



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΑΡΧΟΝΤΙΑ Χ. ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

ΣΕ
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων Καθηγητής: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Μ. ΘΗΛΥΚΟΣ

Τμήμα Μαθηματικών
Οκτώβριος 2012

Περίληψη

Στις εργασίες Ελασσόνων Γραφημάτων, οι N. Robertson και P. Seymour απέδειξαν μια σειρά από δομικά και αλγοριθμικά αποτελέσματα. Κάποια από αυτά, όπως το Ισχυρό και το Ασθενές Δομικό Θεώρημα, το Θεώρημα Απαγορευμένης Σχάρας καθώς και ο αλγόριθμος για την ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΛΑΣΣΟΝΟΣ, αποτελούν πλούσια πηγή πολλών ακόμα δομικών αλλά και αλγοριθμικών αποτελεσμάτων.

Επιπλέον, η ανάπτυξη της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων συνέπεσε με και επηρέασε την ανάπτυξη ενός νέου κλάδου της πολυπλοκότητας, την Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας, που προτάθηκε από τους R. Downey και M. Fellows.

Σε αυτή την διδακτορική διατριβή ασχολούμαστε με μια σειρά από ζητήματα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων και της Θεωρίας Παραμετρικής Πολυπλοκότητας καθώς και με την αλληλεξάρτηση των δύο αυτών περιοχών.

Abstract

In the Graph Minors project, N. Robertson and P. Seymour, proved a series of structural and algorithmic results. Some of them, such as the Strong and the Weak Structure Theorem, the Excluded Grid Theorem and the algorithm for MINOR CONTAINMENT, constitute a rich source of many more structural as well as algorithmic results.

Furthermore, the development of Graph Minor Theory coincided with and influenced the development of a new branch of Complexity, namely the Parameterized Complexity Theory, introduced by R. Downey and M. Fellows.

In this doctoral thesis we deal with a series of issues in Graph Minor Theory and Parameterized Complexity as well as the dependence of these two areas.

Πρόλογος

Ξεκινώντας τη συγγραφή αυτού του προλόγου διαπίστωσα ότι χρειάζονται αρκετό χώρο ώστε για να περιγράψω την εμπειρία μου από το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (Ε.Κ.Π.Α.), το οποίο με φιλοξένησε ακαδημαϊκά από τον Σεπτέμβρη του 2003, όταν πρωτοξεκίνησα τις προπτυχιακές μου σπουδές, έως και σήμερα. Πολλοί άνθρωποι συνέβαλαν τόσο στην επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών μου όσο και στην ωρίμανση του χαρακτήρα μου τα εννέα αυτά χρόνια.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να τους ευχαριστήσω, ξεκινώντας από τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Μ. Θηλυκό. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστικής σημασίας για την πορεία των σπουδών μου από τα προπτυχιακά μου ακόμα χρόνια. Ο επαγγελματισμός, η προσιτότητα, και η επιμονή που τον διέπουν έκανε την συνεργασία μας ιδιαίτερα ευχάριστη και, εκ μέρους του, άψογη. Αποτελεί για εμένα παράδειγμα Δασκάλου. Επιπλέον, οι μαθηματικές μας (και όχι μόνο) συζητήσεις καθώς και οι πολυάριθμες συμβουλές του, τις οποίες εκτιμώ βαθύτατα, με ενθάρρυναν αλλά και με απέτρεψαν από

αρκετές κακοτοπιές σε σημείο που ο τίτλος Ακαδημαϊκός «Γονέας» αρμόζει περισσότερο από τον τίτλο του Επιβλέποντα Καθηγητή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης θερμά τα δύο ακόμα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής των διδακτορικών μου σπουδών, τον κ. Λευτέρη Μ. Κυρούση και τον κ. Σταύρο Γ. Κολλιόπουλο. Ένα επιπλέον ευχαριστώ θα ήθελα να πω στον κ. Κυρούση για το ενδιαφέρον που έδειξε για το Φόρουμ του Τμήματος.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους: κ. Χρήστο Αθανασιάδη, κ. Κωνσταντίνο Δημητρακόπουλο, κ. Ευάγγελο Ράπτη και κ. Daniel Lokshтанov για την τιμή που μου έκαναν με τη συμμετοχή τους στην Επταμελή Εξεταστική Επιτροπή της διδακτορικής αυτής διατριβής. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να δώσω, με αλφαβητική σειρά, στον κ. Δημητρακόπουλο, ο οποίος αποτέλεσε διευθυντής του μΠΛV¹ κατά την έναρξη των σπουδών μου σε αυτό, στον κ. Ράπτη, για την άψογη συνεργασία μας στο Εργαστήριο Υπολογιστών και το Φόρουμ του Τμήματος, και στον κ. Lokshтанov, για την προσωπική κάλυψη των εξόδων του κατά τη μετάβαση και διαμονή του στη Ελλάδα την εβδομάδα της υποστήριξης της διδακτορικής διατριβής.

Ευχαριστώ επίσης το Τμήμα Μαθηματικών για την οικονομική υποστήριξη κατά τη διάρκεια των διδακτορικών μου σπουδών με την προσφορά υποτροφίας υπό την αιγίδα του ερευνητικού προγράμματος με κωδικό 70/4/10311 του Ειδικού Λογαριασμού Κονδυλίων Έρευνας του Ε.Κ.Π.Α..

Συνεχίζοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω, με χρονολογική σειρά, τους Καθηγητές που με φιλοξένησαν και με υποστήριξαν οικονομικά κατά την επίσκεψή μου σε αυτούς. Για την ακρίβεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους:

- κα. Isolde Adler, για την φιλοξενία στο Goethe Universität, Frankfurt am Main και στο σπίτι της, την οικονομική (και όχι μόνο) υποστήριξη της

¹ Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Λογική και Θεωρία Αλγορίθμων και Υπολογισμού

καθώς και την ατέρμονη προθυμία της να απαντήσει σε οποιαδήποτε απορία μου και γενναιόδωρα να συζητήσει οποιοδήποτε ερευνητικό ζήτημα κατά την παραμονή μου στην Φρανκφούρτη τον Οκτώβριο του 2010.

- κ. Saket Saurabh, για την πλήρη (συμπεριλαμβανομένης της οικονομικής) υποστήριξη του και την ενθάρρυνση του να μοιραστώ οποιαδήποτε σκέψη ή αμφιβολία, κατά την επίσκεψή μου στο Institute of Mathematical Sciences, Chennai στην Ινδία την άνοιξη του 2011. Η ικανότητά του να κάνει τα πάντα να φαίνονται απλά, καθώς και το πείσμα με το οποίο αντιμετωπίζει την έρευνα αποτελούσαν και αποτελούν για εμένα πηγή έμπνευσης.

- κ. Fedor V. Fomin, για την απλόχερη πλήρη οικονομική υποστήριξη του ταξιδιού μου στο Bergen κατά την άνοιξη του 2011, κάνοντας το για εμένα εφικτό να επισκεφτώ την Ομάδα των Αλγόριθμων του Universitetet i Bergen και να παρακολουθήσω το Treewidth Workshop 2011. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω θερμά για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την υποστήριξή του. Ανυπομονώ να ξεκινήσω το επόμενο βήμα της ερευνητικής μου πορείας ως μέλος της ερευνητικής του ομάδας.

- κ. Daniel Král' και κ. Zdeněk Dvořák για την οικονομική υποστήριξη και την φιλοξενία κατά την διάρκεια της επίσκεψής μου στο Univerzita Karlova v Praze στην Πράγα το φθινόπωρο και τον χειμώνα του 2011. Ένα ιδιαίτερο *děkuji* οφείλω επίσης στον κ. Jaroslav Nešetřil για την ενθάρρυνσή του από τα πρώτα μου ερευνητικά βήματα.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω το μΠΛΥ και όλους τους καθηγητές μου εκεί καθώς μου προσέφεραν τα εφόδια και την ώθηση ώστε όλα τα παραπάνω να γίνουν εφικτά. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιάννη Ν. Μοσχοβάκη, ο οποίος αποτελεί πρότυπο επιστήμονα, όχι μόνο για εμένα αλλά και για την πλειονότητα (αν όχι όλων) των φοιτητών του.

Κάνοντας μία μικρή παράκαμψη από τις ακαδημαϊκές ευχαριστίες, θα ήθελα να αναφέρω ότι υπήρξαν αρκετές φορές που βρέθηκα σε αδιέξοδο όταν

προσπάθησα να αντιμετωπίσω γραφειοκρατικά ζητήματα του Τμήματος. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Πρόεδρο του Τμήματος Μαθηματικών, κ. Ιωάννη Εμμανουήλ, καθώς και τον Διευθυντή της Συντονιστικής Επιτροπής του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών, κ. Αντώνιο Μελά, για την ταχύτητα και την αποτελεσματικότητα με την οποία έδρασαν όσον αφορά κάποια από αυτά.

Δεν θα έπρεπε να παραλείψω να ευχαριστήσω επίσης τον Δημήτρη Ζώρο και τον Θανάση Κουτσώνα για το ευχάριστο εργασιακό περιβάλλον κατά την διάρκεια της κοινής μας παραμονής στο γραφείο 116 και τους υπόλοιπους συμφοιτητές μου που έκαναν την κοινή μας παραμονή στο Τμήμα ενδιαφέρουσα και ευχάριστη.

Ευχαριστώ επίσης όλους μου τους συνεργάτες του οποίους δεν έχω αναφέρει ονομαστικά παραπάνω. Αυτοί είναι οι κ. Marcin Kamiński, τον οποίο ευχαριστώ ιδιαίτερα για την υποστήριξη και την καλοσύνη του, και τέλος η Sudeshna Kolay και ο Ιωσήφ Σαλέμ.

Συνεχίζοντας, ευχαριστώ τα μέλη του Εργαστηρίου Υπολογιστών και το Φόρουμ του Τμήματος για τις ευχάριστες ώρες που πέρασα εκεί, καθώς και το LabRadio και το chat του για την συντροφιά σε πολλές ώρες διαβάσματος αλλά και ξεκούρασης.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω όλους τους φίλους που με επισκέφτηκαν κατά την παραμονή μου στο εξωτερικό αλλά και με προσκάλεσαν να τους επισκεφτώ κατά τη δική τους παραμονή στο εξωτερικό. Η παρουσία τους είναι πάντοτε ευπρόσδεκτη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την άνευ όρων υποστήριξη όλων μου των επιλογών.

«Να φεύγω τώρα είναι η ώρα κι ίσως σας ξαναδώ ...»²

Αρχοντία Χ. Γιαννοπούλου

Οκτώβριος 2012

Αθήνα

² Αυτή η φράση είναι στίχος από το τραγούδι «Χωρίς Αιτία» που έγραψε ο Πάυλος Σιδηρόπουλος και εμφανίστηκε στον δίσκο “έν λευκῷ”.

Περιεχόμενα

Περίληψη	iii
Abstract	v
Πρόλογος	vii
Περιεχόμενα	xiii
Κατάλογος Σχημάτων	xix
Κατάλογος Πινάκων	xxiii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Γενικά	1
1.2 . . . και Ειδικότερα	2
1.3 Η οργάνωση της διατριβής	10
1.4 Οι εργασίες	13

2	Βασικές Έννοιες	17
2.1	Γραφήματα	17
2.2	Γραφήματα σε Επιφάνειες	28
2.3	Σχάρες και Τοίχοι	31
2.4	Λογική	35
3	(Καλές) Μερικές Διατάξεις και Αλγόριθμοι	39
3.1	(Καλές) Μερικές Διατάξεις	39
3.2	Απαγορεύοντας τα Γραφήματα του Kuratowski ως Εμβυθίσεις	45
3.2.1	(Σύρροες) Οικογένειες Μονοπατιών	51
3.2.2	Ένα Θεώρημα Αποσύνθεσης	56
3.3	Αλγόριθμοι	64
4	Εντοπίζοντας τις Παρεμποδίσεις για το Βάθος Δέν-	
	τρου	67
4.1	Μία Εισαγωγή στο Βάθος Δέντρου	69
4.2	Άνω Φράγμα στην Τάξη των Παρεμποδίσεων για $\mathcal{G}_k$	73
4.3	Ένα Δομικό Λήμμα για τις Παρεμποδίσεις του Βάθους Δέντρου	75
4.4	Άκυκλες Παρεμποδίσεις για το Βάθος Δέντρου	77
4.5	Κάτω Φράγμα στο Πλήθος των Παρεμποδίσεων για την $\mathcal{G}_k$. .	81
4.6	Παρεμποδίσεις για την $\mathcal{G}_k$, $k \leq 3$	88
4.7	Μία Αναγωγή για το Βάθος Δέντρου	93
5	Υπολογίζοντας Παρεμποδίσεις Εμβυθίσεων	99
5.1	Προκαταρκτικά	104
5.2	Υπολογίζοντας Σύνολα Παρεμπόδισης Εμβυθίσεων	108
5.3	Φράγματα στο Δεντροπλάτος των Παρεμποδίσεων	113
5.4	Συμπεράσματα	118

6 Το Ασθενές Δομικό Θεώρημα των Ελασσόνων Γραφημάτων	121
6.1 Προκαταρκτικά	124
6.2 Διατύπωση του Κεντρικού Αποτελέσματος	127
6.3 Ορισμένα Βοηθητικά Λήμματα	131
6.3.1 Ένα Λήμμα για το Αναλλοίωτο της Ισοπεδότητας . . .	132
6.3.2 Πυραμίδες και Δεντροπλάτος	137
6.4 Η Κεντρική Απόδειξη	139
6.4.1 Συμβολισμός	139
6.4.2 Απόδειξη του Κεντρικού Αποτελέσματος	140
6.5 Πλαχοστρώσεις του Επιπέδου	154
6.5.1 Κανονικές Πλαχοστρώσεις του Επιπέδου	154
6.5.2 Τα Θεωρήματα και οι Πλαχοστρώσεις	155
7 Απαγορεύοντας Εμβυθίσεις σε Γραφήματα Εμβαπτισμένα σε Επιφάνειες	161
7.1 Απαραίτητες έννοιες	163
7.2 Προκαταρκτικά Συνδυαστικά Λήμματα	165
7.3 Κεντρικό Θεώρημα	175
8 Παραμετρική Πολυπλοκότητα και η Θεωρία Δισδιαστατότητας	181
8.1 Εισαγωγή στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα	181
8.2 Τοπολογικά Ελάσσονα Απόστασης	186
8.2.1 Παράγοντες σε Γραφήματα	186
8.2.2 Πλαχοστρώσεων Συμπλήρωμα	190
8.3 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας και οι Υποεκθετικοί Αλγόριθμοι	190
8.3.1 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας για Συνθλίψεις και Ελάσσονα	190

8.3.2	Η Θεωρία Δισδιαστατότητας για Τοπολογικά Ελάσσονα	194
8.4	Εφαρμογή στην Κυριαρχία Κύκλων και το Σύνολο Σκεδα- σμένων Κύκλων	195
8.4.1	Εισαγωγή στην Ιδιότητα Erdős-Pósa	195
8.4.2	Η Απόδειξη	198
8.5	Πυρηνοποίηση	205
9	Αλγόριθμοι και Πυρήνες σε Γενικά Γραφήματα	209
9.1	Εισαγωγή στις Διδιαμερίσεις (Υπερ)γραφημάτων	209
9.2	Νέο Κάτω Φράγμα στην $\zeta(H)$ και η Απόδειξη του Θεωρήμα- τος 9.1	217
9.3	Κανόνες Αναγωγής για τον AM- r - $\Delta\Sigma$	223
9.4	Γραμμικός Πυρήνας για Σταθερό r και Απόδειξη του Θεω- ρήματος 9.2	234
9.5	Το Αποτέλεσμα του Κάτω Φράγματος και η Απόδειξη του Θεωρήματος 9.3	235
9.6	Συμπεράσματα	241
10	Ανίχνευση Γραφημάτων: Ένας Χαρακτηρισμός Παιγ- νίου για την Τάξη Κύκλου	243
10.1	Εισαγωγή	243
10.1.1	Ανίχνευση Κορυφών σε Γραφήματα	244
10.1.2	Ανίχνευση Κορυφών σε Διγραφήματα	245
10.2	Παίγνια Ανίχνευσης για την Τάξη Κύκλου	249
10.2.1	TEΠΕ-ανίχνευση για Διγραφήματα	249
10.2.2	Συσχετίζοντας τις Παραμέτρους Ανίχνευσης Διγρα- φημάτων	254
10.2.3	Σχέση με Άλλες Παραμέτρους Γραφημάτων	259
10.3	Παρεμποδίσεις για την Τάξη Κύκλου	260

10.4 Η ΤΕΠΕ-ανίχνευση σε Απλά Γραφήματα	264
Βιβλιογραφία	271
Λίστα Συμβόλων	301
Αντιστοιχία Όρων	309
Ευρετήριο	323

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Μία μοναδική δέσμωση σε ένα γράφημα.	27
2.2	Μία οικογένεια τεσσάρων εμφωλευμένων κύκλων.	30
2.3	Παράδειγμα επικαλύπτουσας κορυφής δύο μονοπατιών.	31
2.4	Η (6×6) -σχάρα.	32
2.5	Τα δύο πρώτα στρώματα ενός τοίχου ύψους 5.	33
2.6	Τα κάθετα μονοπάτια ενός τοίχου ύψους 5.	34
2.7	Το σύνολο κυριαρχίας ενός γραφήματος.	37
3.1	Τα γραφήματα του Kuratowski.	40
3.2	Άπειρη αντιαλυσίδα για τη διάταξη της σύνθλιψης.	41
3.3	Άπειρη αντιαλυσίδα για την διάταξη των τοπολογικών ελασ- σόνων.	42
3.4	Το K_5 σαν εμφύθιση της (7×7) -σχάρας.	43
3.5	Δύο γραφήματα πριν από ακμοάθροισμα	46
3.6	Το γράφημα που προκύπτει μετά από ένα ακμοάθροισμα. . . .	46

3.7 Ένας (4,4)-δακτύλιος με ράγες και ένας (4,4)-κύλινδρος.	50
3.8 Ένα παράδειγμα της διαδικασίας στο Λήμμα 3.3.	51
3.9 Η Περίπτωση 1 στην Πρόταση 3.1	54
3.10 Η Περίπτωση 2 στην Πρόταση 3.1	55
3.11 Η Περίπτωση 3 στην Πρόταση 3.1	56
3.12 Ο (4,4)-δακτύλιος με ράγες και η κορυφή v	58
3.13 Τα γραφήματα H_1 και H_2 του Θεωρήματος 3.7.	62
3.14 Απλά μη-υποκυβικά γραφήματα κλαδοπλάτους 3 χωρίς τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν εμβυθίσεις.	63
4.1 Παραδείγματα άκυκλων παρεμποδίσεων για το βάθος δέντρου.	80
4.2 Τα απαγορευμένα γραφήματα για την $\mathcal{G}_3$	90
6.1 Ένα h -σχεδόν εμβαπτίσιμο γράφημα.	125
6.2 Παράδειγμα ενός H -ελεύθερου-ελασσόνων γραφήματος.	127
6.3 Το γράφημα Γ_6	128
6.4 Παράδειγμα της Περίπτωσης 1 στο Λήμμα 6.3.	134
6.5 Παράδειγμα της Περίπτωσης 2 στο Λήμμα 6.3.	134
6.6 Παράδειγμα της Υποπερίπτωσης 2.1 στο Λήμμα 6.5.	135
6.7 Παράδειγμα της Υποπερίπτωσης 2.2 στο Λήμμα 6.5.	136
6.8 Η v -στρωτή σύνθλιψη του Θεωρήματος 6.1.	142
6.9 Ο τοίχος του Θεωρήματος 6.1.	143
6.10 Οι τέσσερις υποτοίχοι του τοίχου στο Θεώρημα 6.1.	146
6.11 Η γενική εικόνα στο Θεώρημα 6.1.	147
6.12 Μία μονοεδρική πλακόστρωση του επιπέδου.	154
6.13 Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου με τετράγωνα πλακάκια.	155
6.14 Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από ισόπλευρα τρίγωνα πλακάκια.	156

6.15 Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από κανονικά εζάγωνα πλακάκια.	157
6.16 Η δυϊκότητα των πλακοστρώσεων με ισόπλευρα τρίγωνα και κερήθρες.	158
7.1 Οι σημαντικές κορυφές του δεύτερου στρώματος ενός τοίχου ύψους 5.	164
7.2 Παράδειγμα της κατασκευής ενός δέντρου αποκόλλησης. . . .	166
7.3 Παράδειγμα της διατύπωσης του Λήμματος 7.3.	168
7.4 Τα μονοπάτια T_i στην απόδειξη του Λήμματος 7.4.	170
7.5 Οι σημαντικές κορυφές του L_{j_0} , τα στρώματα L'_1 και L'_2 , και τα μονοπάτια R_i στο Λήμμα 7.4.	171
7.6 Τμήμα των αναδρομολογημένων μονοπατιών στο Λήμμα 7.4. .	173
8.1 Ο τοίχος W_3 ως τοπολογικό ελάχιστον απόστασης ενός ισόπε- δου τοίχου ύψους 13.	189
8.2 Η δισδιαστατότητα του καλύμματος κορυφών.	192
8.3 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας σε ελάχιστα και συνθλίψεις. . .	193
8.4 Η πλήρης Θεωρία Δισδιαστατότητας.	195
8.5 Ένα γράφημα με αριθμό κυριαρχίας κύκλων 1.	199
8.6 Ένα γράφημα με αριθμό σχεδιασμένων κύκλων ίσο με 9. . . .	200
8.7 Ένα σύνολο σχεδιασμένων κύκλων μεγέθους 4 στο Γ_8	201
9.1 Μία τομή σε ένα γράφημα.	210
10.1 Τετριμμένες σχέσεις ανάμεσα στις παραμέτρους ανίχνευσης διγραφημάτων.	255
10.2 Ένα καταφύγιο του P_9 που έχει πάχος 4.	265
10.3 Μία μονότονη επιτυχής ΤΕΠΕ-στρατηγική στο P_9 με 4 ανι- χνευτές.	270

Κατάλογος Πινάκων

9.1	Λίστα των γνωστών αποτελεσμάτων για τον p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ με χρονολογική σειρά.	214
-----	--	-----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά ...

Ας φανταστούμε ένα δωμάτιο μέσα στο οποίο βρίσκονται n άνθρωποι όπου κάποιοι από αυτούς, έστω m , ανά δύο γνωρίζονται ενώ οι υπόλοιποι είναι μεταξύ τους άγνωστοι. Αυτή η τόσο συνήθης κατάσταση, όπως και πλήθος άλλων, μοντελοποιείται με την μαθηματική έννοια του γραφήματος.

Πιο συγκεκριμένα, ένα γράφημα G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο συνόλων (V, E) , όπου το V καλείται *σύνολο κορυφών* του γραφήματος και το E καλείται *σύνολο ακμών* και αποτελείται από δισύνολα του V .

Ενώ το πρώτο αποτέλεσμα της Θεωρίας Γραφημάτων εμφανίστηκε το 1736, με την αρνητική λύση του προβλήματος των γεφυρών του Κένινγκσμπεργκ από τον L. Euler, η ανάπτυξη της θεωρίας αυτής δεν ξεκίνησε έως αρκετά αργότερα και η έννοια του γραφήματος δεν ορίστηκε τυπικά παρά

μέχρι το 1878 [218]. Ωστόσο, η ανάπτυξή της υπήρξε ραγδαία τόσο κατά τη διάρκεια του περασμένου αιώνα, όσο και κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών.

Η συμμετοχή της Θεωρίας Γραφημάτων στην Μαθηματική Επιστήμη είναι πλέον ιδιαίτερα έντονη τόσο στην Συνδυαστική και στα Διακριτά Μαθηματικά όσο και στην Θεωρία Αλγορίθμων.

