ιδιότητες θα τις συναντήσουμε αργότερα, σε μια γενικότερη παρουσίαση, όταν θα μιλήσουμε για διανυσματικούς χώρους

[4] βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση πινάκων

[5] βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση αριθμών

μεταξύ αριθμών. Ο ορισμός του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι λίγο πιο περίπλοκος.

Για να βοηθηθούμε, ας ορίσουμε πρώτα το γινόμενο ενός πίνακα-γραμμή με έναν πίνακα-στήλη. Ορίζεται όπως το γνωστό μας εσωτερικό γινόμενο:

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_s)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_sb_s = \sum_{k=1}^{s} a_kb_k$$

Όπως καταλαβαίνουμε, οι δύο αρχικοί πίνακες πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Αλλιώς δεν γίνεται αυτός ο πολλαπλασιασμός.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο πινάκων *A* και *B*. Η προϋπόθεση εδώ είναι ότι όσες <u>στήλες</u> έχει ο πίνακας *A* τόσες <u>γραμμές</u> έχει ο πίνακας *B*. Με άλλα λόγια, αν ο *A* έχει διαστάσεις *m x s*, ο *B* πρέπει να έχει διαστάσεις *s x n*. Τότε το γινόμενο έχει διαστάσεις *m x n*. Σχηματικά θα λέγαμε για τις διαστάσεις

$$\boxed{(m \times \mathbf{s}) \quad X \quad (\mathbf{s} \times n) \quad = \quad (m \times n)}$$

Όσον αφορά την πράξη, για να βρούμε το στοιχείο c_{ij} του γινομένου *AB,* πολλαπλασιάζουμε την *i*-γραμμή του πίνακα A με την *j*-στήλη του πίνακα B.

Πιο αυστηρά,

Εάν $A=(a_{ij})$ είναι ένας *m x s* πίνακας και $B=(b_{ij})$ είναι ένας *s x n* πίνακας, τότε ορίζουμε ως γινόμενό τους τον *m x n πίνακα*

$$AB = (c_{ij})$$

όπου

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj},$$

για όλα τα *i,j*.

Πρέπει να πούμε ότι το γινόμενο «αδικείται» από τον ορισμό του. Στην πράξη είναι πιο απλό απ΄ ότι φαίνεται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1)

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha1+\beta2+\gamma3 & \alpha4+\beta5+\gamma6 & \alpha7+\beta8+\gamma9 & \alpha10+\beta11+\gamma12 \\ \delta1+\varepsilon2+\zeta3 & \delta4+\varepsilon5+\zeta6 & \delta7+\varepsilon8+\zeta9 & \delta10+\varepsilon11+\zeta12 \end{bmatrix}$$

(2x3) **(3x4)** **(2x4)**

Πολλαπλασιάζουμε δηλαδή την πρώτη γραμμή (α β γ) του πίνακα Α διαδοχικά και με τις 4 στήλες του πίνακα Β. Έτσι προκύπτει η πρώτη γραμμή του ΑΒ.
Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με τη δεύτερη γραμμή (δ ε ζ).

Έτσι π.χ. για να βρούμε το στοιχείο (2,3) του ΑΒ πολλαπλασιάζουμε την $2^η$ γραμμή του Α με την $3^η$ στήλη του Β.

2) Ένα καθαρά αριθμητικό παράδειγμα ίσως βοηθήσει περισσότερο.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 7 & 1\cdot 5 + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 7 & 2\cdot 5 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 4 + 1\cdot 7 & 0\cdot 5 + 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+14 & 5+6 \\ 8+21 & 10+9 \\ 0+7 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 \\ 29 & 19 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι ο πολλαπλασιασμός των δύο πινάκων δεν γίνεται αντίστροφα καθώς ο δεύτερος πίνακας έχει διαστάσεις 2x**2** ενώ ο δεύτερος **3**x2

3) Αν πάρουμε έναν 2x3 πίνακα A και έναν 3x2 πίνακα B, ώστε να μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε και με τους δύο τρόπους, τότε ο AB έχει διαστάσεις 2x2 ενώ ο BA έχει διαστάσεις 3x3. Γενικά λοιπόν $AB \neq BA$.