Σε αυτή την διδακτορική διατριβή μελετάμε μια σειρά από ζητήματα της Θεωρίας Γραφημάτων σχετιζόμενα με την Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων και την Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας, και προσπαθούμε να συνεισφέρουμε έναν ακόμα κόκκο άμμου στα οικοδομήματα αυτών των θεωριών. (Από εδώ και στο εξής θεωρούμε ότι ο αναγνώστης έχει στοιχειώδεις γνώσεις των εννοιών της Θεωρίας Γραφημάτων και της Θεωρίας Αλγορίθμων.)

1.2 ... και Ειδικότερα

Η Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων [185–194, 198–202, 202–209] αναπτύχθηκε από τους N. Robertson και P. Seymour κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας εικασίας, γνωστής ως Εικασία του Wagner. Αφορμή αυτής της εικασίας στάθηκε ένα κλασικό θεώρημα, το Θεώρημα του Kuratowski [142], το οποίο έδωσε έναν πλήρη χαρακτηρισμό των επίπεδων γραφημάτων με όρους απαγορευμένων τοπολογικών ελασσόνων και η μετέπειτα επαναπόδειξή του, από τον Wagner [221], με όρους απαγορευμένων ελασσόνων. Η εικασία του Wagner, γνωστή τώρα ως το Θεώρημα Robertson-Seymour [194], ισχυριζόταν ότι σε κάθε άπειρη οικογένεια γραφημάτων υπάρχουν δύο γραφήματα τέτοια ώστε το ένα να περιέχεται στο άλλο ως ελάσσον.

Τα αποτελέσματα της θεωρίας αυτής ξεκαθάρισαν αρκετά το τοπίο όσον αφορά τις κλάσεις των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο συγκεκριμένο ποιημένο γράφημα σαν ελάσσον, και αποτέλεσαν/αποτελούν πηγή έμπνευσης

αλλά και ισχυρό εργαλείο απόδειξης πολλών ακόμα αποτελεσμάτων στη Δομική [83, 123–125, 196], αλλά και την Αλγοριθμική [5, 51, 86, 90, 212], Θεωρία Γραφημάτων. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα, και στους δύο αυτούς κλάδους, ήταν το πόρισμα ότι κάθε κλάση γραφημάτων που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα, δηλαδή, τέτοια ώστε εάν ένα γράφημα ανήκει στην κλάση τότε και όλα τα ελάσσονά του επίσης ανήκουν στην κλάση, μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα πεπερασμένο σύνολο απαγορευμένων γραφημάτων. Για παράδειγμα, όπως είναι γνωστό, για την κλάση των επίπεδων γραφημάτων τα απαγορευμένα αυτά γραφήματα είναι τα K_5 και $K_{3,3}$. Όπως αναφέραμε πριν λίγο, η σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι διπλή. Στην Θεωρία Αλγορίθμων, η σημασία του έγκειται στο γεγονός ότι για να αποφασίσουμε εάν ένα γράφημα ανήκει σε μία κλειστή ως προς ελάσσονα κλάση γραφημάτων, τότε αρκεί να ελέγξουμε εάν το γράφημα αυτό περιέχει κάποιο από τα απαγορευμένα γραφήματα σαν ελάσσον.

Η απόδειξη αυτού του πορίσματος διευκόλυνε την χρονική κατηγοριοποίηση πολλών NP-πλήρων προβλημάτων. Ο τρόπος ήταν ο εξής. Στο πλαίσιο της ανάπτυξης της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων δόθηκε ένας τρόπος να κατασκευαστεί, για κάθε συγκεκριμενοποιημένο γράφημα H , ένας αλγόριθμος κυβικού χρόνου που για κάθε γράφημα G αποφασίζει εάν το H είναι ελάσσον του G ή όχι (όπου οι σταθερές εξαρτώνται μόνο από το απαγορευμένο γράφημα H) [193]. Το αλγοριθμικό αυτό αποτέλεσμα συνεπάγεται άμεσα την ύπαρξη ενός κυβικού χρόνου αλγόριθμου που αποφασίζει εάν ένα γράφημα G ανήκει σε μία κλειστή ως προς ελάσσονα κλάση γραφημάτων (όπου, όπως πριν, οι σταθερές εξαρτώνται μόνο από την κλάση γραφημάτων).

Ωστόσο, αυτή είναι μία μόνο, τετριμμένη, απόρροια/εφαρμογή της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων στην Θεωρία Αλγορίθμων. Έχει όμως ένα σημαντικό αλγοριθμικό μειονέκτημα. Καθώς μόνο η ύπαρξη ενός τέτοιου αλγόριθμου είναι γνωστή και δεν παρέχεται κανένας τρόπος για την κατασκευή

του, αφού η Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων είναι μη-κατασκευαστική [95], το σύνολο των απαγορευμένων γραφημάτων είναι εν γένει άγνωστο. Άρα, για να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο αλγόριθμο χρειάζεται πρώτα να εντοπίσουμε τα απαγορευμένα γραφήματα μιας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς ελάσσονα.

Εδώ, μελετάμε τα απαγορευμένα γραφήματα για την παράμετρο του βάθους δέντρου (tree-depth) ενός γραφήματος. Είναι γνωστό ότι, η κλάση των γραφημάτων που έχουν βάθος δέντρου φραγμένο από μία σταθερά k , $\mathcal{G}_k$, είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Δείχνουμε ότι, τα απαγορευμένα ελάσσονα για την κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}_k$ έχουν μέγεθος φραγμένο από μία συνάρτηση του k της τάξης $2^{2^{k-1}}$. Στη συνέχεια, δίνουμε έναν ακριβή δομικό χαρακτηρισμό για όλα τα άκυκλα απαγορευμένα γραφήματα αυτής της κλάσης και αποδεικνύουμε ότι είναι ακριβώς $\frac{1}{2}2^{2^{k-1}-k}(1 + 2^{2^{k-1}-k})$. Επιπλέον, εντοπίζουμε ακριβώς όλα τα απαγορευμένα ελάσσονα για τις περιπτώσεις όπου $k \in \{1, 2, 3\}$. (Για την περίπτωση όπου $k = 4$ είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι οι τάξεις μεγέθους είναι ήδη αποθαρρυντικές.) Τέλος, αποδεικνύουμε ένα θεώρημα το οποίο μας υποδεικνύει μία διαδικασία τέτοια ώστε, ξεκινώντας από ένα γράφημα G για το οποίο προσπαθούμε να υπολογίσουμε το βάθος δέντρου του, να αποκτήσουμε ένα γράφημα μικρότερου μεγέθους με το ίδιο βάθος δέντρου. Όπως θα δούμε αργότερα τέτοιοι κανόνες είναι ιδιαίτερα σημαντικοί για την Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας.

Προτού συνεχίσουμε να αναλύουμε τα αποτελέσματα και τις εφαρμογές της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων σχετικά με τη σχέση ελάσσονος, θα θέλαμε εδώ να κάνουμε μία μικρή παράκαμψη και να συζητήσουμε για την σχέση εμπύθισης καθώς θα μας απασχολήσει εξίσου.

Στην τελευταία εργασία των Ελασσόνων Γραφημάτων [211] αποδείχθηκε ότι, αντίστοιχα με την σχέση των ελασσόνων, μία άπειρη οικογένεια γραφημάτων περιέχει δύο γραφήματα που είναι συγκρίσιμα ως προς την σχέση της

εμβύθισης.

Αυτό το αποτέλεσμα, το οποίο ήταν πριν γνωστό ως η εικασία του Nash-Williams, και οι συνέπειες του στις κλάσεις γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις είναι αντίστοιχες με αυτές που έχουν προαναφερθεί για τις κλειστές ως προς ελάσσονα κλάσεις γραφημάτων. Η μόνη διαφορά είναι ότι η αλγοριθμική εφαρμογή απαιτεί τα πρόσφατα αλγοριθμικά αποτελέσματα των M. Grohe, K. Kawarabayashi, D. Marx και P. Wollan στην [109].

Στη συνέχεια, έχοντας απογοητευθεί από την πληθυκότητα που μπορεί να έχει ένα σύνολο απαγορευμένων γραφημάτων, προσπαθούμε να αποκτήσουμε αποδοτικότερους μηχανισμούς για τον εντοπισμό τους: Αλγόριθμους. Κύριος στόχος μας είναι να απαντήσουμε στην παρακάτω ερώτηση. Ποιές πληροφορίες χρειαζόμαστε για μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις έτσι ώστε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο που να εντοπίζει τις απαγορευμένες εμβυθίσεις της;

Χτίζοντας στον μηχανισμό που δημιουργήθηκε από τους I. Adler, M. Grohe, και S. Kreutzer στην [4] για την περίπτωση των ελασσόνων, αποδεικνύουμε ότι οι απαραίτητες προϋποθέσεις είναι ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των απαγορευμένων εμβυθίσεων και μία περιγραφή της κλάσης γραφημάτων στην Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική. Επιπλέον, υπολογίζοντας ένα τέτοιο άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων μιας κλάσης γραφημάτων, η οποία είναι η ένωση δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις και των οποίων τα απαγορευμένα γραφήματα είναι γνωστά, επεκτείνουμε (επίσης) την έννοια της υπολογισιμότητας σε κλάσεις γραφημάτων που είναι πεπερασμένες ενώσεις κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις και των οποίων τα απαγορευμένα γραφήματα είναι γνωστά.

Ας συνεχίσουμε όμως με τα σημαίνοντα δομικά αποτελέσματα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων σχετικά με τη διάταξη των ελασσόνων. Η επιλογή του σημαντικότερου από αυτά είναι πολύ δύσκολη. Θα τολμούσαμε,

όμως, να πούμε ότι εάν κάποιο από αυτά μπορεί να διεκδικήσει την πρώτη θέση τότε αυτό είναι το Ισχυρό Δομικό Θεώρημα που εμφανίστηκε στην εργασία GM XVI [207] και το οποίο αποκαλύπτει την δομή ενός γραφήματος που εξαιρεί κάποιο άλλο γράφημα ως ελάσσον. Η διατύπωση του απαιτεί αρκετά πολύπλοκους ορισμούς και δεν μπορεί να δοθεί στα πλαίσια μιας γενικότερης εισαγωγής. Χονδρικά, όμως, μπορούμε να πούμε ότι εάν ένα γράφημα G δεν περιέχει ένα γράφημα H ως ελάσσον τότε το G έχει δένδρική, με την τοπολογική έννοια, δομή και μπορεί να αποσυντεθεί σε μικρότερα γραφήματα τα οποία σχεδόν μπορούν να εμβαπτιστούν σε μία επιφάνεια όπου το H δεν μπορεί να εμβαπτιστεί.

Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί σημείο αναφοράς για την απόδειξη νέων δομικών χαρακτηρισμών των γραφημάτων αλλά και χρήσιμο εργαλείο στον σχεδιασμό πολλών αλγορίθμων.

Εμπνευσμένοι από το Ισχυρό Δομικό Θεώρημα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων, αποδεικνύουμε έναν δομικό χαρακτηρισμό των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο συγκεκριμενοποιημένο γράφημα H σαν εμβύθιση και τα οποία εμβαπτίζονται σε μία επιφάνεια γένους Euler γ . Για την ακρίβεια, αποδεικνύουμε ότι ένα γράφημα G το οποίο αποκλείει κάποιο γράφημα H σαν εμβύθιση και είναι εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους Euler γ είτε έχει «μικρό» δέντροπλάτος (φραγμένο από μία συνάρτηση των H και γ) είτε έχει «μικρή» ακμοσυνεκτικότητα (φραγμένη από τον μέγιστο βαθμό του H).

Επίσης, εμπνευσμένοι από το Θεώρημα του Kuratowski και το Θεώρημα του Wagner δείχνουμε έναν ακριβή δομικό χαρακτηρισμό για τα γραφήματα που δεν περιέχουν τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν εμβυθίσεις. Για την ακρίβεια, δείχνουμε ότι εάν ένα γράφημα G δεν περιέχει ούτε το K_5 ούτε το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση τότε μπορεί να κατασκευαστεί από επαναλαμβανόμενες ενώσεις απλούστερων γραφημάτων, ξεκινώντας είτε από γραφήματα μικρής αποσυνθεσιμότητας (κλαδοπλάτους το πολύ 10) είτε από επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3.

Για να το δείξουμε αυτό, αποδεικνύουμε ένα ενδιαμέσο αποτέλεσμα για τη συρροότητα μιας οικογένειας από ξένα ως προς ακμές μονοπάτια.

Συνεχίζοντας την γενική αναφορά στη Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων, θα θέλαμε να αναφέρουμε ένα ακόμα δομικό αποτέλεσμα της το οποίο ίσως θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι περισσότερο σημαντικό για την Θεωρία Αλγορίθμων από το Ισχυρό Δομικό Θεώρημα. Αυτό είναι το Ασθενές Δομικό Θεώρημα. Το Ασθενές Δομικό Θεώρημα αποδείχτηκε για πρώτη φορά στην εργασία GM XIII [193] και ήταν το θεώρημα-κλειδί για την κατασκευή του αλγόριθμου που αποφασίζει την περιεκτικότητα ενός γραφήματος ως ελάσσον σε ένα άλλο γράφημα.

Σύμφωνα με το Ασθενές Δομικό Θεώρημα, ένα γράφημα G που δεν περιέχει ένα γράφημα H ως ελάσσον και έχει «αρκετά μεγάλο» δεντροπλάτος περιέχει, μετά την αφαίρεση ενός «μικρού» αριθμού κορυφών, έναν ισόπεδο τοίχο ως υπογράφημα. Η έννοια της ισοπεδότητας δεν είναι εύκολο να οριστεί σε αυτό το στάδιο αλλά μπορούμε προσωρινά να σκεφτόμαστε ότι ο τοίχος είναι διευθετημένος με έναν επίπεδο τρόπο μέσα στο γράφημα.

Μεγάλο πλήθος αλγοριθμικών εφαρμογών απορρέουν από αυτό το θεώρημα [4, 42, 88, 90, 106, 116–118, 120–122, 127, 130, 131, 133, 134, 138]. Ο λόγος είναι ότι μία τεχνική, η τεχνική της μη-σχετικής κορυφής, που εισήχθη από τους N. Robertson και P. Seymour υποδεικνύει ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε μία κορυφή από το γράφημα, και συγκεκριμένα τη «μεσαία» κορυφή του τοίχου, και να καταλήξουμε σε μία ισοδύναμη είσοδο. Για επιπλέον εφαρμογές της ευρύτερης ιδέας, δείτε στις [44, 85, 115, 154].

Η ιδέα, τότε, πίσω από τον αλγόριθμο είναι η εξής. Εάν έχουμε ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει ένα γράφημα H ως ελάσσον τότε ελέγχουμε εάν έχει «αρκετά μεγάλο» δεντροπλάτος. Σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα έχει έναν «αρκετά μεγάλο» τοίχο από τον οποίο μπορούμε να αφαιρέσουμε κάποια συγκεκριμένη κορυφή και να αποκτήσουμε μία ισοδύναμη

είσοδο μικρότερου μεγέθους. Διαφορετικά, το γράφημα έχει μικρό δεντροπλάτος και μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζοντας την τεχνική του δυναμικού προγραμματισμού.

Είναι εύκολο να δούμε ότι για την εφαρμογή του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος σε αλγοριθμικά προβλήματα είναι επιθυμητό η σχέση ανάμεσα στο ύψος του τοίχου και το κάτω φράγμα στο δεντροπλάτος του γραφήματος που διασφαλίζει την ύπαρξη του τοίχου να είναι η βέλτιστη δυνατή.

Για το λόγο αυτό, αποδεικνύουμε μία βελτιστοποιημένη έκδοση του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος στην οποία και το πλήθος των κορυφών που χρειάζεται να αφαιρέσουμε ώστε να προκύψει ο ισόπεδος τοίχος αλλά και η σχέση ανάμεσα στο δεντροπλάτος του γραφήματος και το ύψος του τοίχου είναι γραμμικά, και άρα τα βέλτιστα δυνατά.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό και δύο ακόμα, προϋπάρχοντα στην βιβλιογραφία, αποτελέσματα, συζητάμε πως η διυκνότητα κάποιων πλαχοστρώσεων του επιπέδου «επεκτείνεται» στον κόσμο των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο συγκεκριμένο απόγειο γράφημα σαν ελάχιστον.

Επιστρέφοντας στην Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων, στρέφουμε τώρα την προσοχή μας σε κάποιες από τις θεωρίες που ενθαρρύνθηκαν και εμπνεύστηκαν από τα αποτελέσματά της. Πρώτη από αυτές είναι η Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας [66, 82, 172]. Στη Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας η είσοδος κάθε αλγοριθμικού προβλήματος είναι ένα ζεύγος του οποίου η πρώτη συνιστώσα είναι το γράφημα που εισάγουμε ενώ η δεύτερη συνιστώσα είναι μία συνάρτηση, η οποία καλείται παραμετροποίηση του προβλήματος. Στόχος της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας είναι να εξετάσει και να κατηγοριοποιήσει την χρονική εξάρτηση της επίλυσης αυτών των προβλημάτων από την κάθε παραμετροποίηση τους. Σύμφωνα με τον M. Langston, ένα από τα πρώτα ερεθίσματα που οδήγησαν προς αυτή την

κατεύθυνση ήταν το αποτέλεσμα ότι κάθε κλειστή ως προς ελάχισσωνα κλάση γραφημάτων μπορεί να αναγνωριστεί σε κυβικό χρόνο [22]. Αυτό έκανε σαφές ότι κάποια NP-πλήρη προβλήματα μπορούν να επιλυθούν σε κυβικό χρόνο όταν η παράμετρος τους συγκεκριμενοποιηθεί, ενώ άλλα δεν είναι αναμενόμενο να έχουν τόσο «καλή συμπεριφορά».

Μία άλλη θεωρία βασισμένη σε δομικά θεωρήματα των Ελασσόνων Γραφημάτων είναι η Θεωρία Δισδιαστατότητας [50, 83]. Η Θεωρία Δισδιαστατότητας είναι βασισμένη σε θεωρήματα σύμφωνα με τα οποία ένα γράφημα G , που αποκλείει κάποιο άλλο γράφημα H και έχει «αρκετά μεγάλο» δέντροπλάτος, περιέχει επίσης ένα γράφημα για το οποίο η παράμετρος είναι «δισδιάστατη». Αυτό πολλές φορές λειτουργεί ως πιστοποιητικό σύμφωνα με το οποίο η εξάρτηση του χρόνου επίλυσης ενός παραμετροποιημένου προβλήματος από την παραμετροποίηση του είναι «καλή».

Αναλύουμε αυτές τις έννοιες και δείχνουμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε την βελτιστοποιημένη έκδοση του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος έτσι ώστε να σχεδιάσουμε παραμετρικά βατούς αλγόριθμους. Συμπληρώνουμε επίσης την «εικόνα» της Δισδιαστατότητας πέρα από τις σχέσεις ελασσόνων και συνθλίψεων, για τις οποίες ήταν ήδη εδραιωμένη, για παραμέτρους κλειστές ως προς τοπολογικά ελάχισσωνα (απόστασης).

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι, όλες οι αλγοριθμικές λύσεις προβλημάτων που έχουμε αναφέρει αφορούν είτε σε συγκεκριμένα είδη προβλημάτων (για παράδειγμα, αναγνώριση κλειστών ως προς ελάχισσωνα κλάσεων γραφημάτων) είτε σε προβλήματα που η είσοδος τους είναι περιορισμένη (για παράδειγμα, η είσοδος είναι κάποιο γράφημα G που δεν περιέχει κάποιο συγκεκριμενοποιημένο γράφημα ως ελάσσον). Πολλές φορές αυτοί οι περιορισμοί μας δίνουν, πράγματι, καλύτερο χρόνο επίλυσης του προβλήματος απ' ό,τι αν θεωρήσουμε γενικά γραφήματα. Ωστόσο, θα θέλαμε να επιλύσουμε και προβλήματα τα οποία έχουν ως είσοδο γενικά γραφήματα.

Σε αυτή τη διατριβή, ασχολούμαστε με το πρόβλημα της μέγιστης τομής σε υπεργραφήματα, δηλαδή με το πρόβλημα του διαχωρισμού συνόλων. Σε αυτό το πρόβλημα, μας δίνεται ένα υπεργράφημα και σκοπός μας είναι να χρωματίσουμε τις κορυφές του με δύο χρώματα έτσι ώστε να επιτύχουμε το μέγιστο δυνατό πλήθος υπερακμών που περιέχουν κορυφές και των δύο χρωμάτων. Το ακριβές πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε είναι μία «άνω της εγγύησης» παραμετροποιημένη έκδοση του r -Διαχωρισμού Συνόλων. Αποδεικνύουμε μία διχοτομία στην χρονική πολυπλοκότητα αυτού του προβλήματος. Για την ακρίβεια, δείχνουμε ότι αυτό το πρόβλημα είναι παραμετρικά βατό όταν $r < \log n$, αλλά η πολυπλοκότητά του εκτινάσσεται όταν $r \geq \log n$. Δείχνουμε επίσης έναν πυρήνα γραμμικού πλήθους κορυφών όταν $r = O(1)$.

Τέλος, επανερχόμαστε την παράμετρο του βάθους δέντρου. Μελετάμε μία γενίκευσή του σε διατεταγμένα γραφήματα από την σκοπιά της Ανίχνευσης Γραφημάτων. Δείχνουμε έναν πλήρη παιγνιοθεωρητικό χαρακτηρισμό και ένα μεγιστοελάχιστο θεώρημα για τα απλά αλλά και για τα διατεταγμένα γραφήματα.

1.3 Η οργάνωση της διατριβής

Στο Κεφάλαιο 2, ορίζουμε τις απαραίτητες έννοιες από την Θεωρία Γραφημάτων και τη Λογική, τις οποίες χρησιμοποιούμε ευρέως σε όλο το κείμενο.

Στο Κεφάλαιο 3, συζητάμε τις βασικότερες μερικές διατάξεις σε Γραφήματα. Αναφέρουμε αναλυτικά τα βασικότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων σε αυτές. Στη συνέχεια, εμπνευσμένοι από το Θεώρημα του Kuratowski δείχνουμε ένα θεώρημα το οποίο αποσυνθέτει τα γραφήματα που δεν περιέχουν τα γραφήματα του Kuratowski σαν εμβυθίσεις. Τέλος, συζητάμε τις βασικότερες αλγοριθμικές εφαρμογές της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων.

Στο Κεφάλαιο 4, μελετάμε την παράμετρο του βάθους δέντρου η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Δείχνουμε ότι οι παρεμποδίσεις, δηλαδή τα ελαχιστικά ως προς ελάσσονα γραφήματα που δεν ανήκουν στην κλάση γραφημάτων, της $\mathcal{G}_k$ έχουν μέγεθος φραγμένο από μία συνάρτηση της τάξης $2^{2^{k-1}}$. Δίνουμε επίσης έναν ακριβή δομικό χαρακτηρισμό για τις άκυκλες παρεμποδίσεις, ο οποίος με τη σειρά του μας διευκολύνει να απαριθμήσουμε ακριβώς όλες τις άκυκλες παρεμποδίσεις της $\mathcal{G}_k$. Αυτές είναι $\frac{1}{2}2^{2^{k-1}-k}(1 + 2^{2^{k-1}-k})$. Έπειτα, εντοπίζουμε ακριβώς όλα τα απαγορευμένα ελάσσονα για τις περιπτώσεις όπου $k \in \{1, 2, 3\}$. Τέλος, δείχνουμε ένα θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να βρίσκουμε γνήσια υπογραφήματα ενός γραφήματος με βάθος δέντρου k , τα οποία έχουν επίσης βάθος δέντρου k .

Στο Κεφάλαιο 5, μελετάμε το πρόβλημα του υπολογισμού των συνόλων παρεμποδίσεων για κλάσεις γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις. Δείχνουμε ότι, για τον επαρκή υπολογισμό του συνόλου παρεμποδίσεων μίας τέτοιας κλάσης γραφημάτων, μας αρκεί ένα άνω φράγμα στο δεντροπλάτος των παρεμποδίσεων και μία περιγραφή της κλάσης γραφημάτων στη Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική.

Στο Κεφάλαιο 6, δείχνουμε μία βελτιστοποιημένη έκδοση του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων στην οποία όλες οι παραμετρικές εξαρτήσεις είναι βελτιστοποιημένες. Επιπλέον, συζητάμε πως ένα πόρισμα αυτού του θεωρήματος και ένα προϋπάρχον θεώρημα, το οποίο μπορεί επίσης να προκύψει ως πόρισμα του αποτελέσματός μας, «επεκτείνουν» την δυϊκότητα της κανονικής πλακόστρωσης με τρίγωνα και της κανονικής πλακόστρωσης με εξάγωνα στα γραφήματα που αποκλείουν ένα απόγειο γράφημα σαν ελάσσον.

Στο Κεφάλαιο 7, δείχνουμε ένα δομικό θεώρημα για τα γραφήματα τα οποία είναι εμβαπτισμένα σε μία επιφάνεια γένους Euler γ και αποκλείουν ένα συγκεκριμένο γράφημα H ως εμβύθιση. Για την ακρίβεια, δείχνουμε

ότι σε αυτή την περίπτωση το γράφημα είτε έχει δέντροπλάτος φραγμένο από κάποια συνάρτηση του H και του γ είτε έχει ακμοσυνεκτικότητα φραγμένη από τον μέγιστο βαθμό του H .

Στο Κεφάλαιο 8, ορίζουμε τις απαραίτητες έννοιες από την Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας. Στη συνέχεια, δείχνουμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε την βελτιστοποιημένη έκδοση του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος για να πάρουμε μια απόδειξη ενός αποτελέσματος των F. Dragan, F. Fomin και P. Golovach σε παράγοντες γραφημάτων [67] με απλούστερο και συντομότερο τρόπο. Έπειτα, συζητάμε τα βασικά στοιχεία της Θεωρίας Δισδιαστατότητας, και δείχνουμε πως μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε, έτσι ώστε να δείξουμε πως δύο δυϊκές γραφοθεωρητικές παράμετροι έχουν την ιδιότητα Erdős-Pósa. Τέλος, συζητάμε την Θεωρία Πυρηνοποίησης και την ισοδυναμία της με την παραμετρική βατότητα.

Στο Κεφάλαιο 9, ασχολούμαστε με μία «άνω της εγγύησης» παραμετροποίηση του Διαχωρισμού Συνόλων. Πρώτα, δείχνουμε μία γενίκευση του κάτω φράγματος του μεγέθους μιας τομής ενός γραφήματος του Edwards για την περίπτωση των συνεκτικών ως προς διαμερίσεις υπεργραφημάτων. Στη συνέχεια, συνδυάζοντάς την με δύο κανόνες αναγωγής, αποδεικνύουμε έναν γραμμικό, στο πλήθος των κορυφών του υπεργραφήματος, πυρήνα όταν το μέγεθος των υπερακμών είναι $O(1)$. Έπειτα, δείχνουμε ότι το πρόβλημα είναι παραμετρικά βατό όταν το μέγεθος των υπερακμών είναι μικρότερο από $\log n$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών. Συμπληρώνουμε αυτό το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι το πρόβλημα δεν αναμένεται να ανήκει ούτε καν στο XP , δηλαδή δεν επιλύεται σε $n^{f(k)}$ βήματα, όταν το μέγεθος των υπερακμών είναι τουλάχιστον $\log n$.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 10, δίνουμε έναν εναλλακτικό ορισμό για την παράμετρο του βάθους δέντρου και για την παράμετρο της τάξης κύκλου, η οποία είναι επέκταση του βάθους δέντρου σε διατεταγμένα γραφήματα, σε

όρους Ανίχνευσης Γραφημάτων. Δείχνουμε ότι τα παίγνια αυτά χαίρουν μονοτονίας και στην απλή αλλά και στην διατεταγμένη περίπτωση και ο αριθμός των απαραίτητων ανιχνευτών δεν εξαρτάται από την ορατότητα του φυγά. Τέλος, δείχνουμε μεγιστοελάχιστα θεωρήματα για αυτές τις παραμέτρους τα οποία μας φανερώνουν την δομή των παρεμποδίσεων τους.

Μέρος των αποτελεσμάτων της διατριβής αυτής έχει παρουσιαστεί στις εργασίες [69, 97–105].

1.4 Οι εργασίες

- [69] Zdeněk Dvořák, Archontia C. Giannopoulou, and Dimitrios M. Thilikos. Forbidden graphs for tree-depth. *Eur. J. Comb.*, 33(5):969–979, 2012.

Αυτή η δημοσίευση είναι βασισμένη σε τμήματα του Κεφαλαίου 4.

- [97] Archontia C. Giannopoulou, Paul Hunter, and Dimitrios M. Thilikos. Lifo-search: A min-max theorem and a searching game for cycle-rank and tree-depth. *Discrete Applied Mathematics*, 160(15):2089–2097, 2012.

Αυτή η δημοσίευση είναι βασισμένη στο Κεφάλαιο 10.

- [98] Archontia C. Giannopoulou, Marcin Kamiński, and Dimitrios M. Thilikos. Excluding graphs as immersions in surface embedded graphs. unpublished manuscript.

Αυτή η εργασία είναι βασισμένη στο Κεφάλαιο 7.

- [99] Archontia C. Giannopoulou, Marcin Kamiński, and Dimitrios M. Thilikos. Forbidding kuratowski graphs as immersions. *CoRR*, abs/1207.5329, 2012.

Αυτή η εργασία είναι βασισμένη σε τμήμα του Κεφαλαίου 3.

- [100] Archontia C. Giannopoulou, Sudeshna Kolay, and Saket Saurabh. New lower bound on max cut of hypergraphs with an application to r -set splitting. In David Fernández-Baca, editor, *LATIN*, volume 7256 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 408–419. Springer, 2012.

Αυτή η δημοσίευση είναι βασισμένη στο Κεφάλαιο 9.

- [101] Archontia C. Giannopoulou, Iosif Salem, and Dimitris Zoros. Effective computation of immersion obstructions for unions of graph classes. In Fedor V. Fomin and Petteri Kaski, editors, *SWAT*, volume 7357 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 165–176. Springer, 2012.

Αυτή η δημοσίευση είναι βασισμένη σε τμήματα του Κεφαλαίου 5.

- [102] Archontia C. Giannopoulou, Iosif Salem, and Dimitris Zoros. Effective computation of immersion obstructions for unions of graph classes. *CoRR*, abs/1207.5636, 2012.

Αυτή η εργασία είναι πληρέστερη μορφή της [101].

- [103] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. Obstructions for tree-depth. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:249–253, 2009.

Αυτή η δημοσίευση είναι προκαταρκτική έκδοση της [69].

- [104] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. A min-max theorem for lifo-search. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38:395–400, 2011.

Αυτή η δημοσίευση είναι προκαταρκτική έκδοση της [97].

- [105] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. Optimizing the graph minors weak structure theorem. *CoRR*, abs/1102.5762, 2011.

Αυτή η εργασία είναι βασισμένη σε τμήματα του Κεφαλαίου 6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές Έννοιες

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $[n]$ το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$. Επιπλέον, για κάθε $k \leq n$, εάν το S είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε $|S| = n$ λέμε ότι ένα σύνολο $S' \subseteq S$ είναι ένα k -υποσύνολο του S εάν $|S'| = k$.

Δοσμένου ενός συνόλου S , συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(S)$ το δυναμοσύνολό του.

2.1 Γραφήματα

Ένα *γράφημα* (*graph*) G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (V, E) , όπου το V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το οποίο καλείται *σύνολο κορυφών* (*vertex set*) και συμβολίζεται $V(G)$, και το E είναι ένα σύνολο 2-υποσυνόλων του V , το οποίο καλείται *σύνολο ακμών* (*edge set*) και συμβολίζεται $E(G)$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{n}(G)$ το πλήθος των κορυφών του G , δηλαδή, $\mathbf{n}(G) = |V(G)|$, και με $\mathbf{m}(G)$ το πλήθος των ακμών του, δηλαδή, $\mathbf{m}(G) = |E(G)|$.

Εάν επιτρέψουμε στο E να είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(V)$, τότε καλούμε το ζεύγος $H = (V(H), E(H))$ υπεργράφημα (*hypergraph*).

Επιπλέον, εάν επιτρέψουμε στο $E(G)$ να είναι πολυσύνολο (*multiset*), δηλαδή, εάν ένα σύνολο S μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές στο $E(G)$, τότε το γράφημα G καλείται πολυγράφημα (*multigraph*).

Τέλος, εάν το $E(G)$ είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα 2-υποσύνολα του V , τότε το G καλείται διατεταγμένο γράφημα (*directed graph*) ή δηγράφημα (*digraph*). Εκτός εάν αναφέρουμε διαφορετικά, θεωρούμε πεπερασμένα μη-διατεταγμένα γραφήματα χωρίς θηλιές (*loops*) ή παράλληλες ακμές (*parallel edges*).

Το γράφημα όπου $V(G) = E(G) = \emptyset$ καλείται κενό (*empty*) γράφημα.

Λέμε ότι δύο κορυφές v και u ενός γραφήματος G είναι γειτονικές (*adjacent*) εάν $\{v, u\} \in E(G)$. Επιπλέον, για κάθε $v \in V(G)$ λέμε ότι μια ακμή e του G είναι προσπίπτουσα (*incident*) στη v εάν $v \in e$.

Για κάθε κορυφή v , συμβολίζουμε με $N_G(v)$ την (ανοικτή) γειτονιά (*(open) neighborhood*) της, δηλαδή, το σύνολο των κορυφών που είναι γειτονικές με τη v . Η κλειστή γειτονιά (*closed neighborhood*) $N_G[v]$ της v είναι το σύνολο $N_G(v) \cup \{v\}$. Για $U \subseteq V(G)$, ορίζουμε $N_G(U) = \bigcup_{v \in U} N_G(v)$ και $N_G[U] = \bigcup_{v \in U} N_G[v]$ την ανοικτή και την κλειστή γειτονιά του συνόλου U αντίστοιχα. Θέτουμε $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ και το ονομάζουμε βαθμό (*degree*) της κορυφής v στο G . Επιπλέον, θέτουμε $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} \deg_G(v)$ και $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg_G(v)$. Ας σημειώσουμε εδώ ότι, σε ένα πολυγράφημα G , για κάθε $v \in V(G)$, $|N_G(v)| \leq \deg_G(v)$. Μπορεί να παραλείψουμε τον δείκτη εάν το γράφημα που θεωρούμε είναι εμφανές από το περιεχόμενο. Ένα γράφημα G καλείται υποκυβικό (*subcubic*) εάν $\Delta(G) \leq 3$. Τέλος, δοσμένης μιας κορυφής v ενός γραφήματος G , συμβολίζουμε με $E_G(v)$ τις ακμές του G που προσπίπτουν στη v .

Ένα γράφημα είναι ένα μονοπάτι (*path*) (αντίστοιχα κύκλος (*cycle*)) εάν

μπορούμε να διατάξουμε τις κορυφές του σε μία γραμμική (αντίστοιχα κυκλική) ακολουθία με τέτοιο τρόπο ώστε δύο κορυφές να είναι γειτονικές εάν και μόνο εάν είναι διαδοχικές στην ακολουθία. Τα άκρα (*endpoints*) ενός μονοπατιού είναι η πρώτη και η τελευταία κορυφή της ακολουθίας. Ένας περίπατος (*walk*) σε ένα γράφημα G είναι μία ακολουθία από στοιχεία του $V(G)$ (όπου μία κορυφή μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές) τέτοια ώστε κάθε δύο διαδοχικές κορυφές της ακολουθίας είναι γειτονικές. Συμβολίζουμε με C_n (αντίστοιχα P_n) τον κύκλο (αντίστοιχα, το μονοπάτι) που έχει n κορυφές. Το μήκος (*length*) ενός μονοπατιού ή ενός κύκλου ορίζεται ως το πλήθος των ακμών του. Δοσμένου ενός μονοπατιού P και $v, u \in V(P)$ συμβολίζουμε με $P[v, u]$ το υπομονοπάτι του με άκρα v και u .

Δύο γραφήματα καλούνται *ξένα ως προς κορυφές* (*vertex-disjoint*) εάν δεν μοιράζονται κοινές κορυφές και *ξένα ως προς ακμές* (*edge-disjoint*) εάν δεν μοιράζονται κοινές ακμές.

Δοσμένων δύο μονοπατιών P_1 και P_2 , τα οποία μοιράζονται ένα κοινό άκρο v , λέμε ότι είναι *καλώς-κατεταγμένα* (*well-arranged*) εάν οι κοινές τους κορυφές εμφανίζονται με την ίδια σειρά και στα δύο μονοπάτια. Με άλλα λόγια, εάν $S = V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, v_1, v_2, \dots, v_{|S|-1}\}$ και $uv_1v_2 \dots v_{|S|-1}$ είναι η ακολουθία σύμφωνα με την οποία οι κορυφές του S εμφανίζονται στο P_1 τότε $uv_1v_2 \dots v_{|S|-1}$ είναι επίσης η ακολουθία σύμφωνα με την οποία εμφανίζονται στο P_2 .

Δοσμένων δύο κορυφών v, u σε ένα γράφημα G , η απόστασή (*distance*) τους στο G , την οποία συμβολίζουμε με $\mathbf{dist}_G(v, u)$, ισούται με το ελάχιστο μήκος ενός μονοπατιού στο G με άκρα v και u . Επιπλέον, δοσμένης μία κορυφής v (αντίστοιχα ενός συνόλου κορυφών S) σε ένα γράφημα G , η γειτονιά της v (αντίστοιχα του S) σε απόσταση το πολύ r , την οποία συμβολίζουμε με $N_G^r[v]$ (αντίστοιχα με $N_G^r[S]$), είναι το σύνολο που αποτελείται από όλες τις κορυφές του G που απέχουν απόσταση το πολύ r από τη v (αντίστοιχα από

κάποια από τις κορυφές του S).

Ένα γράφημα G είναι *χορδικό* (*chordal*) ή *τρηγωνοποιημένο* (*triangulated*) εάν κάθε κύκλος του C , μήκους $k \geq 4$, περιέχει μία *χορδή* (*chord*), όπου χορδή είναι μία ακμή που συνδέει δύο μη-διαδοχικές κορυφές του C . Μία *τρηγωνοποίηση* (*triangulation*) ενός γραφήματος G είναι ένα χορδικό γράφημα G' τέτοιο ώστε $V(G) = V(G')$ και $E(G) \subseteq E(G')$.

Ένας γράφημα καλείται *πλήρες* (*complete*) εάν όλες οι κορυφές του είναι ανά δύο γειτονικές και το πλήρες γράφημα με n κορυφές συμβολίζεται K_n . Επιπλέον, εάν S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, συμβολίζουμε με $K[S]$ το πλήρες γράφημα με σύνολο κορυφών S .

Ένα γράφημα G καλείται *διμερές* (*bipartite*) εάν μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο κορυφών του σε δύο υποσύνολα X και Y έτσι ώστε κάθε ακμή του να έχει ένα άκρο στο X και ένα άκρο στο Y . Τα X και Y καλούνται *μέρη* (*parts*) της διαμέρισης. Ένα διμερές γράφημα G καλείται *πλήρες διμερές* (*complete bipartite*) εάν για κάθε κορυφή $x \in X$, $N_G(x) = Y$ και για κάθε κορυφή $y \in Y$, $N_G(y) = X$. Συμβολίζουμε με $K_{q,r}$ το πλήρες διμερές γράφημα όπου το ένα μέρος έχει μέγεθος q και το άλλο μέρος έχει μέγεθος r , όπου $q, r \in \mathbb{N}$. Στην περίπτωση όπου $q = 1$ το γράφημα αυτό, δηλαδή το $K_{1,r}$, καλείται επίσης και *αστέρι* (*star*).

Ένα γράφημα καλείται *συνεκτικό* (*connected*) εάν, για κάθε διαμέριση του συνόλου κορυφών του σε δύο μη-κενά υποσύνολα X και Y , υπάρχει μία ακμή που έχει μία κορυφή στο X και μία κορυφή στο Y . Ένα γράφημα καλείται *δέντρο* (*tree*) εάν είναι συνεκτικό και δεν υπάρχει υποσύνολο των ακμών και των κορυφών του που να σχηματίζει κύκλο. Δοσμένου ενός δέντρου T , καλούμε *φύλλα* (*leaves*) τις κορυφές βαθμού 1 και λέμε ότι το δέντρο είναι *τριαδικό* (*ternary*) εάν όσες κορυφές του δεν είναι φύλλα έχουν βαθμό ακριβώς 3.

Δοσμένων δύο γραφημάτων G και G' , η *ένωση* (*union*) τους $G \cup G'$ και

η τομή (*cut*) τους $G \cap G'$ είναι τα γραφήματα με $V(G \cup G') = V(G) \cup V(G')$ και $E(G \cup G') = E(G) \cup E(G')$, και με $V(G \cap G') = V(G) \cap V(G')$ και $E(G \cap G') = E(G) \cap E(G')$ αντίστοιχα. Εάν $G \cap G' = \emptyset$ τότε τα γραφήματα G και G' καλούνται *ξένα* (*disjoint*) και η ένωσή τους καλείται *ξένη ένωση* (*disjoint union*). Έστω $\mathcal{C}$ μία κλάση γραφημάτων και S ένα σύνολο από κορυφές. Συμβολίζουμε με $\mathbf{UC}$ το γράφημα $\bigcup_{G \in \mathcal{C}} G$ και θέτουμε $\mathcal{C} \setminus S = \{G \setminus S \mid G \in \mathcal{C}\}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι κάθε γράφημα G μπορεί να εκφραστεί μοναδικά σαν μία ξένη ένωση συνεκτικών γραφημάτων. Τα γραφήματα αυτά καλούνται *συνεκτικές συνιστώσες* (*connected components*) του G . Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(G)$ το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών ενός γραφήματος G . Όταν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος είναι δέντρα, τότε το γράφημα αυτό καλείται *δάσος* (*forest*).

Το *γραμμικό γράφημα* (*line graph*) ενός γραφήματος G , το οποίο συμβολίζεται με $L(G)$, είναι το γράφημα $(E(G), X)$, όπου $X = \{\{e_1, e_2\} \subseteq E(G) \mid e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \wedge e_1 \neq e_2\}$.

Δοσμένων δύο γραφημάτων G και H , το *λεξικογραφικό γινόμενο* (*lexicographic product*) $G \times H$, είναι το γράφημα με $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ και $E(G \times H) = \{\{(x, y), (x', y')\} \mid (\{x, x'\} \in E(G)) \vee (x = x' \wedge \{y, y'\} \in E(H))\}$.

Επιπλέον, το *καρτεσιανό γινόμενο* (*cartesian product*) του G και του H , είναι το γράφημα $G * H$ με $V(G * H) = V(G) \times V(H)$ και $E(G * H) = \{\{(x, y), (x', y')\} \mid (\{x, x'\} \in E(G) \wedge y = y') \vee (x = x' \wedge \{y, y'\} \in E(H))\}$.

Ένας *k-χρωματισμός* (*k-coloring*) ενός γραφήματος G είναι μία συνάρτηση $f : V(G) \rightarrow [k]$ η οποία αναθέτει *χρώματα* (*colors*) στις κορυφές του. Ένας *k-χρωματισμός* είναι *έγκυρος* (*proper*) εάν δεν υπάρχουν δύο γειτονικές κορυφές του γραφήματος στις οποίες έχει αναθέσει το ίδιο χρώμα. Ο *χρωματικός αριθμός* (*chromatic number*) ενός γραφήματος G είναι ο ελάχιστος

ακέραιος k για τον οποίο το G επιδέχεται έναν έγκυρο k -χρωματισμό.

Μετασχηματισμοί Γραφημάτων

Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα, $v \in V(G)$ και $e \in E(G)$. Το γράφημα $G - v$, που προκύπτει από το G αφού αφαιρέσουμε την κορυφή v , είναι το γράφημα όπου $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$ και $E(G - v) = \{e \in E(G) \mid e \cap \{v\} = \emptyset\}$. Το γράφημα $G - e$, που προκύπτει από το G αφού αφαιρέσουμε την ακμή e είναι το γράφημα όπου $V(G - e) = V(G)$ και $E(G - e) = E(G) \setminus \{e\}$. Εάν $U \subseteq V(G)$ ($E \subseteq E(G)$) τότε $G - U$ (αντίστοιχα $G - E$) είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αφού αφαιρέσουμε όλες τις κορυφές του U (αντίστοιχα τις ακμές του E).

Δοσμένης μιας ακμής $e = \{x, y\}$ ενός γραφήματος G , συμβολίζουμε με G/e το γράφημα που προκύπτει από το G μετά την σύνθλιψη (*contraction*) της ακμής e , δηλαδή, από την αντικατάσταση των κορυφών x και y από μία νέα κορυφή v_{xy} η οποία είναι γειτονική με τους γείτονες των x και y (εκτός των x και y). Επιπροσθέτως, εάν ένα από τα άκρα της e , έστω το v , έχει βαθμό 2 τότε η σύνθλιψη της e ονομάζεται, επίσης, διάλυση (*dissolution*) της κορυφής v .

Η ανύψωση (*lift*) δύο ακμών $e_1 = \{x, y\}$ και $e_2 = \{x, z\}$ σε μία ακμή e είναι η πράξη της αφαίρεσης των e_1 και e_2 από το G και της πρόσθεσης της ακμής $e = \{y, z\}$ στο προκύπτον γράφημα.

Έστω ότι G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε $K_3 \subseteq G$ και x, y, z είναι οι κορυφές του K_3 . Ο ΔY -μετασχηματισμός (ΔY -transformation) του K_3 στο G είναι ο ακόλουθος: Αφαιρούμε τις ακμές $\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}$, προσθέτουμε μία νέα κορυφή w , και, στη συνέχεια, προσθέτουμε τις ακμές $\{x, w\}, \{y, w\}, \{z, w\}$.

Συνεκτικότητα

Έστω ένας ακέραιος k . Ένα γράφημα G είναι k -συνεκτικό (k -connected) εάν, για κάθε $S \subseteq V(G)$ με $|S| < k$, το γράφημα $G \setminus S$ είναι συνεκτικό. Η *συνεκτικότητα* (*connectivity*) ενός γραφήματος G είναι ο μέγιστος ακέραιος k για τον οποίο το G είναι k -συνεκτικό. Ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ για το οποίο το $G \setminus S$ δεν είναι συνεκτικό ονομάζεται *διαχωριστής* (*separator*) του G .

Παρόμοια, ένα γράφημα G είναι k -ακμοσυνεκτικό (k -edge-connected) εάν, για κάθε $F \subseteq E(G)$ με $|F| < k$, το γράφημα $G \setminus F$ είναι συνεκτικό. Η *ακμοσυνεκτικότητα* (*edge-connectivity*) ενός γραφήματος G είναι ο μέγιστος ακέραιος k για τον οποίο το G είναι k -ακμοσυνεκτικό. Ένας *ακμοδιαχωριστής* (*edge-cut*) ενός γραφήματος G είναι ένα μη-κενό σύνολο F από ακμές οι οποίες ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G και τέτοιες ώστε το $G \setminus F$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G . Εάν το $G \setminus F$ έχει ακριβώς μία παραπάνω συνεκτική συνιστώσα από το G , τότε λέμε ότι το F είναι ένας *ελάχιστος* (*minimal*) *ακμοδιαχωριστής*. Έστω ότι F είναι ένας ακμοδιαχωριστής του γραφήματος G και έστω ότι G' είναι η συνεκτική συνιστώσα του G που περιέχει τις ακμές του F . Λέμε ότι ο F είναι ένας *εσωτερικός ακμοδιαχωριστής* (*internal edge-cut*) εάν είναι ελαχιστικός και αμφότερες οι συνεκτικές συνιστώσες του $G' \setminus F$ περιέχουν τουλάχιστον 2 κορυφές. Τέλος, εάν $|F| = k$, καλούμε το F έναν k -ακμοδιαχωριστή (k -edge-cut).