4) Ας πάρουμε δύο πίνακες 2x2, έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Τότε μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, \qquad \text{ενώ} \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Και πάλι λοιπόν $AB \neq BA$. Αυτό σημαίνει ότι στον πολλαπλασιασμό πινάκων δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

5) Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις (πιο σπάνιες) όπου δύο πίνακες *αντιμετατίθενται*. Ας πάρουμε π.χ. τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{pmatrix}.$$

Μπορεί η αντιμεταθετική ιδιότητα να μην ισχύει στον πολλαπλασιασμό πινάκων άλλα όλες οι άλλες ιδιότητες που δεν εμπλέκουν αντιμετάθεση πινάκων ισχύουν. Έχουμε λοιπόν τις ιδιότητες:

1. (AB)C = A(BC) [προσεταιριστική ιδιότητα]
2. A(B+C) = AB+AC [επιμεριστική ιδιότητα (από αριστερά)]
3. (B+C)A = BA + CA [επιμεριστική ιδιότητα (από δεξιά)]
4. λ(AB) = (λA)B = A(λB)
5. **O**A = **O**
6. B**O = O**

Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση.

1.4 Ο ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΣ ΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Ο ***ανάστροφος*** ενός πίνακα A προκύπτει εάν διατάξουμε τις γραμμές του A ως στήλες με την ίδια σειρά (οπότε αυτόματα οι στήλες γίνονται γραμμές). Συμβολίζεται A^T. Έτσι το στοιχείο που βρίσκεται στη θέση *ij* , στον ανάστροφο θα πάρει τη θέση *ji.* Πιο αυστηρά,

Εάν $A=(a_{ij})$ είναι ένας m x n πίνακας, τότε ο ανάστροφος $A^T=(a'_{ij})$ είναι ο n x m πίνακας όπου

$$a'_{ij} = a_{ji}, \qquad \text{για όλα τα } i,j$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε τις ιδιότητες

1. $(A+B)^T = A^T+B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$ (προσέξτε εδώ ότι αλλάζει η σειρά των A,B)

Ας δείξουμε την ιδιότητα 4 που είναι και η πιο δύσκολη.

Έστω

$A=(a_{ij})$ ένας m x s πίνακας,

$B=(b_{ij})$ ένας s x n πίνακας,

$AB=(c_{ij})$ το m x n γινόμενό τους, όπου $c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$,

$(AB)^T=(c'_{ij})$ ο n x m ανάστροφος πίνακας του A*B*.

$B^T=(b'_{ij})$ ο n x s ανάστροφος πίνακας του *B*,

$A^T=(a'_{ij})$ ο s x m ανάστροφος πίνακας του A

Για τον *n x m* πίνακα $B^T A^T = (d_{ij})$ έχουμε λοιπόν

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{s} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{s} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{s} a_{jk} b_{ki} = c_{ji} = c'_{ij}$$

οπότε

$$\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\mathrm{AB})^{\mathrm{T}}$$

1.5 ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ας θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 7 \\ -3x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Αν ονομάσουμε

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ τον πίνακα των συντελεστών

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ τον πίνακα στήλη των αγνώστων

$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ τον πίνακα στήλη των σταθερών

το σύστημά μας γράφεται με τη χρήση πινάκων

$$\boldsymbol{AX=B}$$

Πράγματι,

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z \\ -3x + y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = B.$$

Γενικά, ένα σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\boldsymbol{AX=B}$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Προσέξτε ότι οι διαστάσεις των πινάκων είναι $m \times n$, $n \times 1$ και $m \times 1$ αντίστοιχα.

Η απλοποιημένη μορφή ΑΧ=Β είναι αρκετά βολική για τη μελέτη γραμμικών συστημάτων. Με τη μορφή αυτή για παράδειγμα μπορούμε εύκολα να δείξουμε πως αν ένα σύστημα έχει περισσότερες από μια λύσεις τότε έχει άπειρες (αφήνεται ως άσκηση).

Έτσι λοιπόν για ένα σύστημα μπορεί να ισχύει ένα από τα παρακάτω

1. να μην έχει καμία λύση (τότε λέγεται αδύνατο)
2. να έχει μία και μοναδική λύση
3. να έχει άπειρες λύσεις

Μια τελευταία παρατήρηση στη μορφή $AX=B$ είναι ότι μας θυμίζει την εξίσωση πρώτου βαθμού

$$ax=b$$

την οποία λύναμε διαδοχικά ως εξής:

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$$
$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$
$$1x = a^{-1}b$$
$$x = a^{-1}b$$

Εάν καταφέρουμε λοιπόν (έστω και σε ορισμένες περιπτώσεις) να ακολουθήσουμε μια ανάλογη διαδικασία και στους πίνακες, αντιλαμβανόμαστε τη χρησιμότητα αυτής της μορφής.

1.6 Ο ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε και πάλι το σύστημα των m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους

$$\begin{aligned} L_1&: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ L_2&: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots& \quad \ldots \\ L_m&: \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

(το L_i παριστάνει την i στη σειρά εξίσωση)

Λύση του συστήματος είναι κάθε n-άδα $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ που επαληθεύει[6] όλες τις εξισώσεις του συστήματος. Όταν δεν υπάρχει τέτοια λύση είπαμε πως το σύστημα λέγεται αδύνατο.

Μια ειδική περίπτωση έχουμε όταν οι σταθεροί όροι $b_1,b_2,\ldots,b_m$ είναι όλοι 0. Τότε το σύστημα λέγεται ***ομογενές*** και είμαστε σίγουροι ότι έχει τουλάχιστον μία λύση, την μηδενική $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$=(0,0,**...**,0). Οπότε, σύμφωνα με προηγούμενη παρατήρηση, το σύστημα είτε έχει μόνο την μηδενική λύση είτε έχει άπειρες λύσεις

Εδώ θα περιγράψουμε το σύστημα με έναν άλλον πίνακα που περιέχει τους συντελεστές των αγνώστων αλλά και τους σταθερούς όρους. Τον ονομάζουμε ***επαυξημένο πίνακα*** του συστήματος και είναι ο πίνακας

$$\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ας θυμηθούμε πως λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα. Συνήθως το μετατρέπουμε με κατάλληλες ενέργειες πάνω στις εξισώσεις σε ένα άλλο ισοδύναμο σύστημα που έχει προφανείς λύσεις (καθώς στην πορεία απαλείφονται κάποιοι άγνωστοι).

Οι ενέργειες αυτές είναι

- ✓ Αντιμεταθέτουμε δύο εξισώσεις του συστήματος (Li $\leftrightarrow$ Lj)
- ✓ Πολλαπλασιάζουμε μια εξίσωση επί $\lambda\neq 0$ (Li $\to$ λLi)
- ✓ Προσθέτουμε σε μια εξίσωση μ φορές μια άλλη εξίσωση (Li $\to$ Li+μLj)

Οι δύο τελευταίες ενέργειες βέβαια μπορούν να γίνουν σε ένα βήμα (Li $\to$ λLi+μLj), αρκεί να είναι $\lambda\neq 0$. Να πολλαπλασιάσουμε δηλαδή δύο εξισώσεις με κατάλληλους συντελεστές και μετά να τις προσθέσουμε έτσι ώστε να απαλειφθεί ένας άγνωστος.

Έτσι π.χ. το σύστημα

$$\begin{aligned} 5x+11y-21z&=-22 \\ x+2y-4z&=-4 \\ 3x-2y+3z&=11 \end{aligned}$$

γίνεται (αρχικά με $L_1 \leftrightarrow L_2$)

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=-4 & & \\ 5x+11y-21z&=-22 & & (L_2\text{-}5L_1) \\ 3x-2y+3z&=11 & & (L_3\text{-}3L_1) \end{aligned}$$

μετά

[6] θέτοντας $x_1=u_1, x_2=u_2,\ldots,x_n=u_n$

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=-4\\ y-z&=-2\\ -8y+15z&=23 \qquad (L_3+8L_2)\end{aligned}$$

μετά

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=-4\\ y-z&=-2\\ 7z&=7 \qquad (\tfrac{1}{7}L3)\end{aligned}$$