Μερικές Διατάξεις σε Γραφήματα

Για ένα γράφημα H λέμε ότι είναι

- ένα *εναγόμενο υπογράφημα* (*induced subgraph*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \sqsubseteq G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις κορυφών.

- ένα παραγόμενο υπογράφημα (*spanning subgraph*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \subseteq_s G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις ακμών.
- ένα υπογράφημα (*subgraph*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \subseteq G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις κορυφών και ακμών.
- μία σύνθλιψη (*contraction*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \leq_c G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας συνθλίψεις ακμών. Ένας εναλλακτικός, και μερικές φορές περισσότερο χρήσιμος για τους σκοπούς μας, ορισμός της σύνθλιψης είναι ο επόμενος.

Έστω ότι G και H είναι γραφήματα και έστω πως $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ είναι μία επί απεικόνιση τέτοια ώστε

1. για κάθε κορυφή $v \in V(H)$, η αντίστροφη εικόνα της, $\phi^{-1}(v)$, ενάγει το συνεκτικό γράφημα $G[\phi^{-1}(v)]$,
2. για κάθε ακμή $\{v, u\} \in E(H)$, το γράφημα $G[\phi^{-1}(v) \cup \phi^{-1}(u)]$ είναι συνεκτικό,
3. για κάθε $\{v, u\} \in E(G)$, είτε $\phi(v) = \phi(u)$ είτε $\{\phi(v), \phi(u)\} \in E(H)$.

Λέμε τότε ότι το γράφημα H είναι μία σύνθλιψη του G μέσω της ϕ και το συμβολίζουμε με $H \leq_c^\phi G$. Εάν $H \leq_c^\phi G$ και $v \in V(H)$, τότε καλούμε την αντίστροφη εικόνα $\phi^{-1}(v)$ μοντέλο της v (*model*) στο G .

- ένα ελάσσον (*minor*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \leq_m G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις κορυφών και ακμών και συνθλίψεις ακμών.

Εναλλακτικά, το γράφημα H είναι ελάσσον του G , εάν υπάρχει μία συνάρτηση η οποία απεικονίζει κάθε κορυφή v του H σε ένα συνεκτικό σύνολο $B_v \subseteq V(G)$, έτσι ώστε για κάθε δύο ξένες κορυφές v, w του H , τα σύνολα B_v και B_w δεν έχουν κοινές κορυφές, και για κάθε ακμή $\{u, v\}$ του H , υπάρχει μία ακμή στο G με ένα άκρο στο B_v και ένα στο B_u .

Το γράφημα που προκύπτει από την ένωση όλων των B_v τέτοιων ώστε $v \in V(H)$ και από τις ακμές μεταξύ των B_v και B_u στο G , εάν υπάρχει μία ακμή $\{v, u\}$ στο H , ονομάζεται *μοντέλο του H στο G* . Ένα μοντέλο με ελάχιστο πλήθος κορυφών και ακμών ονομάζεται *ελαχιστικό μοντέλο* (*minimal model*).

Λέμε ότι ένα γράφημα G είναι *H -ελεύθερο-ελάσσονος* (*H -minor-free*) όταν δεν περιέχει το γράφημα H ως ελάσσον. Λέμε επίσης ότι μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$ είναι *H -ελεύθερη-ελάσσονος* (*H -minor-free*) (ή, αποκλείει το γράφημα H σαν ελάσσον) όταν όλα της τα μέλη είναι *H -ελεύθερα-ελάσσονος*.

- ένα *τοπολογικό ελάσσον* (*topological minor*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \leq_{tm} G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις κορυφών και ακμών και διαλύσεις κορυφών. Επιπλέον, λέμε ότι ένα γράφημα G είναι μία *υποδιαίρεση* (*subdivision*) του γραφήματος H , εάν το H μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας διαλύσεις κορυφών.
- μία *εμβύθιση* (*immersion*) του γραφήματος G , και το συμβολίζουμε με $H \leq_{im} G$, εάν μπορεί να προκύψει από το G εφαρμόζοντας αφαιρέσεις κορυφών και ακμών και ανυψώσεις ακμών.

Ισοδύναμα, λέμε ότι το H είναι μία εμβύθιση του G εάν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : V(H) \rightarrow V(G)$ τέτοια ώστε, για κάθε

ακμή $\{u, v\}$ του H , υπάρχει ένα μονοπάτι από την $f(u)$ στην $f(v)$ στο G και για κάθε δύο διαφορετικές ακμές του H τα μονοπάτια που τους αντιστοιχούν στο G είναι ξένα ως προς ακμές.

Επιπλέον, εάν το σύνολο των εσωτερικών κορυφών αυτών των μονοπατιών είναι ξένο με το $f(V(H))$, τότε λέμε ότι το H *εμβυθίζεται ισχυρά* (*strongly immersed*) στο G .

Όπως παραπάνω, η συνάρτηση f καλείται *μοντέλο του H στο G* και ένα μοντέλο με ελάχιστο πλήθος κορυφών και ακμών ονομάζεται *ελαχιστικό μοντέλο*.

Δεντροπλάτος και Δεσμώσεις

Μία *δεντροαποσύνθεση* (*tree decomposition*) ενός γραφήματος G είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{X}, T)$, όπου το T είναι ένα δέντρο και το $\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in V(T)\}$ είναι μία συλλογή υποσυνόλων του $V(G)$, που καλούνται *τσάντες*, τέτοια ώστε:

1. $\bigcup_{i \in V(T)} X_i = V(G)$,
2. για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E(G)$, $\{x, y\} \subseteq X_i$ για κάποιο $i \in V(T)$, και
3. για κάθε $x \in V(G)$ το σύνολο $\{i \mid x \in X_i\}$ ενάγει ένα συνεκτικό υποδέντρο του T .

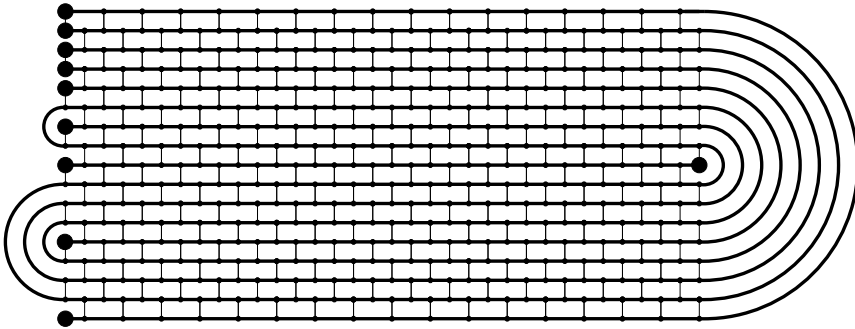
Το *πλάτος* (*width*) μίας δεντροαποσύνθεσης $(\{X_i \mid i \in V(T)\}, T)$ είναι

$$\max_{i \in V(T)} \{|X_i| - 1\}.$$

Το *δεντροπλάτος* (*tree-width*) ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο πλάτος όλων των δεντροαποσυνθέσεων του G . (Στην περίπτωση που το T είναι μονοπάτι, τότε η παραπάνω αποσύνθεση καλείται *αποσύνθεση μονοπατιού* και το πλάτος της, όπως και το πλάτος μονοπατιού ενός γραφήματος ορίζονται

αντίστοιχα.)

Έστω r ένας θετικός ακέραιος. Μία r -προσεγγιστική δέσμωση (r -approximate linkage) σε ένα γράφημα G είναι μία οικογένεια L από μονοπάτια με διαφορετικά άκρα στο G τέτοια ώστε για κάθε $r+1$ διαφορετικά μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$ στην L , ισχύει ότι $\bigcap_{i \in [r+1]} V(P_i) = \emptyset$. Καλούμε αυτά τα μονοπάτια *συνιστώσες* (components) της δέσμωσης. Έστω ότι $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ και $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ είναι στοιχεία του $V(G)^k$. Λέμε ότι μία r -προσεγγιστική δέσμωση L , που αποτελείται από τα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$, *συνδέει* (links) τα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ και $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ εάν το P_i είναι ένα μονοπάτι με άκρα α_i και β_i , για κάθε $i \in [k]$. Η *τάξη* (order) μίας τέτοιας δέσμωσης είναι k . Καλούμε μία r -προσεγγιστική δέσμωση τάξης k , r -προσεγγιστική k -δέσμωση (r -approximate k -linkage).



Σχήμα 2.1: Μία μοναδική δέσμωση σε ένα γράφημα.

Δύο r -προσεγγιστικές k -δεσμώσεις L και L' είναι *ισοδύναμες* εάν έχουν την ίδια τάξη και για κάθε συνιστώσα P του L υπάρχει μία συνιστώσα P' του L' με τα ίδια άκρα. Μία r -προσεγγιστική δέσμωση L ενός γραφήματος G καλείται *μοναδική* (unique) εάν για κάθε ισοδύναμη δέσμωση L' του L , $V(L) = V(L')$. Όταν $r = 1$, μία τέτοια οικογένεια μονοπατιών καλείται

δέσμωση (*linkage*). Τέλος, μία δέσμωση L σε ένα γράφημα G καλείται *ζωτική* (*vital*) εάν $V(L) = V(G)$ και δεν υπάρχει άλλη δέσμωση στο G που να συνδέει τα ίδια ζεύγη κορυφών. (Για παράδειγμα μίας μοναδικής δέσμωσης, δείτε το Σχήμα 2.1.)

2.2 Γραφήματα σε Επιφάνειες

Ένα γράφημα το οποίο μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακμές να συναντιούνται μόνο στα κοινά τους άκρα καλείται *επίπεδο γράφημα* (*planar graph*). Ένα τέτοιο σχέδιο ενός επίπεδου γραφήματος καλείται *επίπεδη εμβάπτιση* του γραφήματος και ένα επίπεδο γράφημα μαζί με την εμβάπτισή του καλείται *ενεπίπεδο γράφημα* (*plane graph*). Ας παρατηρήσουμε ότι εάν το G είναι ένα ενεπίπεδο γράφημα τότε το $\mathbb{R}^2 \setminus G$ είναι ανοικτό. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^2 \setminus G$ καλούνται *όψεις* (*faces*) του G και οι κλειστοί περίπατοι, ή αλλιώς *περιοδείες* (*tours*), που φράσσουν τις όψεις καλούνται *οψιακοί κύκλοι* (*facial cycles*).

Έστω ένα γράφημα G . Λέμε ότι το G είναι ένα *απόγειο γράφημα* (*apex graph*) εάν υπάρχει μία κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε το $G \setminus v$ να είναι επίπεδο. Επιπλέον, λέμε ότι το G είναι ένα *α -απόγειο γράφημα* (*α -apex graph*) εάν υπάρχει ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε $|S| \leq \alpha$ και το $G \setminus S$ είναι επίπεδο. Συμβολίζουμε με $\mathbf{an}(G)$, το ελάχιστο $k \in \mathbb{N}$ για το οποίο το G είναι ένα k -απόγειο γράφημα, δηλαδή,

$$\mathbf{an}(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists S \subseteq V(G) : (|S| \leq k \wedge G \setminus S \text{ είναι επίπεδο.})\}$$

Προφανώς, $\mathcal{G} = \{G \mid \mathbf{an}(G) = 1\}$ είναι η κλάση όλων των απόγειων γραφημάτων.

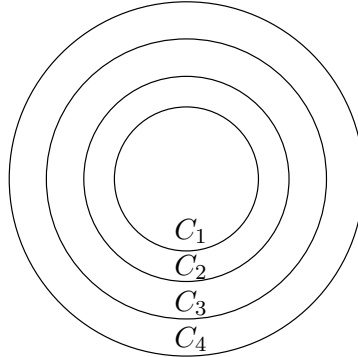
Λέμε ότι ένα υπεργράφημα H είναι *επίπεδο* εάν το γράφημα πρόσπτωσης του είναι επίπεδο, όπου το *γράφημα πρόσπτωσης* (*incidence graph*)

ενός υπεργράφηματος H είναι το διμερές γράφημα $I(H)$ με σύνολο κορυφών $V(H) \cup E(H)$ και μία κορυφή $v \in V(H)$ είναι γειτονική με μία κορυφή $e \in E(H)$ εάν και μόνο εάν $v \in e$, δηλαδή, η v προσπίπτει στην e στο H .

Μία επιφάνεια (*surface*) Σ είναι μία συμπαγής (compact) 2-πολλαπλότητα (2-manifold) χωρίς όριο (boundary) (πάντα θεωρούμε συνεκτικές επιφάνειες). Εάν, αντί για το επίπεδο, θεωρήσουμε μία επιφάνεια Σ , λέμε ότι ένα γράφημα G είναι Σ -εμβαπτίσιμο (Σ -embeddable), εάν μπορεί να σχεδιαστεί στη Σ με τέτοιο τρόπο ώστε οι ακμές να συναντιούνται μόνο στα κοινά τους άκρα. Όποτε αναφερόμαστε σε ένα Σ -εμβαπτισμένο γράφημα θεωρούμε μία εμβάπτιση 2-κελιών του G στη Σ , όπου μία *εμβάπτιση 2-κελιών* (*2-cell embedding*) ενός γραφήματος G είναι μία εμβάπτιση στην οποία κάθε όψη είναι ομοιομορφική με έναν ανοιχτό δίσκο. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς δεν ξεχωρίζουμε ανάμεσα σε μία κορυφή του G και το σημείο της Σ που χρησιμοποιείται στο σχέδιο για να αναπαραστήσει την κορυφή ή ανάμεσα σε μία ακμή και το τόξο που την αναπαριστά. Θεωρούμε επίσης ένα γράφημα G εμβαπτισμένο στη Σ σαν την ένωση των σημείων που αντιστοιχούν στις κορυφές και τις ακμές του. Με αυτό τον τρόπο, ένα υπογράφημα H του G μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γράφημα H , όπου $H \subseteq G$ στη Σ . Ας θυμηθούμε ότι το σύνολο $\Delta \subseteq \Sigma$ είναι ένας ανοικτός (αντίστοιχα κλειστός) δίσκος εάν είναι ομοιομορφικό με το $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ (αντίστοιχα $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$). Το γένος *Euler* (*Euler genus*) μίας μη-προσανατολισμένης επιφάνειας Σ είναι ίσο με το μη-προσανατολισμένο γένος $\tilde{g}(\Sigma)$ (ή το πλήθος των καπακιών διασταυρώσεων (cross-caps)). Το γένος *Euler* μίας προσανατολισμένης επιφάνειας Σ είναι $2g(\Sigma)$, όπου $g(\Sigma)$ είναι το προσανατολισμένο γένος της Σ . Αναφερόμαστε στον βιβλίο των B. Mohar και C. Thomassen [157] για περισσότερες λεπτομέρειες στις εμβαπτίσεις γραφημάτων. Το γένος *Euler* ενός γραφήματος G (που συμβολίζεται με $\mathbf{eg}(G)$) είναι ο ελάχιστος ακέραιος γ για τον οποίο το G μπορεί να εμβαπτιστεί σε μία επιφάνεια με γένος *Euler*

γ.

Ας παρατηρήσουμε ότι τα γραφήματα που εμβαπτίζονται στη σφαίρα S_0 είναι τα επίπεδα γραφήματα. Επιπλέον, καλούμε ένα τέτοιο γράφημα, μαζί με την εμβάπτισή του, Σ_0 -εμβαπτισμένο γράφημα (Σ_0 -embedded graph). Έστω ότι C_1 και C_2 είναι δύο ξένοι κύκλοι σε ένα Σ_0 -εμβαπτισμένο γράφημα G . Έστω, επίσης, ότι Δ_i είναι ο ανοικτός δίσκος του $S_0 \setminus C_i$ που δεν περιέχει σημεία του C_{3-i} , $i \in [2]$. Ο δακτύλιος (annulus) μεταξύ των C_1 και C_2 είναι το σύνολο $S_0 \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ και συμβολίζεται με $A[C_1, C_2]$. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, το $A[C_1, C_2]$ είναι ένα κλειστό σύνολο. Έστω ότι η $\mathcal{A} = \{C_1, \dots, C_r\}$ είναι μια οικογένεια από κύκλους ενός Σ_0 -εμβαπτισμένου γραφήματος G . Λέμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι *εμφωλευμένη* (nested) εάν, για κάθε $i \in [r-2]$, $A[C_i, C_{i+1}] \cup A[C_{i+1}, C_{i+2}] = A[C_i, C_{i+2}]$. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 2.2.)



Σχήμα 2.2: Μία οικογένεια τεσσάρων εμφωλευμένων κύκλων.

Έστω ότι G είναι ένα γράφημα το οποίο είναι εμβαπτισμένο σε κάποια επιφάνεια Σ και έστω $x \in V(G)$. Ορίζουμε ως *δίσκο γύρω από το* (disk around) x κάθε ανοικτό δίσκο Δ_x με την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο μέσα στον $\Delta_x \cap G$ είτε είναι το x είτε ανήκει στις προσπίπτουσες ακμές του x .



Σχήμα 2.3: Η κορυφή x είναι επικαλύπτουσα κορυφή των μονοπατιών στα αριστερά, ενώ δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή των μονοπατιών στα δεξιά.

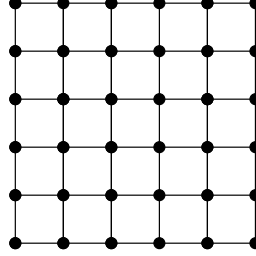
Έστω ότι P_1 και P_2 είναι δύο ξένα ως προς ακμές μονοπάτια στο G . Λέμε ότι τα P_1 και P_2 είναι *σύρροα* (*confluent*) εάν για κάθε $x \in V(P_1) \cap V(P_2)$, που δεν είναι άκρο του P_1 ή του P_2 , και για κάθε δίσκο Δ_x γύρω από το x , μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου $\Delta_x \setminus P_1$ δεν περιέχει κανένα σημείο του P_2 . Λέμε επίσης ότι μία οικογένεια μονοπατιών είναι *σύρροη* (*confluent*) εάν τα μονοπάτια που περιέχει είναι ανά δύο σύρροα.

Επιπλέον, δοσμένων δύο ξένων ως προς ακμές μονοπατιών P_1 και P_2 στο G , λέμε ότι μία κορυφή $x \in V(P_1) \cap V(P_2)$ που δεν είναι άκρο του P_1 ή του P_2 είναι μία *επικαλύπτουσα* (*overlapping*) *κορυφή των P_1 και P_2* εάν υπάρχει ένας δίσκος Δ_x γύρω από το x τέτοιος ώστε και οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $\Delta_x \setminus P_1$ να περιέχουν σημεία του P_2 . (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 2.3.) Για μία οικογένεια μονοπατιών $\mathcal{P}$, μία κορυφή v ενός μονοπατιού $P \in \mathcal{P}$ καλείται *επικαλύπτουσα κορυφή της $\mathcal{P}$* εάν υπάρχει ένα μονοπάτι $P' \in \mathcal{P}$, με $P' \neq P$, τέτοιο ώστε η v να είναι επικαλύπτουσα κορυφή των P και P' .

2.3 Σχάρες και Τοίχοι

Έστω ότι οι k και r είναι θετικοί ακέραιοι με $k, r \geq 2$. Η $(k \times r)$ -σχάρα ($(k \times r)$ -grid) είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο μονοπατιών μήκους $k-1$ και $r-1$ αντίστοιχα. Μία κορυφή της $(k \times r)$ -σχάρας καλείται *γωνία* (*corner*) εάν έχει βαθμό 2. Άρα κάθε $(k \times r)$ -σχάρα έχει 4 γωνίες. Μία κορυφή της $(k \times$

r)-σχάρας καλείται *εσωτερική* (*internal*) εάν έχει βαθμό 4, αλλιώς λέγεται *εξωτερική* (*external*). (Για παράδειγμα μίας σχάρας δείτε το Σχήμα 2.4.)



Σχήμα 2.4: Η (6×6) -σχάρα.

Ένας τοίχος ύψους (*wall of height*) k , $k \geq 1$, είναι το γράφημα που προκύπτει από μία $((k+1) \times (2 \cdot k+2))$ -σχάρα με κορυφές (x, y) , όπου $x \in \{1, \dots, 2 \cdot k+4\}$, $y \in \{1, \dots, k+1\}$, μετά την αφαίρεση των «κάθετων» ακμών $\{(x, y), (x, y+1)\}$ για περιττό $x+y$, και, στη συνέχεια, την αφαίρεση όλων των κορυφών βαθμού 1. Συμβολίζουμε ένα τέτοιο τοίχο με W_k .

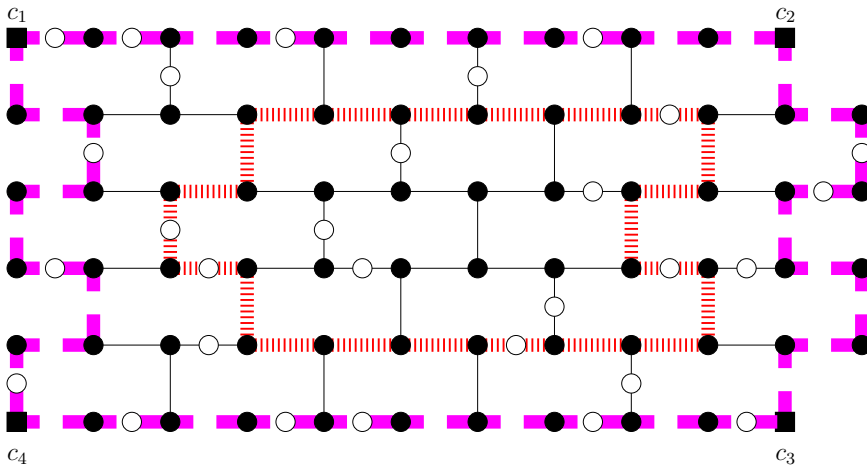
Οι γωνίες (*corners*) του τοίχου W_k είναι οι κορυφές $c_1 = (1, 1)$, $c_2 = (2 \cdot k+1, 0)$, $c_3 = (2 \cdot k+1 + (k+1 \bmod 2), k+1)$ και $c_4 = (1 + (k+1 \bmod 2), k+1)$. (Οι τετράγωνες κορυφές στο Σχήμα 2.5.) Θέτουμε $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ και καλούμε τα ζεύγη $\{c_1, c_3\}$ και $\{c_2, c_4\}$ *αντιδιαμετρικά* (*antidiametrical*).

Ένας υποδιαμεμένος (*subdivided*) τοίχος W ύψους k είναι ένας τοίχος που προκύπτει από τον W_k αφού αντικαταστήσουμε κάποιες από τις ακμές του με μονοπάτια τα οποία δεν περιέχουν κοινές εσωτερικές κορυφές. Καλούμε το γράφημα W που προκύπτει υποδιαίρεση (*subdivision*) του W_k και τις κορυφές που εμφανίζονται στον τοίχο μετά τις αντικαταστάσεις *κορυφές υποδιαίρεσης* (*subdivision vertices*).

Οι κορυφές του W που δεν προέκυψαν από την υποδιαίρεση καλούνται

πρωταρχικές κορυφές (*original vertices*). Η περίμετρος (*perimeter*) P ενός υποδιαιρεμένου τοίχου είναι ο κύκλος που ορίζεται από το σύνορό του.