μετά

$$\begin{aligned} x+2y-4z&=-4\\ y-z&=-2\\ z&=1\end{aligned}$$

Μπορούμε βέβαια να συνεχίσουμε (απαλείφοντας το z από τη δεύτερη εξίσωση και τα y,z από την πρώτη), αλλά το τελευταίο σύστημα είναι ήδη βολικό ώστε με αντικατάσταση «προς τα πίσω» να πάρουμε $z = 1$, $y = -1$, $x = 2$. Οπότε η λύση είναι $(x, y, z) = (2,-1,1)$

Αν προσέξουμε τη διαδικασία θα διαπιστώσουμε ότι οι άγνωστοι δεν έπαιξαν σημαντικό ρόλο. Τα βήματα καθορίστηκαν από τους συντελεστές των αγνώστων και από τους σταθερούς όρους.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 11 & -21 & -22\\ 1 & 2 & -4 & -4\\ 3 & -2 & 3 & 11\end{array}\right)\begin{array}{l}(L_2)\\(L_1)\\ \end{array}$$

και με διαδοχικές ισοδυναμίες[7] παίρνουμε

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & -4\\ 5 & 11 & -21 & -22\\ 3 & -2 & 3 & 11\end{array}\right)\begin{array}{l} \\(L_2-5L_1)\\(L_3-3L_1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -8 & 15 & 23\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\(L_3+8L_2)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 7 & 7\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\(\tfrac{1}{7}L_3)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -4 & -4\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}(L_1+4L_3)\\(L_2+L_3)\\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}(L_1-2L_2)\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

[7] θα λέμε ότι δύο επαυξημένοι πίνακες είναι ισοδύναμοι όταν ο ένας προκύπτει από τον άλλον με διαδοχικές εφαρμογές των τριών ενεργειών που περιγράψαμε. Τότε τα αντίστοιχα συστήματα έχουν τις ίδιες λύσεις

που αντιστοιχεί στο σύστημα

$$x = 2$$
$$y = -1$$
$$z = 1$$

Αυτή προφανώς είναι και η μοναδική λύση του αρχικού συστήματος.

Ας ονομάσουμε για ευκολία το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής του πίνακα *ηγετικό στοιχείο* της γραμμής. Ο σκοπός μας λοιπόν είναι να αναγάγουμε τον επαυξημένο πίνακα σε έναν ισοδύναμο πίνακα όπου

σε πρώτη φάση

- ✓ Όλες οι μηδενικές γραμμές (αν υπάρχουν) να βρίσκονται στη βάση του πίνακα
- ✓ Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής να βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής

Εάν σε κάποιον πίνακα εμφανιστεί μια γραμμή της μορφής

$$(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid b) \quad \text{με} \quad b \neq 0$$

τότε το σύστημα είναι αδύνατο διότι αυτή η γραμμή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \neq 0$$

Εάν εμφανιστεί μια γραμμή της μορφής

$$(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid 0)$$

τη διαγράφουμε και συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες διότι αυτή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

Αν αποφανθούμε ότι υπάρχει λύση τότε συνεχίζουμε με την αναζήτηση ενός ισοδύναμου πίνακα όπου σε

σε δεύτερη φάση

- ✓ Το ηγετικό στοιχείο κάθε γραμμής να είναι 1 και να αποτελεί το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη του.

Η τελευταία μορφή του επαυξημένου, που ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες που αναφέραμε, ονομάζεται ***κανονική μορφή***. Μένει να διαπιστώσουμε αν από μια τέτοια μορφή προκύπτει μία και μοναδική λύση ή άπειρες λύσεις.

Παρατηρούμε ότι ανάμεσα στις στήλες ενός επαυξημένου πίνακα σε κανονική μορφή εμφανίζονται οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Στο παράδειγμα μας πιο πάνω φτάσαμε στην κανονική μορφή

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Πριν τη διακεκομμένη γραμμή εμφανίζεται ακριβώς ο μοναδιαίος πίνακας και το γεγονός αυτό αντιστοιχεί σε μια και μοναδική λύση.