Τα στρώματα (*layers*) ενός υποδιαιρεμένου τοίχου W ύψους k ορίζονται αναδρομικά όπως παρακάτω. Το πρώτο στρώμα του W είναι η περίμετρός του. Για $i = 2, \dots, \lceil \frac{k}{2} \rceil$, το i -οστό στρώμα του W είναι το $(i-1)$ -οστό στρώμα του υποτοίχου W' που προκύπτει από τον W μετά την αφαίρεση της περιμέτρου του W από τον W και όλων των επερχόμενων κορυφών βαθμού 1 (δείτε το Σχήμα 2.5).

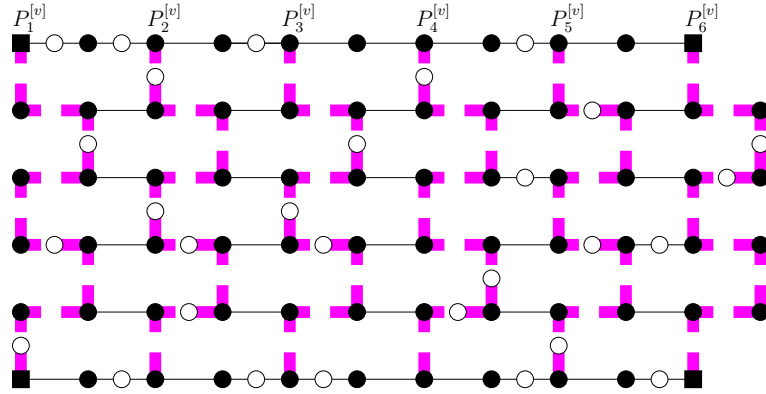


Σχήμα 2.5: Το πρώτο (μοβ - διακεκομμένο) και το δεύτερο (κόκκινο - διακεκομμένο με τελείες) στρώματα ενός τοίχου ύψους 5.

Εάν W είναι ένας υποδιαιρεμένος τοίχος ύψους k , καλούμε τούβλο (*brick*) του W κάθε οψιακό κύκλο του οποίου το μη-υποδιαιρεμένο αντίγραφο στον W_k έχει μήκος 6. Λέμε ότι δύο τούβλα είναι γειτονικά (*neighbors*) εάν η τομή τους περιέχει μία ακμή.

Έστω ότι W_k είναι ένας τοίχος. Συμβολίζουμε με $P_j^{(h)}$ το συντομότερο

μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές $(1, j)$ και $(2 \cdot k + 2, j)$ και καλούμε αυτά τα μονοπάτια *οριζόντια* (*horizontal*) *μονοπάτια* του W_k . Ας σημειώσουμε ότι αυτά τα μονοπάτια είναι ξένα ως προς κορυφές. Καλούμε τα μονοπάτια $P_{k+1}^{(h)}$ και $P_1^{(h)}$ το *νοτιότερο* (*southern*) *μονοπάτι* του W_k και το *βορειότερο* (*northern*) *μονοπάτι* του W_k αντίστοιχα. Παρόμοια, συμβολίζουμε με $P_i^{(v)}$ το συντομότερο μονοπάτι που συνδέει τις κορυφές $(i, 1)$ και $(i, k + 1)$ με την προϋπόθεση ότι για $i < 2 \cdot k + 2$, το $P_i^{(v)}$ περιέχει μόνο κορυφές (x, y) με $x = i, i + 1$. Ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχει μία μοναδική υπό-οικογένεια P_v των $\{P_i^{(v)} \mid i < 2 \cdot k + 2\}$ από $k + 1$ μονοπάτια με ένα άκρο στο νοτιότερο μονοπάτι του W_k και ένα στο βορειότερο μονοπάτι του W_k . Καλούμε αυτά τα μονοπάτια *κάθετα* (*vertical*) *μονοπάτια* του W_k και τα συμβολίζουμε με $P_i^{[v]}$, $i \in [k]$, όπου $P_1^{(v)} = P_1^{[v]}$ και $P_{2 \cdot k + 1}^{(v)} = P_{k+1}^{[v]}$. (Δείτε το Σχήμα 2.6.)



Σχήμα 2.6: Τα κάθετα μονοπάτια ενός τοίχου ύψους 5.

Τα μονοπάτια $P_1^{[v]}$ και $P_{k+1}^{[v]}$ καλούνται το *δυτικότερο* (*western*) *μονοπάτι* του W_k και το *ανατολικότερο* (*eastern*) *μονοπάτι* του W_k αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι κάθε κορυφή $u \in V(W_k) \setminus V(P)$ περιέχεται σε ακριβώς ένα κάθετο μονοπάτι, που συμβολίζεται με $P_u^{(v)}$, και σε ένα ακριβώς οριζόντιο

μονοπάτι, που συμβολίζεται με $P_u^{(h)}$, του W_k . Εάν W είναι μία υποδιαίρεση του W_k , θα χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συμβολισμό για τα μονοπάτια που προκύπτουν από τις υποδιαίρεσεις των αντίστοιχων μονοπατιών στον W_k , με την προϋπόθεση ότι η u είναι πρωταρχική κορυφή του W .

Έστω ότι W είναι ένας τοίχος και K' είναι η συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus P$ που περιέχει το $W \setminus P$, όπου P είναι η περίμετρος του W . Η περιφέρεια (*compass*) K του W στο G είναι το γράφημα $G[V(K') \cup V(P)]$. Παρατηρούμε ότι ο W είναι υπογράφημα του K και το K είναι συνεκτικό.

2.4 Λογική

Μία ιδιαίτερα σημαντική περιοχή αμφοτέρων των Μαθηματικών και της Πληροφορικής είναι η Λογική. Η Λογική έχει διερευνηθεί ευρέως, από τότε που πρώτος ο Αριστοτέλης πρότεινε ένα αξιωματικό σύστημα το οποίο κατόπιν χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη. Αν και η Λογική και η ιστορία της αποτελούν ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα, η εξερεύνησή της και η παρουσίασή της είναι πέρα από τους σκοπούς αυτής της σύντομης εισαγωγής. Θα αναφέρουμε, ωστόσο, τους R. Dedekind (1831 - 1916), G. Peano (1858 - 1932), D. Hilbert (1862 - 1943) και K. Gödel (1906 - 1978) των οποίων η συνεισφορά ήταν αποφασιστικής σημασίας και τα αποτελέσματά τους, όπως και οι προτάσεις τους, ξεπερνούσαν την εποχή τους.

Σε αυτή τη διατριβή, θεωρούμε λογική πάνω σε γραφήματα. (Για περισσότερα στη Λογική δείτε τα [73] και [156].)

Πρωτοβάθμια Λογική σε Γραφήματα

Ορισμός 2.1. Η *σύνταξη της πρωτοβάθμιας λογικής* (syntax of first-order logic) είναι η ακόλουθη:

- Άπειρες μεταβλητές (*variables*), οι οποίες συνήθως συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα x, y, z .
- Οι πρωτοβάθμιοι τύποι στη γλώσσα των γραφημάτων κατασκευάζονται από τους ατομικούς τύπους (atomic formulas) $E(x, y)$ και $x = y$ χρησιμοποιώντας τους συνήθεις συνδέσμους (Boolean connectives) $\neg$ (άρνηση), $\wedge$ (σύζευξη), $\vee$ (διάζευξη), $\rightarrow$ (συνεπαγωγή), $\leftrightarrow$ (ισοδυναμία), τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists x$ και τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall x$ πάνω σε μεταβλητές.

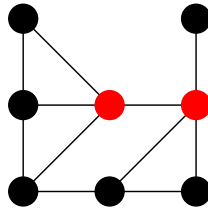
Οι μεταβλητές αντιστοιχούν στις κορυφές ενός γραφήματος. Ο ατομικός τύπος $E(x, y)$ εκφράζει ότι οι x και y είναι γειτονικές, και ο τύπος $x = y$ εκφράζει ισότητα. Από αυτά, οι ελεύθερες μεταβλητές, οι προτάσεις και η σημασιολογία της πρωτοβάθμιας λογικής ορίζονται με τον προφανή τρόπο.

Για παράδειγμα, ένα σύνολο κυριαρχίας (*dominating set*) σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι ένα σύνολο $S \subseteq V$ τέτοιο ώστε για κάθε $v \in V$, είτε η v ανήκει στο S είτε η v είναι γειτονική με μία κορυφή u η οποία ανήκει στο S (δείτε το Σχήμα 2.7). Η ακόλουθη πρωτοβάθμια πρόταση (παραμετροποιημένη από το k) $\mathbf{dom}_k$ εκφράζει πως ένα γράφημα έχει σύνολο κυριαρχίας μεγέθους k :

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_k \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall y \left(\bigvee_{i=1}^k ((y = x_i) \vee E(y, x_i)) \right) \right)$$

Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική σε Γραφήματα

Καλούμε υπογραφή (*signature*) $\tau = \{R_1, \dots, R_n\}$ κάθε πεπερασμένο σύνολο κατηγορηματικών συμβόλων R_i οποιασδήποτε (πεπερασμένης) πλειομέλειας (arity), η οποία συμβολίζεται με $\mathbf{ar}(R_i)$. Για τη γλώσσα των γραφημάτων $\mathcal{G}$



Σχήμα 2.7: Το σύνολο κυριαρχίας ενός γραφήματος (κόκκινες κορυφές).

θεωρούμε την υπογραφή $\tau_G = \{V, E, I\}$ όπου το V αναπαριστά το σύνολο των κορυφών ενός γραφήματος G , το E το σύνολο των ακμών του, και το $I = \{(v, e) \mid v \in e \text{ και } e \in E(G)\}$ την σχέση πρόσπτωσης.

Μία τ -δομή (τ -structure) $\mathfrak{A} = (A, R_1^{\mathfrak{A}}, \dots, R_n^{\mathfrak{A}})$ αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύμπαν (universe) A , και την ερμηνεία (interpretation) των κατηγορηματικών συνόλων R_i της τ στο A , δηλαδή, για κάθε i , το $R_i^{\mathfrak{A}}$ είναι ένα υποσύνολο του $A^{\text{ar}(R_i)}$.

Στη Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική οι τύποι ορίζονται αναδρομικά από ατομικούς τύπους, δηλαδή, από εκφράσεις της μορφής $R_i(x_1, x_2, \dots, x_{\text{ar}(R_i)})$ ή της μορφής $x = y$ όπου οι x_j , $j \leq \text{ar}(R_i)$, x και y είναι μεταβλητές, χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, και τον υπαρξιακό ή καθολικό ποσοδείκτη σε μεταβλητές και σύνολα μεταβλητών.

Ας παρατηρήσουμε ότι, στη γλώσσα των γραφημάτων, οι ατομικοί τύποι είναι της μορφής $V(u), E(e)$ και $I(u, e)$, όπου u και e είναι μεταβλητές κορυφών και ακμών αντίστοιχα. Επιπροσθέτως, η ποσόδειξη λαμβάνει χώρα πάνω σε μεταβλητές κορυφών ή ακμών ή σε σύνολα κορυφών ή ακμών.

Μία δομή γραφήματος (graph structure) $\mathfrak{G} = (V(G) \cup E(G), V^{\mathfrak{G}}, E^{\mathfrak{G}}, I^{\mathfrak{G}})$ είναι μία τ_G -δομή, η οποία αναπαριστά το γράφημα $G = (V, E)$. Από εδώ και στο εξής, θα κάνουμε κατάχρηση του συμβολισμού και δεν θα ξεχωρίζουμε ανάμεσα στα G και $\mathfrak{G}$.

Μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ είναι *ΜΔΛ-ορίσιμη* (*MSO-definable*) εάν υπάρχει ένας τύπος της Μοναδικής Δευτεροβάθμιας Λογικής $\phi_{\mathcal{C}}$ στη γλώσσα των γραφημάτων τέτοιος ώστε $G \in \mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν $G \models \phi_{\mathcal{C}}$, δηλαδή, ο $\phi_{\mathcal{C}}$ αληθεύει στο γράφημα G (το G είναι μοντέλο της $\phi_{\mathcal{C}}$).

(Καλές) Μερικές Διατάξεις και Αλγόριθμοι

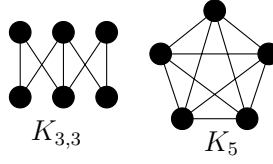
3.1 (Καλές) Μερικές Διατάξεις

Ένα από τα πιο διάσημα αποτελέσματα της Θεωρίας Γραφημάτων είναι ο χαρακτηρισμός των επίπεδων γραφημάτων στο πλαίσιο των απαγορευμένων τοπολογικών ελασσόνων, που αποδείχτηκε από τον K. Kuratowski το 1930.

Θεώρημα 3.1 (Το Θεώρημα του Kuratowski [142]). *Ένα γράφημα G είναι επίπεδο εάν και μόνο εάν δεν περιέχει τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν τοπολογικά ελάσσονα.*¹

Μετά την πρώτη εμφάνιση της απόδειξης του Kuratowski στο [142] πλήθος εναλλακτικών αποδείξεων προτάθηκαν για το θεώρημα αυτό (δείτε,

¹Κατά ισχυρισμούς, το θεώρημα αυτό είχε αποδειχθεί επίσης σε χειρόγραφες σημειώσεις του L. Pontryagin γι' αυτό μερικές φορές αναφέρεται και ως Θεώρημα Kuratowski-Pontryagin.



Σχήμα 3.1: Τα γραφήματα του Kuratowski.

για παράδειγμα, τις [62, 63, 153]).

Ωστόσο, η αναδιατύπωση και η απόδειξη του θεωρήματος από τον K. Wagner στο πλαίσιο των απαγορευμένων ελασσόνων το 1937 [221] και μία επακόλουθη εικασία, γνωστή και ως Εικασία του Wagner², άνοιξαν το δρόμο προς τη μελέτη της διάταξης των γραφημάτων ως προς τη σχέση των ελασσόνων και προς το οικοδόμημα που τώρα είναι γνωστό ως Θεωρία των Ελασσόνων Γραφημάτων.

Θεώρημα 3.2 ([221]). *Ένα γράφημα G είναι επίπεδο εάν και μόνο εάν δεν περιέχει τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν ελάσσονα.*

Ας προχωρήσουμε τώρα στις απαραίτητες λεπτομέρειες. Παρατηρούμε ότι οι δύο προαναφερθείσες διατάξεις σε γραφήματα, ονομαστικά η διάταξη των ελασσόνων και η διάταξη των τοπολογικών ελασσόνων, μαζί με όλες τις άλλες διατάξεις που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα, δηλαδή τις διατάξεις των (εναγόμενων/παραγόμενων) υπογραφημάτων, της σύνθλιψης, και της εμβύθισης, αποτελούν μερικές διατάξεις σε γραφήματα.

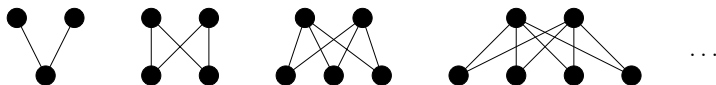
Καλούμε μία οικογένεια γραφημάτων $\mathcal{F}$ *αντιαλυσίδα* (*antichain*) για τη μερική διάταξη $\leq$ εάν για κάθε δύο γραφήματα $G, H \in \mathcal{F}$ ούτε $H \leq G$ ούτε $G \leq H$, δηλαδή, εάν τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ανά δύο μη-συγκρίσιμα σύμφωνα με τη μερική διάταξη $\leq$. Τυπικά,

²Σύμφωνα με τον R. Diestel, ενώ η εικασία έχει αποδοθεί στον Klaus Wagner, ο ίδιος πάντα το αρνούνταν, ακόμα και μετά την απόδειξή της!

Ορισμός 3.1. Μία αυτοπαθής και μεταβατική σχέση καλείται *μερική διάταξη* (*partial ordering*). Μία μερική διάταξη $\leq$ στο X είναι μία *καλή μερική διάταξη* (*well-quasi-ordering*), και τα στοιχεία του X είναι *καλά μερικώς διατεταγμένα* από την $\leq$, εάν

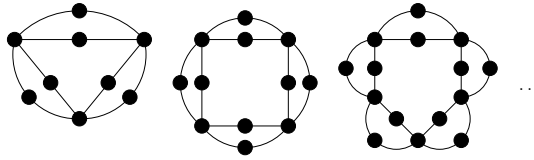
- δεν υπάρχει άπειρη γνήσια φθίνουσα ακολουθία που να αποτελείται από στοιχεία του X , και
- το X δεν περιέχει άπειρη αντιαλυσίδα.

Ας προσέξουμε ότι, στην περίπτωση των πεπερασμένων γραφημάτων δεν υπάρχουν άπειρα γνήσια φθίνουσες ακολουθίες. Άρα, μία μερική διάταξη σε γραφήματα είναι μία καλή μερική διάταξη εάν δεν υπάρχουν άπειρες αντιαλυσίδες σύμφωνα με τη διάταξη αυτή. Κανείς μπορεί, εύκολα, να δει ότι, η διάταξη των (εναγόμενων/παραγόμενων) υπογραφημάτων δεν είναι καλή μερική διάταξη απλά θεωρώντας την οικογένεια όλων των κύκλων $\{C_i \mid i \geq 3\}$. Επιπλέον, η κλάση των γραφημάτων δεν είναι καλά μερικώς διατεταγμένη σύμφωνα με τη διάταξη της σύνθλιψης, αφού η κλάση των γραφημάτων $\{K_{2,r} \mid r \in \mathbb{N}\}$ (Σχήμα 3.2) αποτελεί μία άπειρη αντιαλυσίδα για τη διάταξη της σύνθλιψης.



Σχήμα 3.2: Άπειρη αντιαλυσίδα για τη διάταξη της σύνθλιψης.

Τέλος, στο Σχήμα 3.3 μπορούμε να δούμε μερικά από τα στοιχεία μίας αντιαλυσίδας για την σχέση των τοπολογικών ελασσόνων. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, και η διάταξη των ελασσόνων και η διάταξη των εμβυθίσεων είναι καλές μερικές διατάξεις στα γραφήματα.



Σχήμα 3.3: Άπειρη αντιαλυσίδα για την διάταξη των τοπολογικών ελασσόνων.

Εικασία 1 (Η Εικασία του Wagner). *Η κλάση των γραφημάτων είναι καλά μερικώς διατεταγμένη σύμφωνα με τη διάταξη των ελασσόνων.*

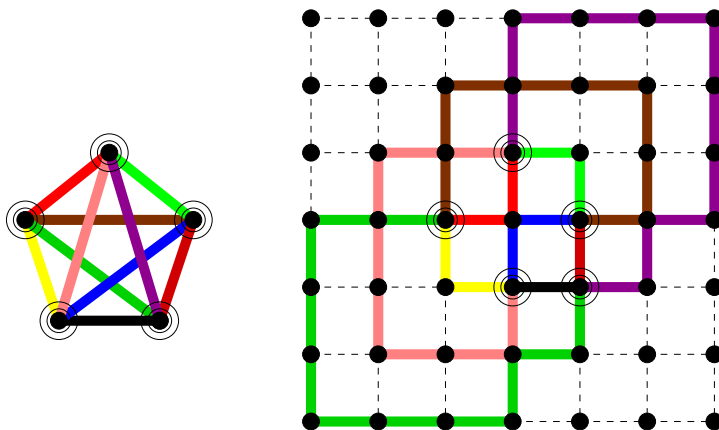
Το πρώτο επιτυχημένο βήμα προς την επίλυση της εικασίας του Wagner έγινε από τον J. Kruskal [141], ο οποίος απέδειξε το 1960 ότι η κλάση των δέντρων είναι καλά μερικώς διατεταγμένη σύμφωνα με τη σχέση των ελασσόνων (η οποία ήταν επίσης γνωστή ως *εικασία του Vázsonyi*). Το 1963 μία συντομότερη απόδειξη (ξανά για δέντρα) δόθηκε από τον Crispin St. John Alvah Nash-Williams [158]. Η γενική περίπτωση για την κλάση όλων των γραφημάτων χρειάστηκε 44 επιπλέον χρόνια και μία σειρά από 23 άρθρα, γνωστή ως η σειρά των Ελασσόνων Γραφημάτων, μέχρι εν τέλει να αποδειχθεί από τους N. Robertson και P. Seymour [194] και η απόδειξή της την κατατάσσει ως ένα από τα βαρύτερα αποτελέσματα της σύγχρονης Συνδυαστικής.

Θεώρημα 3.3 (Το Θεώρημα Ελασσόνων Γραφημάτων (Graph Minor Theorem) [194]). *Τα πεπερασμένα γραφήματα είναι καλά μερικώς διατεταγμένα από τη διάταξη των ελασσόνων.*

Επιπροσθέτως, στην ίδια σειρά από άρθρα αποδείχτηκε η καλή μερική διάταξη των γραφημάτων σύμφωνα με τη σχέση των εμβυθίσεων, η οποία ήταν γνωστή ως *Εικασία του Nash-Williams*.

Θεώρημα 3.4 ([211]). *Τα πεπερασμένα γραφήματα είναι καλά μερικώς διατεταγμένα από τη διάταξη των εμβυθίσεων.*

Δοσμένης μία μερικής διάταξης $\leq$, λέμε ότι μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς αυτή τη διάταξη εάν για κάθε γράφημα G το οποίο ανήκει στη $\mathcal{C}$ κάθε γράφημα H τέτοιο ώστε $H \leq G$ ανήκει επίσης στη $\mathcal{C}$. Για παράδειγμα, η κλάση των επίπεδων γραφημάτων είναι κλειστή ως προς ελάσσονα αλλά δεν είναι κλειστή ως προς εμβυθίσεις αφού το K_5 είναι εμβύθιση της (7×7) -σχάρας (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4: Το K_5 σαν εμβύθιση της (7×7) -σχάρας.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\mathcal{F}$ είναι μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα εμβυθίσεις) και ας θεωρήσουμε την κλάση γραφημάτων $\overline{\mathcal{F}} = \{G \mid G \notin \mathcal{F}\}$. Έστω ότι το $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) είναι το σύνολο των ελαχιστικών ανά δύο μη συγκρίσιμων γραφημάτων στην $\overline{\mathcal{F}}$ σύμφωνα με τη διάταξη των ελασσόνων (αντίστοιχα, εμβυθίσεων). Καθώς η διάταξη των ελασσόνων (αντίστοιχα, εμβυθίσεων) είναι μία καλή μερική διάταξη, το σύνολο $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) είναι πεπερασμένο. Επιπλέον, ένα γράφημα G ανήκει στην $\mathcal{F}$ εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα $H \in \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $H \in \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) σαν ελάσσον (αντίστοιχα, σαν εμβύθιση).

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι για κάποιο γράφημα $G \in \mathcal{F}$ υπάρχει ένα γράφημα $H \in \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $H \in \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) τέτοιο ώστε $H \leq_m G$ (αντίστοιχα, $H \leq_{im} G$). Καθώς η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα, εμβυθίσεις) και $G \in \mathcal{F}$ τότε $H \in \mathcal{F}$, το οποίο αντιφάσκει στο γεγονός ότι $H \in \overline{\mathcal{F}}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα στο $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) σαν ελάσσον (αντίστοιχα, εμβύθιση) και $G \in \overline{\mathcal{F}}$. Αυτό είναι αντίφαση στο γεγονός ότι το $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) περιέχει όλα τα ελαχιστικά στοιχεία της $\overline{\mathcal{F}}$ ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα, εμβυθίσεις).

Δοσμένης μία κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$, η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα, εμβυθίσεις), συμβολίζουμε με $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{F})$ (αντίστοιχα, $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{F})$) το σύνολο $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^m$ (αντίστοιχα, $\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{F}}}^{im}$) και το καλούμε σύνολο παρεμπόδισης (*obstruction set*) ελασσόνων (αντίστοιχα εμβυθίσεων) της $\mathcal{F}$. Τέλος, τα στοιχεία του τα καλούμε παρεμποδίσσεις (*obstructions*) ελασσόνων (αντίστοιχα εμβυθίσεων). Για παράδειγμα, για την περίπτωση των επίπεδων γραφημάτων, από το Θεώρημα του Wagner, γνωρίζουμε ότι το σύνολο παρεμπόδισης ελασσόνων είναι το $\{K_5, K_{3,3}\}$, το οποίο καλείται επίσης, σύνολο των γραφημάτων του Kuratowski.