Υπάρχει βέβαια η περίπτωση να εμφανίζονται και άλλες στήλες εκτός από αυτές του μοναδιαίου. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι σε ένα σύστημα με 5 αγνώστους (x, y, z, s, t), μετά από διαδοχικές ισοδυναμίες, φτάνουμε στον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Ο πίνακας αυτός βρίσκεται επίσης σε κανονική μορφή και φανερώνει ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις. Οι μεταβλητές z και t που δεν αντιστοιχούν σε στήλες του μοναδιαίου πίνακα θα αποτελέσουν τις *ελεύθερες μεταβλητές* της λύσης του συστήματος που σημαίνει ότι η τελική λύση θα εκφραστεί βάσει αυτών. Οι εξισώσεις που προκύπτουν από τον πίνακα είναι

$$\begin{aligned} & x - 5z + 3t = 1 \\ & y + 2z = 5 \\ & s + 3t = 7 \end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν την τελική λύση

$$\begin{aligned} & x = 1 + 5z - 3t \\ & y = 5 - 2z \qquad \text{με } z, t \in R \\ & s = 7 - 3t \end{aligned}$$

Μια διαφορετική έκφραση της απάντησης θα ήταν ότι το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι

$$S = \{(1 + 5z - 3t, 5 - 2z, z, 7 - 3t, t) \mid z, t \in R\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} & x + y - 2z + 3w = 4 \\ & 2x + 3y + 3z - w = 3 \\ & 5x + 7y + 4z + w = 5 \end{aligned}$$

Έχουμε διαδοχικά

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

2) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} &x + y - 2z + 4t = 5 \\ &2x + 2y - 3z + t = 3 \\ &3x + 3y - 4z - 2t = 1 \end{aligned}$$

Έχουμε διαδοχικά

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κανονική μορφή με τον μοναδιαίο πίνακα να εμφανίζεται στις στήλες του x και του z. Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι λοιπόν οι y,t. Η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} x &= -9 - y + 10t \\ z &= -7 + 7t \end{aligned}, \qquad \text{με } y,t \in R$$

Με άλλα λόγια, το σύνολο λύσεων είναι

$$S = \{(-9 - y + 10t, y, -7 + 7t, t) \mid y,t \in R\}$$

3) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} &x + 2y + z = 5 \\ &2x + 5y - z = -4 \\ &3x - 2y - z = 5 \\ &4x + y - 3z = -2 \end{aligned}$$

Έχουμε διαδοχικά

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & -7 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x, y, z) = (2, -1, 3)$

1.7 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με *n x n* πίνακες. Επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών τους ονομάζουμε ***τετραγωνικούς*** πίνακες *τάξης n*. Εδώ έχουμε το πλεονέκτημα να εφαρμόζουμε ανάμεσα σε *n x n* πίνακες όλες τις πράξεις που μάθαμε ως τώρα, όπως την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα, τον πολλαπλασιασμό πινάκων, τον ανάστροφο ενός πίνακα και να παίρνουμε και πάλι *n x n* πίνακες.

Σε έναν τετραγωνικό πίνακα τάξης n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ λέμε ότι αποτελούν την *(κύρια) διαγώνιο* του πίνακα. Το άθροισμά τους ονομάζεται *ίχνος του πίνακα* (trace) και συμβολίζεται

$$trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Για το ίχνος ισχύουν οι ιδιότητες

1. $tr(A+B) = trA + trB$
2. $tr(\lambda A) = \lambda \cdot trA$
3. $tr(AB) = tr(BA)$

Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τετραγωνικός πίνακας που έχει 1 στην κύρια διαγώνιο και παντού αλλού 0. Ονομάζεται μοναδιαίος και συμβολίζεται I_n ή απλά I (όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης στις διαστάσεις του πίνακα).

Είναι δηλαδή

$$I = (\delta_{ij})$$

όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \quad i = j \\ 0 & \alpha\nu \quad i \neq j \end{cases}$$

(το σύμβολο αυτό είναι γνωστό ως δέλτα του Kronecker).

Η ονομασία του μοναδιαίου πίνακα είναι δικαιολογημένη αν παρατηρήσουμε ότι

$$\boldsymbol{AI = A}$$
$$\boldsymbol{IA = A}$$

για κάθε τετραγωνικό πίνακα A (ουσιαστικά ισχύει ακόμη και όταν ο A δεν είναι τετραγωνικός, αρκεί βέβαια να ορίζεται ο πολλαπλασιασμός). Πράγματι, για την πρώτη σχέση, αν $A=(a_{ij})$ και $AI = (c_{ij})$, τότε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\,\delta_{jj} = a_{ij}$$

(διότι το δ_{kj} μηδενίζεται πάντοτε εκτός από την μοναδική περίπτωση όπου $k=j$).
Συνεπώς $AI = A$. Όμοια δείχνεται και η δεύτερη σχέση.