Έτσι, από την παραπάνω συζήτηση μπορούμε να συνάγουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 3.5. Για κάθε κλάση γραφημάτων $\mathcal{F}$ η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα, εμβυθίσεις) υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο γραφημάτων $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{F})$ (αντίστοιχα, $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{F})$) τέτοιο ώστε ένα γράφημα G ανήκει στην $\mathcal{F}$ εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα του $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{F})$ (αντίστοιχα, $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{F})$) σαν ελάσσον (αντίστοιχα, εμβύθιση).

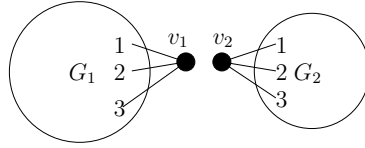
3.2 Απαγορεύοντας τα Γραφήματα του Kuratowski ως Εμβυθίσεις

Στην προηγούμενη ενότητα, είδαμε ότι τα γραφήματα του Kuratowski (K_5 και $K_{3,3}$) είναι οι παρεμποδίσσεις ελασσόνων για την κλάση των επίπεδων γραφημάτων. Επιπλέον, είδαμε ότι αν και η διάταξη τοπολογικών ελασσόνων δεν είναι μία καλή μερική διάταξη (και άρα, μία κλάση γραφημάτων η οποία είναι κλειστή ως προς τοπολογικά ελάσσονα δεν αναμένεται να επιδέχεται έναν χαρακτηρισμό στα πλαίσια ενός πεπερασμένου συνόλου από απαγορευμένα τοπολογικά ελάσσονα), η κλάση των επίπεδων γραφημάτων αποτελεί μία από τις σπάνιες εξαιρέσεις.

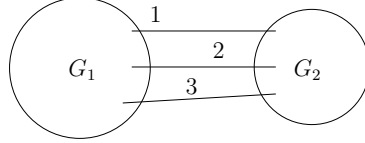
Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε έναν δομικό χαρακτηρισμό των γραφημάτων που δεν περιέχουν τα K_5 και $K_{3,3}$ ως εμβυθίσεις. Πρώτα απ' όλα, ως παρατηρήσουμε ότι εάν ένα γράφημα G περιέχει το γράφημα H σαν τοπολογικό ελάσσον τότε το περιέχει επίσης σαν εμβύθιση. Αυτό κατευθείαν συνεπάγεται ότι εάν απαγορεύσουμε τα γραφήματα του Kuratowski σαν εμβυθίσεις, τα απαγορεύουμε επίσης ως τοπολογικά ελάσσονα. Ως εκ τούτου, ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν εμβυθίσεις είναι ένα επίπεδο γράφημα. Σε ότι ακολουθεί, θα αποδείξουμε ότι αυτά τα γραφήματα έχουν μία συγκεκριμένη δομή: Μπορούν να κατασκευαστούν από επαναλαμβανόμενες ενώσεις απλούστερων γραφημάτων, ξεκινώντας είτε από γραφήματα μικρής αποσυνθεσιμότητας είτε από επίπεδα γραφήματα μέγιστου βαθμού 3. Για την ακρίβεια, αποδεικνύουμε ότι ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει ούτε το K_5 ούτε το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση μπορεί να κατασκευαστεί εφαρμόζοντας διαδοχικά i -αχμοαθροίσματα, για $i \leq 3$, σε γραφήματα τα οποία είναι επίπεδα και είτε είναι υποκυβικά είτε έχουν κλαδοπλάτος το πολύ 10.

Ας ξεκινήσουμε πρώτα με μερικούς απαραίτητους ορισμούς και προκαταρκτικά αποτελέσματα.

Ακμοαθροίσματα. Έστω G_1 και G_2 γραφήματα και έστω v_1, v_2 κορυφές των G_1 και G_2 αντίστοιχα, με $|E_{G_1}(v_1)| = |E_{G_2}(v_2)|$. Θεωρούμε μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $\sigma : E_{G_1}(v_1) \rightarrow E_{G_2}(v_2)$ όπου $E_{G_1}(v_1) = \{e_1^i \mid i \in [k]\}$. Ορίζουμε το k -ακμοάθροισμα (k -edge-sum) των G_1 και G_2 στις v_1 και v_2 ως το γράφημα G που προκύπτει εάν πάρουμε την ξένη ένωση των G_1 και G_2 , ταυτίσουμε τη v_1 με τη v_2 , και έπειτα, για κάθε $i \in \{1, \dots, k\}$, ανυψώσουμε τις ακμές e_1^i και $\sigma(e_1^i)$ σε μία νέα ακμή e^i και τέλος αφαιρέσουμε την κορυφή v_1 . (Δείτε, για παράδειγμα, τα Σχήματα 3.5 και 3.6)



Σχήμα 3.5: Τα γραφήματα G_1 και G_2 πριν από το ακμοάθροισμα.



Σχήμα 3.6: Το γράφημα που προκύπτει μετά από ένα ακμοάθροισμα.

Έστω ένα γράφημα G , έστω F ένας ελάχιστος i -ακμοδιαχωριστής στο G , και έστω ότι G' είναι η συνεκτική συνιστώσα του G που περιέχει τον F . Έστω επίσης ότι C_1 και C_2 είναι οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του $G' \setminus F$. Συμβολίζουμε με C'_i το γράφημα που προκύπτει από το G' μετά τη σύνθλιψη όλων των ακμών του C'_{3-i} σε μία μοναδική κορυφή $v_i, i \in [2]$. Λέμε ότι το γράφημα που αποτελείται από την ξένη ένωση των γραφημάτων στην $\mathcal{C}(G) \setminus \{C_1, C_2\} \cup \{C'_1, C'_2\}$ είναι F -σχίσμα (F -split) του G και το

συμβολίζουμε με $G|_F$. Ας παρατηρήσουμε ότι εάν το G είναι συνεκτικό και F είναι ένας ελαχιστικός i -ακμοδιαχωριστής στο G , τότε το G είναι το αποτέλεσμα ενός i -ακμοαθροίσματος των δύο συνεκτικών συνιστωσών G_1 και G_2 του $\mathcal{C}(G|_F)$ στις κορυφές v_1 και v_2 . Από το Θεώρημα του Menger προκύπτει το ακόλουθο.

Παρατήρηση 3.1. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Εάν το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει έναν εσωτερικό i -ακμοδιαχωριστή, για κάποιο $i \in [k-1]$, και $v, v_1, \dots, v_i \in V(G)$ είναι ξένες κορυφές τέτοιες ώστε $\deg_G(v) \geq i$ τότε υπάρχουν i ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις $v_1, v_2, \dots, v_i$.

Λήμμα 3.1. Εάν το G είναι ένα $\{K_5, K_{3,3}\}$ -ελεύθερο-εμβυθίσεων συνεκτικό γράφημα και F είναι ένας ελαχιστικός εσωτερικός i -ακμοδιαχωριστής στο G , για $i \in [3]$, τότε αμφότερες οι συνεκτικές συνιστώσες του $G|_F$ είναι $\{K_5, K_{3,3}\}$ -ελεύθερες-εμβυθίσεων.

Απόδειξη. Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι, το G είναι ένα $\{K_5, K_{3,3}\}$ -ελεύθερο-εμβυθίσεων συνεκτικό γράφημα και μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του $G|_F$, έστω η C'_1 , περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση, όπου F είναι ένας ελαχιστικός εσωτερικός i -ακμοδιαχωριστής στο G , $i \in [3]$. Υποθέτουμε ότι το $H \in \{K_5, K_{3,3}\}$ εμβυθίζεται στην C'_1 και έστω ότι η $f : V(H) \rightarrow V(C'_1)$ είναι ένα μοντέλο του H στη C'_1 . Έστω επίσης ότι η v_1 είναι η νέα κορυφή του C'_1 . Παρατηρούμε ότι εάν $v_1 \notin f(V(H))$ και η v_1 δεν είναι μία εσωτερική κορυφή κανενός εκ των ξένων ως προς ακμές μονοπατιών ανάμεσα στις κορυφές του $f(V(H))$, τότε η f είναι ένα μοντέλο του H στο C_1 . Καθώς $C_1 \subseteq G$, η f είναι ένα μοντέλο του H στο G , το οποίο είναι αντίφαση στην υπόθεση. Ως εκ τούτου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είτε $v_1 \in f(V(H))$ είτε η v_1 είναι εσωτερική κορυφή σε τουλάχιστον ένα από τα ξένα ως προς ακμές μονοπάτια ανάμεσα στις κορυφές του $V(H)$.

Σημειώνουμε ότι, αφού ούτε το K_5 ούτε το $K_{3,3}$ περιέχει κορυφές βαθμού 1, $\deg_{C'_1}(v_1) = 2$ ή $\deg_{C'_1}(v_1) = 3$.

Πρώτα αποκλείουμε την περίπτωση όπου $v_1 \notin f(V(H))$, δηλαδή, η v_1 εμφανίζεται μόνο ως εσωτερική κορυφή στα ξένα ως προς ακμές μονοπάτια. Παρατηρούμε ότι, καθώς $\deg_{C'_1}(v_1) \leq 3$, η v_1 ανήκει σε ακριβώς ένα μονοπάτι P στο μοντέλο που ορίζεται από την f . Έστω ότι v_1^1 και v_1^2 είναι οι γείτονες της v_1 στο P . Θυμόμαστε ότι, από τον ορισμό ενός εσωτερικού F -σχίσματος, υπάρχουν κορυφές v_2^1 και v_2^2 στο C_2 τέτοιες ώστε $\{v_1^1, v_2^1\}, \{v_1^2, v_2^2\} \in E(G)$. Επιπροσθέτως, αφού το C_2 είναι συνεκτικό, υπάρχει ένα (v_2^1, v_2^2) -μονοπάτι P' στο C_2 . Συνεπώς, αντικαθιστώντας το υπομονοπάτι $P[v_1^1, v_1^2]$ με το μονοπάτι που ορίζεται από την ένωση των ακμών $\{v_1^1, v_2^1\}, \{v_2^1, v_2^2\} \in E(G)$ και το μονοπάτι P' στο C_2 , αποκτούμε ένα μοντέλο του H στο G που ορίζεται από την f , το οποίο είναι αντίφαση στην υπόθεση.

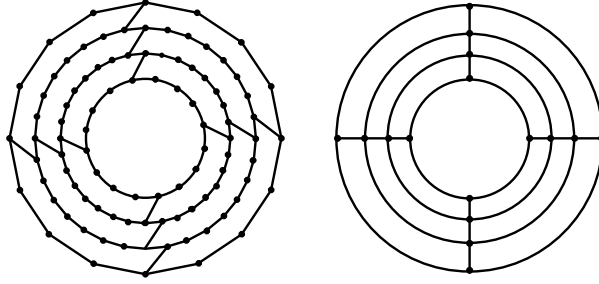
Έτσι, η μόνη πιθανή περίπτωση είναι ότι $v_1 \in f(V(H))$. Αφού $\delta(K_5) = 4$ και $\deg_{C'_1}(v_1) \leq 3$, η f ορίζει ένα μοντέλο του $K_{3,3}$ στο C'_1 . Έστω ότι οι v_1^1 , v_1^2 , και v_1^3 είναι οι γείτονες της v_1 στο C'_1 . Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει μία κορυφή v στο C_2 και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από τη v στις v_1^1, v_1^2, v_1^3 στο G , το οποίο αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα μοντέλο του $K_{3,3}$ στο G , το οποίο αντιφάσκει στην υπόθεση. Από τον ορισμό ενός εσωτερικού F -σχίσματος, υπάρχουν κορυφές v_2^1, v_2^2 , και v_2^3 στο C_2 τέτοιες ώστε $\{v_i^1, v_i^2\} \in E(G)$, $i \in [3]$. Ας θυμηθούμε ότι το C_2 είναι συνεκτικό. Συνεπώς, εάν για κάθε κορυφή $v \in C_2$, $\deg_{C_2}(v) \leq 2$, το C_2 περιέχει ένα μονοπάτι του οποίου τα άκρα, έστω u και u' , ανήκουν στο $\{v_2^1, v_2^2, v_2^3\}$ και εσωτερικά περιέχει την κορυφή στο $\{v_2^1, v_2^2, v_2^3\} \setminus \{u, u'\}$, έστω u'' . Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η u'' ικανοποιεί τις συνθήκες του ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε τότε ότι υπάρχει μία κορυφή $v \in C_2$ βαθμού τουλάχιστον 3. Έστω ότι το G' είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αφού αφαιρέσουμε όλες τις κορυφές στο $V(C_1) \setminus \{v_1^1, v_1^2, v_1^3\}$ και προσθέσουμε μία νέα κορυφή την οποία κάνουμε

γειτονική με τις κορυφές του $\{v_1^1, v_1^2, v_1^3\}$. Καθώς το G δεν περιέχει έναν εσωτερικό i -ακμοδιαχωριστή, $i \in [2]$, το G' δεν περιέχει ένα εσωτερικό i -ακμοδιαχωριστή, $i \in [2]$. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 3.1 και το γεγονός ότι $v \notin \{v_1^1, v_1^2, v_1^3\}$, προκύπτει ότι υπάρχουν τρία ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από τη v στις v_1^1, v_1^2, v_1^3 στο G' και άρα στο G . Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού και το λήμμα έπεται. $\square$

Έστω $r \geq 3$ και $q \geq 1$. Ένας (r, q) -κύλινδρος ((r, q) -cylinder), ο οποίος συμβολίζεται με $C_{r,q}$, είναι το καρτεσιανό γινόμενο ενός κύκλου με r κορυφές και ενός μονοπατιού με q κορυφές. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 3.7.) Ένας (r, q) -δακτύλιος με ράγες ((r, q) -railed annulus) σε ένα γράφημα G είναι ένα ζεύγος $(\mathcal{A}, \mathcal{W})$, όπου η $\mathcal{A}$ είναι μία συλλογή από r εμφωλευμένους κύκλους $C_1, C_2, \dots, C_r$ που συναντιούνται όλοι από μία συλλογή $\mathcal{W}$ από q μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_q$ (τα οποία καλούνται ράγες (rails)) με τέτοιο τρόπο ώστε η τομή μίας ράγας και ενός μονοπατιού είναι πάντα ένα (πιθανόν τετριμμένο, δηλαδή, που αποτελείται από μία μόνο κορυφή) μονοπάτι. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 3.7.) Ας παρατηρήσουμε ότι, δοσμένου ενός γραφήματος G εμβαπτισμένου στη σφαίρα και ενός (k, h) -κυλίνδρου $((r, q)$ -δακτυλίου με ράγες, αντίστοιχα) του G , οποιοιδήποτε δύο από τους κύκλους του (k, h) -κυλίνδρου $((r, q)$ -δακτυλίου με ράγες, αντίστοιχα) ορίζουν έναν δακτύλιο ανάμεσά τους.

Κλαδοαποσύνθεσεις. Μία κλαδοαποσύνθεση ενός γραφήματος (*branch decomposition*) G είναι ένα ζεύγος $\mathcal{B} = (T, \tau)$, όπου το T είναι ένα τριαδικό δέντρο και η $\tau : E(G) \rightarrow \mathcal{L}(T)$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση των ακμών του G στα φύλλα του T , τα οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(T)$. Δοσμένης μίας κλαδοαποσύνθεσης $\mathcal{B}$, ορίζουμε την συνάρτηση $\sigma_{\mathcal{B}} : E(T) \rightarrow \mathbb{N}$ ως εξής.

Δοσμένης μίας ακμής $e \in E(T)$, έστω ότι τα T_1 και T_2 είναι τα δέντρα



Σχήμα 3.7: Ένας $(4,4)$ -δακτύλιος με ράγες και ένας $(4,4)$ -κύλινδρος.

στο $T \setminus \{e\}$. Τότε

$$\sigma_B(e) = |\{v \mid \text{υπάρχουν } e_i \in \tau^{-1}(\mathcal{L}(T_i)), i \in [2], \text{ τέτοιες ώστε } e_1 \cap e_2 = \{v\}\}|.$$

Το πλάτος (*width*) μίας κλαδοαποσύνθεσης $\mathcal{B}$ είναι $\max_{e \in E(T)} \sigma_B(e)$ και το κλαδοπλάτος (*branch-width*) ενός γραφήματος G , το οποίο συμβολίζουμε με $\text{bw}(G)$, είναι το ελάχιστο πλάτος πάνω από όλες τις κλαδοαποσυνθέσεις του G . Όταν $|V(T)| \leq 1$, τότε το πλάτος της κλαδοαποσύνθεσης ορίζεται να είναι 0. Το ακόλουθο έχει αποδειχθεί στο [111].

Θεώρημα 3.6 ([111]). *Εάν το G είναι ένα επίπεδο γράφημα και k, h είναι ακέραιοι με $k \geq 3$ και $h \geq 1$ τότε το G είτε περιέχει τον (k, h) -κύλινδρο σαν ελάσσον είτε το κλαδοπλάτος του είναι το πολύ $k + 2h - 2$.*

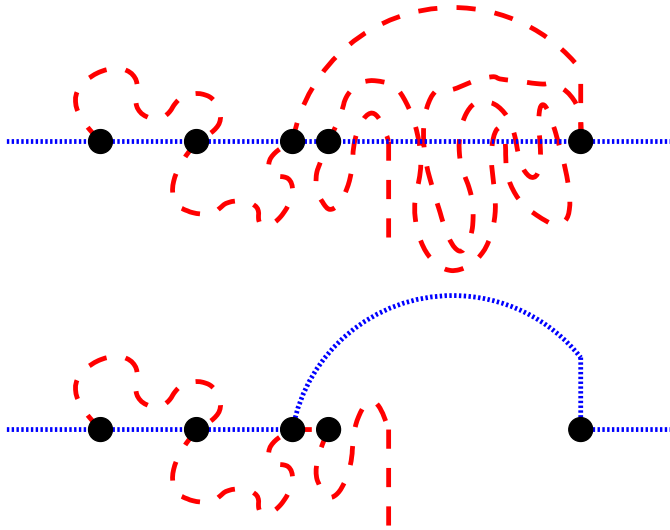
Τώρα αποδεικνύουμε το επόμενο.

Λήμμα 3.2. *Εάν το G είναι ένα επίπεδο γράφημα κλαδοπλάτους τουλάχιστον 11, τότε το G περιέχει έναν $(4,4)$ -δακτύλιο με ράγες.*

Απόδειξη. Έστω ότι το G είναι ένα επίπεδο γράφημα κλαδοπλάτους το πολύ 11. Τότε από το Θεώρημα 3.6, το G περιέχει τον $(4, 4)$ -κύλινδρο σαν ελάσσον. Από τον ορισμό της σχέσης ελάσσονος, το G περιέχει έναν $(4, 4)$ -δακτύλιο με ράγες. □

3.2.1 (Σύρρες) Οικογένειες Μονοπατιών

Λήμμα 3.3. Έστω ένα γράφημα G και $v, v_1, v_2 \in V(G)$ τέτοιες ώστε υπάρχουν ξένα ως προς ακμές μονοπάτια P_1 και P_2 από την v στην v_1 και την v_2 αντίστοιχα. Εάν τα μονοπάτια P_1 και P_2 δεν είναι καλώς-κατεταγμένα τότε υπάρχουν ξένα ως προς ακμές μονοπάτια P'_1 και P'_2 από την v στις v_1 και v_2 αντίστοιχα τέτοια ώστε $E(P'_1) \cup E(P'_2) \subsetneq E(P_1) \cup E(P_2)$.



Σχήμα 3.8: Ένα παράδειγμα της διαδικασίας στο Λήμμα 3.3.

Απόδειξη. Έστω $Z = V(P_1) \cap V(P_2) = \{v, u_1, u_2, \dots, u_k\}$, όπου $(v, u_1, u_2, \dots, u_k)$ είναι η διάταξη με την οποία οι κορυφές του Z εμφανίζονται στο P_1 , και $(v, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k})$ είναι η διάταξη με την οποία εμφανίζονται στο P_2 . Αφού τα μονοπάτια δεν είναι καλώς-κατεταγμένα υπάρχει $\lambda \in [k]$ τέτοιος ώστε $u_\lambda \neq u_{i_\lambda}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο λ είναι ο μικρότερος τέτοιος ακέραιος. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας

υποθέσουμε ότι $u_\lambda < u_{i_\lambda}$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} P'_1 &= P_1[v, u_{\lambda-1}] \cup P_2[u_{\lambda-1}, u_{i_\lambda}] \cup P_1[u_{i_\lambda}, v_1] \\ P'_2 &= P_2[v, u_{\lambda-1}] \cup P_1[u_{\lambda-1}, u_\lambda] \cup P_2[u_\lambda, v_2]. \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι τα P'_1 και P'_2 ικανοποιούν τις επιθυμητές ιδιότητες. (Για ένα παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 3.8.) $\square$

Προτού προχωρήσουμε στη διατύπωση και την απόδειξη της επόμενης πρότασης χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό. Δοσμένης μίας συλλογής από μονοπάτια $\mathcal{P}$ σε ένα γράφημα G , ορίζουμε τη συνάρτηση $f_{\mathcal{P}} : \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P) \rightarrow \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f(x)$ είναι το πλήθος των ζευγών από μονοπάτια $P, P' \in \mathcal{P}$ για τα οποία η x είναι μία επικαλύπτουσα κορυφή. Έστω

$$g(\mathcal{P}) = \sum_{x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P)} f_{\mathcal{P}}(x).$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$ και άρα $g(\mathcal{P}) \geq 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι $g(\mathcal{P}) = 0$ εάν και μόνο εάν η $\mathcal{P}$ είναι μία σύρροη συλλογή από μονοπάτια.

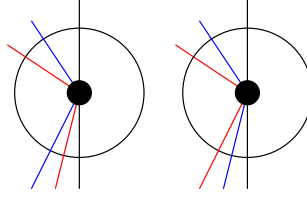
Το Λήμμα 3.3 μας επιτρέπει να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα για γενικές επιφάνειες καθώς η απόδειξη για αυτή τη γενικότερη περίπτωση δεν έχει καμμία ουσιώδη διαφορά από την περίπτωση όπου Σ είναι η σφαίρα $\mathbb{S}_0$.

Πρόταση 3.1. Έστω r ένας θετικός ακέραιος. Εάν το G είναι ένα γράφημα εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια Σ , $v, v_1, v_2, \dots, v_r \in V(G)$ και $\mathcal{P}$ είναι μία συλλογή από r ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$ στο G , τότε το G περιέχει μία σύρροη συλλογή $\mathcal{P}'$ από r καλώς-κατεταγμένα και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από τη v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$ όπου $|\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$ και τέτοια ώστε $E(\bigcup_{P \in \mathcal{P}'} P) \subseteq E(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\hat{G}$ είναι το παραγόμενο υπογράφημα του G που ενάγεται από τις ακμές των μονοπατιών στην $\mathcal{P}$ και έστω ότι το G' είναι ένα ελαχιστικό παραγόμενο υπογράφημα του $\hat{G}$ που περιέχει μία συλλογή από r ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από τη v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$. Έστω επίσης ότι $\mathcal{P}'$ είναι η συλλογή από r ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από τη v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$ στο G' για την οποία η $g(\mathcal{P}')$ είναι ελάχιστη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g(\mathcal{P}') = 0$.

Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι $g(\mathcal{P}') > 0$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μία συλλογή $\tilde{\mathcal{P}}$ από r ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$ στο G' τέτοια ώστε $g(\tilde{\mathcal{P}}) < g(\mathcal{P}')$. Καθώς $g(\mathcal{P}') > 0$, τότε υπάρχει ένα μονοπάτι, έστω $P_1 \in \mathcal{P}'$, το οποίο περιέχει μία επικαλύπτουσα κορυφή u . Έστω ότι το z_1 είναι το άκρο του P_1 το οποίο είναι διαφορετικό από την v . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η u είναι η επικαλύπτουσα κορυφή του P_1 η οποία βρίσκεται κοντύτερα στη z_1 στο P_1 . Τότε υπάρχει ένα (v, z_2) -μονοπάτι $P_2 \in \mathcal{P}'$ έτσι ώστε η u να είναι επικαλύπτουσα κορυφή των P_1 και P_2 . Έστω ότι $\tilde{P}_i = P_{3-i}[v, u] \cup P_i[u, z_i]$, $i \in [2]$, και $\tilde{P} = P$ για κάθε $P \in \mathcal{P}' \setminus \{P_1, P_2\}$. Αφού το Λήμμα 3.3 και η ελαχιστικότητα ως προς το πλήθος των ακμών του G' συνεπάγονται ότι τα μονοπάτια P_1 και P_2 είναι καλώς-κατεταγμένα, προκύπτει ότι το $\tilde{P}_i$ είναι ένα μονοπάτι από την v στην z_i , $i \in [2]$. Έστω ότι η $\tilde{\mathcal{P}}$ είναι η $\{\tilde{P} \mid P \in \mathcal{P}'\}$. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η $\tilde{\mathcal{P}}$ είναι μία συλλογή από r ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις $v_1, v_2, \dots, v_r$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι $g(\tilde{\mathcal{P}}) < g(\mathcal{P}')$.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε ότι, εάν $x \neq u$ τότε $f_{\tilde{\mathcal{P}}}(x) = f_{\mathcal{P}'}(x)$. Άρα, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $f_{\tilde{\mathcal{P}}}(u) < f_{\mathcal{P}'}(u)$. Παρατηρούμε ότι εάν $\{P, P'\} \subseteq \mathcal{P}' \setminus \{P_1, P_2\}$ και η u είναι μία επικαλύπτουσα κορυφή των P και P' στην $\mathcal{P}'$ τότε η u είναι επίσης επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}$ και $\tilde{P}'$ στην $\tilde{\mathcal{P}}$. Επιπροσθέτως, ενώ η u είναι μία επικαλύπτουσα κορυφή στη περίπτωση

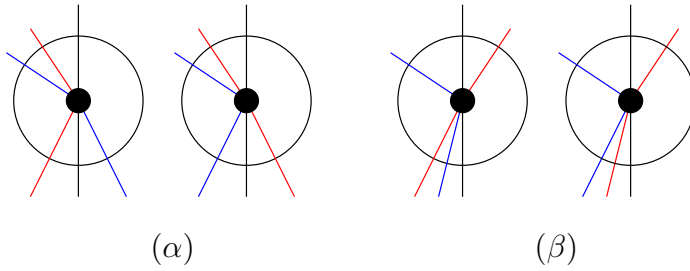


Σχήμα 3.9: Τα μονοπάτια P (μαύρο), P_1 (κόκκινο) και P_2 (μπλε) και τα μονοπάτια $\tilde{P}_1$ (μπλε) και $\tilde{P}_2$ (κόκκινο).

όπου $\{P, P'\} = \{P_1, P_2\}$, δεν είναι μία επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}_1$ και $\tilde{P}_2$. Παραμένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $|\{P, P'\} \cap \{P_1, P_2\}| = 1$. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε την περίπτωση όπου ένα από τα μονοπάτια P και P' , έστω P' , είναι το P_1 ή το P_2 , και $P \in P' \setminus \{P_1, P_2\}$. Έστω ότι Δ_u είναι ένας δίσκος γύρω από την u και Δ_1, Δ_2 είναι οι δύο ξένοι δίσκοι που περιέχονται στο εσωτερικό του Δ_u αφού αφαιρέσουμε το P . Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Η u δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή ούτε των P_1 και P , ούτε των P_2 και P (δείτε το Σχήμα 3.9). Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το ίδιο ισχύει για τα ζεύγη των μονοπατιών $\tilde{P}_1$ και P , και $\tilde{P}_2$ και P . Πράγματι, ως παρατηρήσουμε ότι για κάθε $i \in [2]$, το P_i τέμνει ακριβώς έναν από τους Δ_1 και Δ_2 . Επιπροσθέτως, καθώς η u είναι μία επικαλύπτουσα κορυφή των P_1 και P_2 , αμφότερα τα μονοπάτια τέμνουν τον ίδιο δίσκο. Από την παρατήρηση ότι $P_1 \cup P_2 = \tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2$, συμπεραίνουμε ότι η u δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή ούτε των $\tilde{P}_1$ και P ούτε των $\tilde{P}_2$ και P .

Περίπτωση 2. Η u είναι επικαλύπτουσα κορυφή των P_i και P αλλά όχι των P_{3-i} και P , $i \in [2]$ (δείτε το Σχήμα 3.10). Παρατηρούμε ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα.

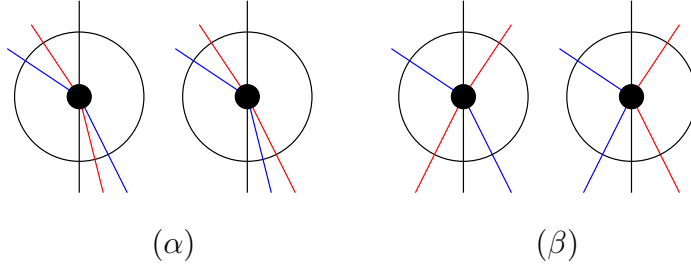


Σχήμα 3.10: Τα μονοπάτια P (μαύρο), P_1 (κόκκινο) και P_2 (μπλε) και τα μονοπάτια $\tilde{P}_1$ (μπλε) και $\tilde{P}_2$ (κόκκινο).

- Το $P_i[v, u] \cup P_{3-i}[v, u]$ τέμνει ακριβώς έναν από τους δίσκους Δ_1 ή Δ_2 , έστω Δ_1 . Τότε το $P_i[u, z_i]$ τέμνει τον Δ_2 και το $P_{3-i}[u, z_{3-i}]$ τέμνει τον Δ_1 . Συνεπώς, είναι εύκολο να δούμε ότι, η u δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}_i$ και P αλλά είναι επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}_{3-i}$ και P .
- Το $P_i[u, z_i] \cup P_{3-i}[u, z_{3-i}]$ τέμνει ακριβώς έναν από τους δίσκους Δ_1 ή Δ_2 , έστω Δ_1 . Τότε το $P_i[v, u]$ τέμνει τον Δ_2 και το $P_{3-i}[v, u]$ τέμνει τον Δ_1 . Συνεπώς, είναι εύκολο να δούμε ότι, η u είναι επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}_i$ και P και δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή των $\tilde{P}_{3-i}$ και P .

Περίπτωση 3. Η u είναι επικαλύπτουσα κορυφή αμφότερων των P_1 και P , και P_2 και P (δείτε το Σχήμα 3.11). Όπως παραπάνω, ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα.

- Το $P_1[v, u] \cup P_2[v, u]$ τέμνει ακριβώς έναν από τους δίσκους Δ_1 ή Δ_2 , έστω Δ_1 . Τότε το $P_1[u, z_1] \cup P_2[u, z_2]$ τέμνει τον Δ_2 . Συνεπάγεται ότι η u είναι επικαλύπτουσα κορυφή αμφότερων των $\tilde{P}_1$ και P , και $\tilde{P}_2$ και P .



Σχήμα 3.11: Τα μονοπάτια P (μαύρο), P_1 (κόκκινο) και P_2 (μπλε) και τα μονοπάτια $\tilde{P}_1$ (μπλε) και $\tilde{P}_2$ (κόκκινο).

- Το $P_1[v, u] \cup P_2[u, z_2]$ τέμνει ακριβώς έναν από τους δίσκους Δ_1 ή Δ_2 , έστω Δ_1 . Τότε το $P_1[u, z_1] \cup P_2[v, u]$ τέμνει τον Δ_2 . Συνεπάγεται ότι η u δεν είναι επικαλύπτουσα κορυφή ούτε των $\tilde{P}_1$ και P ούτε των $\tilde{P}_2$ και P .

Από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι $f_{\tilde{\mathcal{P}}}(u) < f_{\mathcal{P}'}(u)$ και άρα ότι $g(\tilde{\mathcal{P}}) < g(\mathcal{P}')$, αντιφάσκοντας στην επιλογή της $\mathcal{P}'$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης. $\square$

3.2.2 Ένα Θεώρημα Αποσύνθεσης

Αποδεικνύουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα αποσύνθεσης για τα $(K_5, K_{3,3})$ -ελεύθερα-εμβυθίσεων γραφήματα.

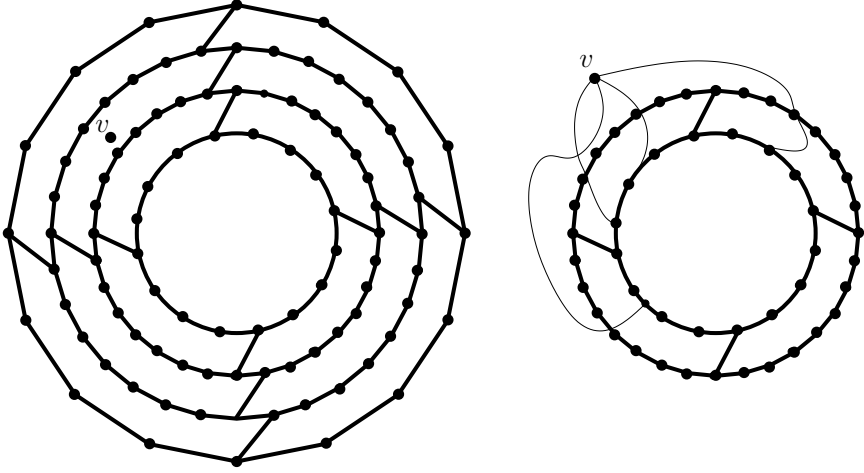
Θεώρημα 3.7. *Εάν το G είναι ένα γράφημα που δεν περιέχει τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση, τότε το G μπορεί να κατασκευαστεί εφαρμόζοντας διαδοχικά i -ακμοαθροίσματα, για $i \in [3]$, σε επίπεδα γραφήματα τα οποία είναι είτε υποκυβικά είτε έχουν κλαδοπλάτος το πολύ 10.*

Απόδειξη. Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι, ένα γράφημα G το οποίο είναι $(K_5, K_{3,3})$ -ελεύθερο-εμβυθίσεων είναι και $(K_5, K_{3,3})$ -ελεύθερο-τοπολογικών-

ελασσόνων. Συνεπώς, από το Θεώρημα του Kuratowski, το G είναι επίπεδο. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι ένα $(K_5, K_{3,3})$ -ελεύθερο-εμβυθίσεων γράφημα G χωρίς κανέναν εσωτερικό i -ακμοδιαχωριστή, $i \in [3]$. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι το G είτε είναι επίπεδο υποκυβικό είτε έχει κλαδοπλάτος το πολύ 10. Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{bw}(G) \geq 11$ και ότι το G περιέχει κάποια κορυφή v βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 4. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι το G περιέχει το $K_{3,3}$ ως εμβύθιση. Πρώτα, έστω ότι το G^s είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αφού υποδιαιρέσουμε όλες τις ακμές του μία φορά. Παρατηρούμε ότι το G^s περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση εάν και μόνο εάν το G περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση. Ως εκ τούτου, από εδώ και στο εξής, εργαζόμαστε για να βρούμε το $K_{3,3}$ στο G^s σαν εμβύθιση.

Από το Λήμμα 3.2, το G , και άρα το G^s , περιέχει έναν $(4, 4)$ -δακτύλιο με ράγες σαν υπογράφημα. Παρατηρούμε τότε ότι, το G^s περιέχει επίσης σαν υπογράφημα έναν $(2, 4)$ -δακτύλιο με ράγες τέτοιον ώστε η κορυφή v βαθμού τουλάχιστον 4 να μην ανήκει στον δακτύλιο ανάμεσα στους κύκλους του. (Το Σχήμα 3.12 αναπαριστά την περίπτωση όπου η v βρίσκεται εντός του δακτυλίου ανάμεσα στον δεύτερο και τον τρίτο κύκλο.) Συμβολίζουμε με C_1 και C_2 τους εμφωλευμένους κύκλους και με R_1, R_2, R_3 και R_4 τις ράγες του παραπάνω $(2, 4)$ -δακτυλίου με ράγες. Έστω ότι ο A είναι ο δακτύλιος ανάμεσα στους C_1 και C_2 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο C_1 διαχωρίζει την v από τον C_2 και ότι ο A είναι ελαχιστικός ως προς ακμές, δηλαδή, δεν υπάρχει άλλος δακτύλιος A' τέτοιος ώστε $|E(A')| < |E(A)|$ και $A' \subseteq A$.

Έστω τώρα ότι $G_1, G_2, \dots, G_p$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $A \setminus (C_1 \cup C_2)$.



Σχήμα 3.12: Ο $(4,4)$ -δακτύλιος με ράγες και η κορυφή v .

Ισχυρισμός 1. Για κάθε $i \in [p]$ και κάθε $j \in [2]$,

$$|N_{G^s}(V(G_i)) \cap V(C_j)| \leq 1.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε υπάρχει κύκλος C'_j τέτοιος ώστε οι C'_j και $C_j \bmod 2+1$ ορίζουν έναν δακτύλιο A' με $A' \subseteq A$ και $|E(A')| < |E(A)|$: αντίφαση στην ελαχιστικότητα ως προς ακμές του δακτυλίου A . $\square$

Για κάθε $l \in [p]$, συμβολίζουμε με u_1^l και u_2^l τους μοναδικούς γείτονες του G_k στους C_1 και C_2 αντίστοιχα (όποτε υπάρχουν). Καλούμε τις συνεκτικές συνιστώσες οι οποίες έχουν και έναν γείτονα στον C_1 και έναν γείτονα στον C_2 ουσιαστικές (*substantial*). Έστω ότι

$$\mathcal{C} = \{ \widehat{G}_i = G[V(G_i) \cup \{u_1^i, u_2^i\}] \mid$$

η G_i είναι μία ουσιαστική συνεκτική συνιστώσα $\}$.

Δηλαδή, το $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο των γραφημάτων που ενάγονται από τις ουσιαστικές συνεκτικές συνιστώσες και τους γείτονες τους στους κύκλους C_1 και C_2 . Σημειώνουμε εδώ ότι κάθε ακμή του G έχει υποδιαιρεθεί στο G^s και έτσι κάθε ακμή $e \in G$ για την οποία $e \cap C_1 \neq \emptyset$ και $e \cap C_2 \neq \emptyset$ αντιστοιχεί σε μία ουσιαστική συνεκτική συνιστώσα στο $\mathcal{C}$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι υπάρχουν τέσσερα σύρρα και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια P_1, P_2, P_3 , και P_4 από την v στον C_2 στο G^s . Αυτό απορρέει από τα δεδομένα ότι το G^s δεν περιέχει εσωτερικό i -ακμοδιαχωριστή, $i \in [3]$, ο C_2 περιέχει τουλάχιστον 4 κορυφές, και $\deg_{G^s}(v) \geq 4$, συνδυασμένα με την Παρατήρηση 3.1. Επιπλέον, από την Πρόταση 3.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα P_1, P_2, P_3 , και P_4 είναι σύρρα.

Έστω ότι P'_i είναι το υπομονοπάτι $P_i[v, v_i]$ του P_i , όπου v_i είναι η κορυφή στο $V(P_i) \cap V(C_2)$ της οποίας η απόσταση από την v στο P_i είναι ελάχιστη, $i \in [4]$. Ας θυμηθούμε ότι όλες οι ακμές του G έχουν υποδιαιρεθεί στο G^s . Αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχουν τέσσερα (πιθανόν όχι ξένα) γραφήματα στην $\mathcal{C}$, έστω $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$, και $\hat{G}_4$, τέτοια ώστε $v_i = u_2^i$, $i \in [4]$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Τα γραφήματα $\hat{G}_1, \hat{G}_2, \hat{G}_3$, και $\hat{G}_4$ είναι ξένα ως προς κορυφές. Αυτό συνεπάγεται ότι τα άκρα των P'_1, P'_2, P'_3 , και P'_4 είναι ξένα. Έστω ότι G' είναι το γράφημα που ενάγεται από τους κύκλους C_1, C_2 και τα μονοπάτια P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 και έστω ότι τα $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$, και $\hat{P}_4$ είναι σύρρα και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις u_2^1, u_2^2, u_2^3 , και u_2^4 στο G' τέτοια ώστε

(i) το $\sum\{e \mid e \in \bigcup_{i \in [4]} E(\hat{P}_i) \setminus E(A)\}$ είναι ελάχιστο, δηλαδή, το πλήθος των ακμών των μονοπατιών που βρίσκονται εκτός του A είναι ελάχιστο, και

(ii) δεδομένου του (i), το $\sum\{e \mid e \in \bigcup_{i \in [4]} E(\hat{P}_i)\}$ είναι ελάχιστο.

Έστω επίσης ότι το $\widehat{G}$ είναι το γράφημα που ενάγεται από τους C_1, C_2 , και τα $\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{P}_3$, και $\widehat{P}_4$. Από εδώ και στο εξής εργαζόμαστε προς το να δείξουμε ότι το $\widehat{G}$ περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση. Για κάθε $i \in [4]$ καλούμε μία συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{P}_i \cap C_1$ *μη-τετριμμένη* (*non-trivial*) εάν περιέχει τουλάχιστον μία ακμή.

Ισχυρισμός 2. Για κάθε $i \in [4]$, το $\widehat{P}_i \cap C_1$ περιέχει το πολύ μία μη-τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα Q_i και η u_1^i είναι άκρο της Q_i .

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2. Πρώτα παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι από την v στην v_i στο $\widehat{G}$ περιέχει την u_1^i , και άρα $u_1^i \in V(\widehat{P}_i)$. Προσέχουμε τώρα ότι το $\widehat{P}_i[u_1^i, u_2^i]$ είναι ένα υπομονοπάτι του $\widehat{P}_i$ του οποίου οι εσωτερικές κορυφές δεν ανήκουν στον C_1 . Άρα, εάν η u_1^i ανήκει σε μία μη-τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα Q_i του $\widehat{P}_i \cap C_1$, τότε η u_1^i είναι άκρο της Q_i . Θα αποδείξουμε τώρα ότι, οποιαδήποτε μη-τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα του $\widehat{P}_i \cap C_1$ περιέχει την u_1^i .

Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει μία μη-τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα P του $\widehat{P}_i \cap C_1$ η οποία δεν περιέχει την u_1^i . Έστω ότι η u είναι το άκρο της P για το οποίο η $\mathbf{dist}_{\widehat{P}_i}(u, u_1^i)$ είναι ελάχιστη. Έστω επίσης ότι η u' είναι η κορυφή στο $\widehat{P}_i[u, u_1^i] \cap C_1$ όπου η $\mathbf{dist}_{\widehat{P}_i}(u, u')$ είναι ελάχιστη. Έστω ότι P' είναι το υπομονοπάτι του C_1 με άκρα u, u' για το οποίο το $\widehat{P}_i[u, u'] \cup P'$ είναι ένας κύκλος C με $C \cap P = \{u\}$. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι το εσωτερικό του $\widehat{P}_i[u, u'] \cup P'$ είναι ο ανοικτός δίσκος που δεν περιέχει κορυφές του $\widehat{P}_i$.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε μονοπάτι $\widehat{P}_j$, $j \in [4]$, $\widehat{P}_j \cap P' \subseteq \{u, u'\}$. Καθώς αυτό ισχύει τετριμμένα για $j = i$ θα υποθέσουμε ότι $j \neq i$. Ας παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $j \in [4]$, $\widehat{P}_j[v, u_1^j] \cap A \subseteq C_1$ αφού για κάθε συνεκτική συνιστώσα H του $A \setminus (C_1 \cup C_2)$ ισχύει ότι $|N_{G^s}(V(H)) \cap V(C_j)| \leq 1$. Επιπροσθέτως, ας προσέξουμε ότι ο $\widehat{P}_i[u, u'] \cup P'$ είναι διαχωριστής στο $\widehat{G}$.

Αυτό συνεπάγεται ότι η v δεν ανήκει στο εσωτερικό του $\hat{P}_i[u, u'] \cup P'$. Έτσι, εάν υπάρχει μία κορυφή z τέτοια ώστε $z \in \hat{P}_j \cap (P' \setminus \{u, u'\})$, $j \neq i$, τότε υπάρχει μία κορυφή $z' \in \hat{P}_j \cap \hat{P}_i[u, u']$, αυτό είναι αντίφαση στη συρροότητα των μονοπατιών. Μπορούμε τότε να αντικαταστήσουμε το $\hat{P}_i[u, u']$ από το P' , δημιουργώντας αντίφαση στο (i). $\square$

Συμβολίζουμε με v_i το άκρο της Q_i που είναι διαφορετικό από την u_1^i , εάν Q_i είναι η μη-τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα του $\hat{P}_i \cap C_1$, $i \in [4]$. Παρατηρούμε ότι $\hat{P}_i = \hat{P}_i[v, v_i] \cup Q_i \cup \hat{P}_i[u_1^i, u_2^i]$, όπου θέτουμε $Q_i = \emptyset$ στην περίπτωση όπου το $\hat{P}_i \cap C_1$ δεν περιέχει ακμές, $i \in [4]$. Συμβολίζουμε με T_i το υπομονοπάτι του C_1 με άκρα u_1^i και $u_1^{i \bmod 4+1}$ έτσι ώστε $T_i \cap \{\{u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_1^4\} \setminus \{u_1^i, u_1^{i \bmod 4+1}\}\} = \emptyset$, $i \in [4]$. Από την συρροότητα των μονοπατιών $\hat{P}_i$ και το γεγονός ότι η u_1^i είναι άκρο της Q_i έπεται ότι $Q_i \subseteq T_i$ ή $Q_i \subseteq T_{i-1}$, $i \in [4]$, όπου $T_{i-1} = T_{3+i \bmod 4}$ εάν $i - 1 \notin [4]$.