Με μερικά παραδείγματα μπορούμε να καταλάβουμε πιο εύκολα γιατί συμβαίνει αυτό. Ας δούμε ένα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$trA = 1 + 5 + 9 = 15$$

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

και

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Οι δυνάμεις πινάκων (με εκθέτη φυσικό αριθμό) ορίζονται όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
&A^1 = A\\
&A^2 = AA,\\
&A^3 = A^2A,\\
&\ldots\\
&A^{n+1} = A^nA
\end{aligned}
$$

ενώ ορίζουμε επίσης $A^0 = I$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υπολογίσουμε όλες τις δυνάμεις του τετραγωνικού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
&A^0 = I,\\
&A^1 = A
\end{aligned}
$$

και

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}$$

οπότε

$$A^n = \mathbf{O}, \qquad \text{για } n \geq 3.$$

1.8 ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένας τετραγωνικός πίνακας A θα λέγεται ***αντιστρέψιμος***[8] αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = I = BA$$

Εάν υπάρχει τέτοιος πίνακας, τότε είναι μοναδικός. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλος πίνακας B' που έχει την ίδια ιδιότητα, δηλαδή

[8] Σκεφτείτε κατ' αναλογία ότι στο |R κάθε μη μηδενικός αριθμός α είναι αντιστρέψιμος γιατί υπάρχει ο $α^{-1}$ τέτοιος ώστε $αα^{-1}=1=α^{-1}α$.

$$AB' = I = B'A\,.$$

Τότε ο B' συμπίπτει με τον B καθώς

$$B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B\,.$$

Επειδή είναι μοναδικός τον ονομάζουμε ***αντίστροφο*** του A και τον συμβολίζουμε A^{-1}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

και

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,.$$

Συνεπώς, οι δύο πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου, δηλαδή

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B^{-1} = A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Υπάρχουν πίνακες που δεν είναι αντιστρέψιμοι. Π.χ. ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Πράγματι, ας υποθέσουμε αντίθετα ότι έχει ως αντίστροφο τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Τότε έχουμε διαδοχικά

$$AB = I \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a+6c & 2b+6d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε η πρώτη στήλη δίνει

$$\begin{aligned} 2a + 6c &= 1 \\ a + 3c &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα δεν ορίζεται ο A^{-1}.

Ωραία λοιπόν, όταν μας δίνουν τον B μπορούμε να ελέγξουμε αν είναι πράγματι ο αντίστροφος του A. Το ερώτημα είναι «όταν μας δίνουν μόνο τον πίνακα A πως βρίσκουμε τον αντίστροφο του;».

1.9 ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ A (ΟΤΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ)

Όταν μας δίνεται ένας τετραγωνικός πίνακας A τάξης n, ο επόμενος αλγόριθμος είτε αποφαίνεται ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος είτε βρίσκει τον αντίστροφο A^{-1}.

ΒΗΜΑ 1: Σχηματίζουμε τον nx$(2n)$ πίνακα $M=(A \mid I_n)$

ΒΗΜΑ 2: Προσπαθούμε να αναγάγουμε τον M σε κανονική μορφή. Εάν στην πρώτη φάση εμφανιστεί μηδενική γραμμή στο πρώτο μισό του πίνακα σταματάμε. Ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν όχι συνεχίζουμε στη δεύτερη φάση.

ΒΗΜΑ 3: Βρίσκουμε την κανονική μορφή $(I_n \mid B)$.

ΒΗΜΑ 4: Είναι $A^{-1} = B$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Να εξεταστεί αν είναι αντιστρέψιμος και αν είναι, να βρεθεί ο αντίστροφος.

Έχουμε διαδοχικά,

$$M = (A \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Βεβαιωθείτε ότι $AA^{-1} = I = A^{-1}A$)

2) Ομοίως για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Έχουμε,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφόσον εμφανίζεται μηδενική γραμμή στο πρώτο μισό του πίνακα, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.