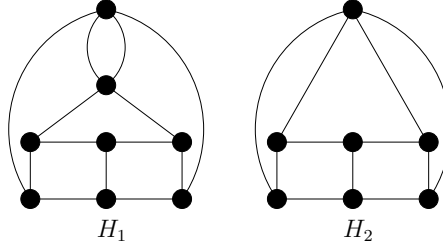
Ισχυρισμός 3. Υπάρχει $i_0 \in [4]$ τέτοιο ώστε $T_{i_0} \cap (Q_{i_0}, Q_{i_0 \bmod 4+1}) \neq T_{i_0}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3. Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $i \in [4]$ ισχύει ότι, $T_i \cap (Q_i, Q_{i \bmod 4+1}) = T_i$. Συνεπάγεται ότι είτε $Q_i = T_i = \hat{P}_i[v_i, v_1^i]$, $i \in [4]$, είτε $Q_{i \bmod 4+1} = T_i$, $i \in [4]$. Παρατηρούμε τότε ότι είτε $v_i = u_1^{i \bmod 4+1}$, $i \in [4]$, είτε $v_{i \bmod 4+1} = u_1^i$, $i \in [4]$, αντίστοιχα. Τότε, θέτουμε $\tilde{P}_{i \bmod 4+1} = \hat{P}_i[v, v_i] \cup \hat{P}_{i \bmod 4+1}[u_1^{i \bmod 4+1}, u_2^{i \bmod 4+1}]$ ή $\tilde{P}_i = \hat{P}_{i \bmod 4+1}[v, v_{i \bmod 4+1}] \cup \hat{P}_i[u_1^i, u_2^i]$, $i \in [4]$, αντίστοιχα. Ας παρατηρήσουμε ότι τα μονοπάτια $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$, και $\tilde{P}_4$ είναι σύρροα και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις u_2^1, u_2^2, u_2^3 , και u_2^4 τέτοια ώστε το $\cup_{i \in [4]} \tilde{P}_i$ να είναι ένα γνήσιο υπογράφημα του $\cup_{i \in [4]} \hat{P}_i$. Άρα, έχουμε ότι

$$\sum \{e \mid e \in \bigcup_{i \in [4]} E(\tilde{P}_i)\} < \sum \{e \mid e \in \bigcup_{i \in [4]} E(\hat{P}_i)\},$$

το οποίο είναι αντίφαση στο (ii). $\square$

Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι το $\widehat{G}$, και άρα το G , περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση. Όντως, πρώτα αφαιρούμε όλες τις ακμές του $C_1 \setminus T_{i_0}$ που δεν περιέχονται σε κανένα μονοπάτι $\widehat{P}_i$, $i \in [4]$. Τότε, ανυψώνουμε τα μονοπάτια $\widehat{P}_i$ σε μία ακμή όπου $i \neq i_0, i_0 \bmod 4 + 1$. Θέτουμε τώρα ως u_{i_0} ($u_{i_0 \bmod 4+1}$ αντίστοιχα) την κορυφή του T_{i_0} που ανήκει στο $\widehat{P}_{i_0}$ ($\widehat{P}_{i_0 \bmod 4+1}$ αντίστοιχα) και της οποίας η απόσταση από την v στο $\widehat{P}_{i_0}$ ($\widehat{P}_{i_0 \bmod 4+1}$ αντίστοιχα) είναι ελάχιστη και ανυψώνουμε τα μονοπάτια $\widehat{P}_{i_0}[v, u_{i_0}]$ και $\widehat{P}_{i_0 \bmod 4+1}[v, u_{i_0 \bmod 4+1}]$ σε μοναδικές ακμές. Παρατηρούμε ότι, το $\widehat{G}$ περιέχει το γράφημα H_2 που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.13 σαν εμβύθιση. Άρα, καταλήγουμε ότι το $\widehat{G}$ περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση.



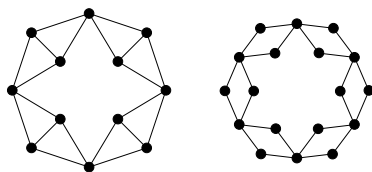
Σχήμα 3.13: Τα γράφηματα H_1 και H_2 .

Περίπτωση 2. Υπάρχουν $i_1, i_2 \in [4]$ για τα οποία τα $\widehat{G}_{i_1}$ και $\widehat{G}_{i_2}$ δεν είναι ξένα ως προς κορυφές.

Έστω τότε ότι το G^μ είναι το γράφημα που ενάγεται από τους κύκλους C_1 και C_2 και τα γράφηματα στην C' . Θα δείξουμε ότι το G^μ περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση. Πρώτα, ας θυμηθούμε ότι, οι κοινές κορυφές των $\widehat{G}_{i_1}$ και $\widehat{G}_{i_2}$ βρίσκονται σε τουλάχιστον έναν από τους κύκλους C_1 και C_2 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι έχουν μία κοινή κορυφή στον C_1 . Θυμόμαστε ότι, καθώς κάθε ακμή του G έχει υποδιαιρεθεί στο G^s , δεν υπάρχει ακμή $e \in G^s$ τέτοια ώστε $e \cap C_j \neq \emptyset$, $j \in [2]$. Αυτή η παρατήρηση και το γεγονός

ότι υπάρχουν τέσσερις ράγες ανάμεσα στους C_1 και C_2 συνεπάγονται ότι υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα γραφήματα στην C' τα οποία είναι ξένα ως προς κορυφές. Συνεπάγεται ότι υπάρχουν τρία ξένα ως προς κορυφές γραφήματα, έστω $\hat{G}_{i_3}, \hat{G}_{i_4}, \hat{G}_{i_5}$, στην C' με τις επιπλέον ιδιότητες ότι $\hat{G}_{i_{2+r}} \cap \hat{G}_{i_1} \cap C_1 = \emptyset$, $r \in [3]$, και ότι το πολύ ένα από τα $\hat{G}_{i_3}, \hat{G}_{i_4}, \hat{G}_{i_5}$ έχει μία κοινή κορυφή με ένα από τα $\hat{G}_{i_1}, \hat{G}_{i_2}$. Σημειώνουμε εδώ ότι κανένα από τα $\hat{G}_{i_3}, \hat{G}_{i_4}, \hat{G}_{i_5}$ δεν μπορεί να έχει κοινή κορυφή με κάποιο από τα $\hat{G}_{i_1}, \hat{G}_{i_2}$ στον C_2 , στην περίπτωση όπου $\hat{G}_{i_1} \cap \hat{G}_{i_2} \cap C_2 \neq \emptyset$. Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι, το G^μ περιέχει το H_1 (ή το H_2 , αντίστοιχα) που απεικονίζεται στο Σχήμα 3.13 σαν τοπολογικό ελάσσον όταν $\hat{G}_{i_1} \cap \hat{G}_{i_2} \cap C_2 \neq \emptyset$ ($\hat{G}_{i_1} \cap \hat{G}_{i_2} \cap C_2 = \emptyset$, αντίστοιχα). Ας παρατηρήσουμε ότι, το H_1 περιέχει το H_2 σαν εμβύθιση. Επιπλέον, ας παρατηρήσουμε ότι, το H_2 περιέχει το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση. Άρα το G^μ , και συνεπώς το G^s και το G , περιέχουν το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση, αντίφαση. $\square$

Σχόλιο 1. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι τα αποτελέσματά μας ισχύουν για αμφότερες τις σχέσεις της ασθενούς και της ισχυρής εμβύθισης.



Σχήμα 3.14: Απλά μη-υποκυβικά γραφήματα κλαδοπλάτους 3 χωρίς τα K_5 και $K_{3,3}$ σαν εμβυθίσεις.

Πιστεύουμε ότι το άνω φράγμα στο κλαδοπλάτος των δομικών λίθων του Θεωρήματος 3.7 μπορεί να μειωθεί κι άλλο, ειδικά εάν περιοριστούμε σε απλά γραφήματα. Υπάρχει μία άπειρη οικογένεια γραφημάτων τα οποία είναι μη-υποκυβικά και έχουν κλαδοπλάτος 3. Δύο από αυτά απεικονίζονται στο

Σχήμα 3.14. Ωστόσο, δεν έχουμε καταφέρει να βρούμε κανένα απλό μη-υποκυβικό γράφημα κλαδοπλάτους μεγαλύτερου του 3 που να μην περιέχει το K_5 ή το $K_{3,3}$ σαν εμβύθιση.

3.3 Αλγόριθμοι

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η Θεωρία Ελάσσονων Γραφημάτων είναι μία από τις βαθύτερες της σύγχρονης Συνδυαστικής. Ωστόσο, τα Ελάσσονα Γραφημάτων, διαδραματίζουν επίσης ένα σημαντικό ρόλο στη Θεωρία Αλγορίθμων, καθώς πολλές αλγοριθμικές τεχνικές μπορούν να αντληθούν από τα δομικά θεωρία που αποδείχθηκαν στο πλαίσιό τους.

Σε αυτή την ενότητα θα θέλαμε να αναφέρουμε, μέχρι κάποιο βαθμό, μερικούς από τους πιο σημαντικούς (μετά-)αλγόριθμους που παρακίνησαν τα αποτελέσματα του παρουσιάζονται σε επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα 3.8 ([193]). *Δεδομένου ενός συγκεκριμενοποιημένου γραφήματος H , μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει, για οποιοδήποτε εισαγόμενο γράφημα G , εάν $H \leq_m G$ σε χρόνο $O(\mathbf{n}(G)^3)$, όπου οι κρυμμένες σταθερές στο συμβολισμό O εξαρτώνται μόνο από το H .*

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.8 με το Θεώρημα 3.5, αντλούμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.9. *Δοσμένης μίας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$ η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει, για κάθε εισαγόμενο γράφημα G , εάν $G \in \mathcal{F}$ σε χρόνο $O(\mathbf{n}(G)^3)$, όπου οι κρυμμένες σταθερές στο συμβολισμό O εξαρτώνται μόνο από την $\mathcal{F}$.*

Είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς την ορθότητα του παραπάνω θεωρήματος. Όπως είναι γνωστό, από το Θεώρημα 3.5, υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο παρεμποδίσεων για την κλειστή ως προς ελάσσονα κλάση

γραφημάτων $\mathcal{F}$. Επιπλέον, από το Θεώρημα 3.8, μπορούμε να κατασκευάσουμε, για κάθε μία από αυτές, έναν αλγόριθμο που αποφασίζει εάν περιέχονται σε ένα γράφημα ως ελάσσονα. Τότε, για κάθε δοσμένο γράφημα G , αποφασίζουμε εάν περιέχει κάποια από τις παρεμποδίσεις. Εάν ναι, τότε $G \notin \mathcal{F}$. Διαφορετικά, $G \in \mathcal{F}$.

Ενώ αυτό το αποτέλεσμα για τα ελάσσονα είναι ευρέως γνωστό από το 1995, δεν ήταν παρά μέχρι πέρυσι που το ανάλογο αποτέλεσμα αποδείχθηκε για τις εμβυθίσεις. Πιο συγκεκριμένα, στην [109], οι M. Grohe, K. Kawarabayashi, D. Marx, και P. Wollan απέδειξαν το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.10. Δεδομένου ενός συγκεκριμενοποιημένου γραφήματος H , μπορεί κανείς να κατασκευάσει έναν αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει, για οποιοδήποτε εισαγόμενο γράφημα G , εάν $H \leq_{im} G$ σε χρόνο $O(\mathbf{n}(G)^3)$, όπου οι κρυμμένες σταθερές στο συμβολισμό O εξαρτώνται μόνο από το H .

Όπως πριν, το Θεώρημα 3.10 συνδυασμένο με το Θεώρημα 3.5 αποδίδει το επόμενο.

Θεώρημα 3.11. Δοσμένης μίας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$ η οποία είναι κλειστή ως προς εμβυθίσεις υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει, για κάθε εισαγόμενο γράφημα G , εάν $G \in \mathcal{F}$ σε χρόνο $O(\mathbf{n}(G)^3)$, όπου οι κρυμμένες σταθερές στο συμβολισμό O εξαρτώνται μόνο από την $\mathcal{F}$.

Έτσι, από το Θεώρημα 3.9 (αντίστοιχα Θεώρημα 3.11) μπορεί κανείς άμεσα να αποδείξει ότι μία κλάση γραφημάτων μπορεί να αναγνωριστεί σε κυβικό χρόνο απλά και μόνο αποδεικνύοντας ότι είναι κλειστή ως προς ελάσσονα (αντίστοιχα εμβυθίσεις).

Γενικότερα, θεωρήματα τα οποία παρέχουν αλγοριθμικά λύσεις σε μία ευρεία κλάση προβλημάτων καλούνται *μετά-αλγοριθμικά* (*meta-algorithmic*)

θεωρήματα. Κατά την τελευταία δεκαετία πολλά τέτοια θεωρήματα εμφανίστηκαν [24, 36, 43, 94, 165, 168] και συνήθως παρέχουν έναν γενικό τρόπο αναγνώρισης ενός άνω φράγματος της πολυπλοκότητας ενός υπολογιστικού προβλήματος. Το πιο διάσημο είναι το περίφημο Θεώρημα του Courcelle [36], το οποίο δηλώνει ότι, δοσμένου ενός τύπου της ΜΔΛ υπάρχει ένας αλγόριθμος που αποφασίζει σε γραμμικό χρόνο εάν ένα εισαγόμενο γράφημα, του οποίου το δέντροπλάτος είναι φραγμένο, ικανοποιεί τον τύπο αυτό.

Θα θέλαμε να τονίσουμε εδώ ότι ενώ τα Θεωρήματα 3.9 και 3.11 είναι ύψιστης σημασίας, διαφέρουν με ουσιώδη τρόπο από τα Θεωρήματα 3.8 και 3.10. Ας παρατηρήσουμε ότι τα Θεωρήματα 3.8 και 3.10 αναφέρουν ρητά την κατασκευασσιμότητα ενός αλγορίθμου που αποφασίζει εάν ένα εισαγόμενο γράφημα G περιέχει ένα δεδομένο γράφημα H σαν ελάσσον ή σαν σύνθλιψη. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι τα Θεωρήματα 3.9 και 3.11 δηλώνουν μόνο την ύπαρξη ενός αλγορίθμου που αποφασίζει το ανήκειν ενός γραφήματος σε μία κλάση, η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα ή εμβυθίσεις.

Αυτό συμβαίνει επειδή η κατασκευή των αλγορίθμων που αναφέρονται στα Θεωρήματα 3.9 και 3.11 προϋποθέτει ότι οι παρεμποδίσεις ελασσόνων ή εμβυθίσεων είναι γνωστές για τη δοσμένη κλάση γραφημάτων $\mathcal{F}$. Ωστόσο, οι αποδείξεις στα πλαίσια της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων δεν παρέχουν καμμία κατεύθυνση προς την αναγνώριση των συνόλων παρεμπόδισης [95]. Επιπροσθέτως, αυτό φαίνεται ότι μπορεί να είναι ένα εξαιρετικά δύσκολο εγχείρημα. Η αναγνώριση των παρεμποδίσεων ελασσόνων για την παράμετρο του βάθους δέντρου και ο υπολογισμός των συνόλων παρεμπόδισης εμβυθίσεων για κλάσεις γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις είναι τα θέματα τα οποία αντιμετωπίζουμε στα επόμενα δύο κεφάλαια.

Για περισσότερα στις αλγοριθμικές τεχνικές που αντλούνται από τη Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων δείτε το Κεφάλαιο 8.

Εντοπίζοντας τις Παρεμποδίσεις για το Βάθος Δέντρου

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για κάθε κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ που είναι κλειστή ως προς ελάσσονα ή εμβυθίσεις υπάρχει ένας αλγόριθμος κυβικού χρόνου που αποφασίζει το ανήκειν ενός γραφήματος G στην κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$. Ωστόσο, ας θυμηθούμε ότι η κατασκευή ενός τέτοιου αλγόριθμου απαιτεί μία ρητή περιγραφή του συνόλου $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{C})$ ή $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ αντίστοιχα.

Ο στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι η μελέτη των τρόπων εντοπισμού των συνόλων παρεμπόδισης ελασσόνων. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτό το κεφάλαιο, θα θέλαμε να δείξουμε πόσο απαιτητικός μπορεί να είναι ο εντοπισμός ενός συνόλου παρεμπόδισης προσπαθώντας να εντοπίσουμε τις παρεμποδίσεις ελασσόνων για την παράμετρο του βάθους δέντρου.

Η παράμετρος γραφημάτων του βάθους δέντρου (η οποία είναι επίσης γνωστή ως το πρόβλημα διαβάθμισης κορυφών [21] (vertex ranking), ή το

πρόβλημα του διατεταγμένου χρωματισμού [132] (ordered coloring)) έχει λάβει μεγάλη προσοχή, κυρίως λόγω της θεωρίας των κλάσεων γραφημάτων φραγμένης επέκτασης (graph classes of bounded expansion), που αναπτύχθηκε από τους J. Nešetřil και P. Ossona de Mendez. Δείτε, για παράδειγμα, τις [160–169]. (Για αναλυτικές λεπτομέρειες στις κλάσεις γραφημάτων φραγμένης επέκτασης, δείτε την [170].) Επιπροσθέτως, το βάθος δέντρου ενός γραφήματος είναι ισοδύναμο με το δέντρο διαγραφής ελάχιστου ύψους (minimum height elimination tree) σε ένα γράφημα [45, 57, 166] (η παράμετρος αυτή είναι σημαντική για την παράλληλη παραγοντοποίηση Cholesky των πινάκων (parallel Cholesky factorization of matrices) [147]). Έστω ότι $\mathcal{G}_k$ είναι η κλάση όλων των γραφημάτων με βάθος δέντρου το πολύ k .

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου, εξετάζουμε τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$, $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$, και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$, όπου με $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ συμβολίζουμε τα σύνολα των ελαχιστικών γραφημάτων σύμφωνα με τη διάταξη του υπογραφήματος και του εναγόμενου υπογραφήματος αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στο $\mathcal{G}_k$. Από το Θεώρημα 3.5 έπεται ότι το $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$ είναι πεπερασμένο για κάθε $k \geq 0$. Η περατότητα του $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ έπεται από αποτελέσματα στην [166]. Επίσης, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι, το $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ είναι πεπερασμένο (δείτε την Παρατήρηση 4.3).

Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι ένα άνω φράγμα της τάξης $2^{2^{k-1}}$ στην τάξη των γραφημάτων στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ για $k \geq 0$. Αυτό το φράγμα ισχύει επίσης για τα $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ και $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$ αφού $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k) \subseteq \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k) \subseteq \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ (Παρατήρηση 4.2). Το επόμενο μας αποτέλεσμα είναι ένα δομικό λήμμα που κατασκευάζει νέες παρεμποδίσεις από απλούστερες. Αυτό μας επιτρέπει να εντοπίσουμε, για κάθε $k \geq 0$, όλες τις άκυκλες παρεμποδίσεις της κλάσης γραφημάτων $\mathcal{G}_k$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας αυτόν τον χαρακτηρισμό αποδεικνύουμε ότι οι άκυκλες παρεμποδίσεις είναι ακ-

ριβώς $\frac{1}{2}2^{2^{k-1}-k}(1 + 2^{2^{k-1}-k})$ για όλες τις σχέσεις. Μέχρι στιγμής, ένα τέτοιο παραμετροποιημένο σύνολο άκυκλων παρεμποδίσεων είναι γνωστό μόνο για κλάσεις γραφημάτων φραγμένου πλάτους μονοπατιού (bounded path-width) [219] και παραλλαγών του όπως ο αριθμός ανίχνευσης (search number) [179], το γνήσιο πλάτος μονοπατιού (proper path-width) [219], και το γραμμοπλάτος (linear-width) [220] (δείτε την [213] για παρόμοια αποτελέσματα σε γραφήματα με φραγμένο μέγεθος συνόλου ανάδρασης κορυφών (feedback vertex set)). Για πιο γενικά αποτελέσματα σε σύνολα παρεμποδίσης, δείτε επίσης τις [3, 35, 61, 143, 181]. Ωστόσο, αυτή είναι η πρώτη φορά που προκύπτει η ακριβής μέτρηση του πλήθους των παρεμποδίσεων μιας παραμετροποιημένης κλάσης. Το επόμενο μας αποτέλεσμα είναι η αναγνώριση των συνόλων $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$, $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$, και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(G_k)$, για $k \in [3]$. Για $k = 3$, τα σύνολα αυτά περιέχουν 12, 14, και 29 γραφήματα, αντίστοιχα. Τέλος, δείχνουμε ένα θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να εντοπίζουμε εναγόμενα υπογραφήματα ενός γραφήματος G , τα οποία έχουν το ίδιο βάθος δέντρου με το G .

Για μία θεώρηση της παραμέτρου του βάθους δέντρου από την σκοπιά της Ανίχνευσης Γραφημάτων, δείτε το Κεφάλαιο 10.

4.1 Μία Εισαγωγή στο Βάθος Δέντρου

Το βάθος δέντρου ενός συνεκτικού γραφήματος G , που συμβολίζεται με $\mathbf{td}(G)$, ορίζεται με τον εξής αναδρομικό τρόπο.

Ορισμός 4.1 (Βάθος δέντρου (Tree-depth)).

$$\mathbf{td}(G) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } |V(G)| = 1 \\ 1 + \min_{v \in V(G)} \mathbf{td}(G \setminus v) & \text{εάν } |V(G)| > 1 \end{cases}$$

Στην περίπτωση όπου το G δεν είναι συνεκτικό, τότε $\mathbf{td}(G) = \max\{\mathbf{td}(H) \mid H \in \mathcal{C}(G)\}$. (Ας θυμηθούμε ότι με $\mathcal{C}(G)$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του G .)

Λέμε, επίσης, ότι ένα γράφημα G επιδέχεται μία k -διαβάθμιση κορυφών (k -vertex ranking) εάν υπάρχει ένας έγκυρος χρωματισμός $\rho : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ τέτοιος ώστε κάθε (x, y) -μονοπάτι ανάμεσα σε δύο κορυφές με $\rho(x) = \rho(y)$ περιέχει μία κορυφή z με $\rho(z) > \rho(x)$.

Έχει αποδειχθεί από τους J. Nešetřil και P. Ossona de Mendez ότι.

Λήμμα 4.1 ([166]). *Το βάθος δέντρου ενός γραφήματος G είναι ίσο με τον ελάχιστο ακέραιο k για τον οποίο το G επιδέχεται μία k -διαβάθμιση κορυφών.*

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι.

Λήμμα 4.2 ([166]). *Για οποιονδήποτε μη-αρνητικό ακέραιο n ,*

$$\mathbf{td}(P_n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil.$$

Για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο k , συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_k$ την κλάση των γραφημάτων με βάθος δέντρου το πολύ k , δηλαδή, $\mathcal{G}_k = \{G \mid \mathbf{td}(G) \leq k\}$.

Είναι γνωστό ότι.

Λήμμα 4.3 ([21, 166]). *Εάν το H είναι ελάσσον του G , τότε $\mathbf{td}(H) \leq \mathbf{td}(G)$.*

Άρα, το Λήμμα 4.3 έχει ως άμεση συνέπεια ότι, για οποιονδήποτε μη-αρνητικό ακέραιο k , η $\mathcal{G}_k$ είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.5, το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$ είναι πεπερασμένο.

Για κάθε $R \in \{\sqsubseteq, \subseteq\}$, συμβολίζουμε με $\mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_k)$ το σύνολο των γραφημάτων με βάθος δέντρου αυστηρά μεγαλύτερο από k τα οποία είναι ελαχιστικά σύμφωνα με τη σχέση R .

Πριν διατυπώσουμε το επόμενο λήμμα χρειάζεται να δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς. Δοσμένων δύο γραφημάτων G και H , λέμε ότι το H είναι *ομομορφικό* (*homomorphic*) του G εάν υπάρχει μία απεικόνιση $f : V(H) \rightarrow V(G)$ (που καλείται *ομομορφισμός* (*homomorphism*)) τέτοια ώστε για κάθε $v, u \in V(H)$, εάν $\{u, v\} \in E(H)$ τότε $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$. Επιπλέον, λέμε ότι τα G και H είναι *ισομορφικά* (*isomorphic*) εάν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $g : V(H) \rightarrow V(G)$ (που καλείται *ισομορφισμός* (*isomorphism*)) έτσι ώστε για κάθε $v, u \in V(H)$, $\{u, v\} \in E(H)$ εάν και μόνο εάν $\{f(u), f(v)\} \in E(G)$. Στην ειδική περίπτωση όπου τα G και H είναι το ίδιο γράφημα ο ισομορφισμός καλείται επίσης *αυτομορφισμός* (*automorphism*). Λέμε ότι δύο γραφήματα G_1, G_2 είναι *ομο-ισοδύναμα* (*hom-equivalent*) εάν το G_1 είναι ομομορφικό του G_2 και το G_2 είναι ομομορφικό του G_1 . Ακόμα, ένας αυτομορφισμός f ενός γραφήματος λέγεται ότι είναι *ανελικτικός* (*involuting*) εάν και μόνο εάν $f \circ f = \text{id}$. Τέλος, δοσμένου ενός γραφήματος G και μίας συνάρτησης $\lambda : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, λέμε ότι ένας αυτομορφισμός $f : V(G) \rightarrow V(G)$ είναι *λ -διατηρητικός* (*λ -preserving*) εάν $f \circ \lambda = \lambda$ και λέμε ότι η $f : V(G) \rightarrow V(G)$ έχει την ιδιότητα *σταθερού σημείου* (*fixed point property*) εάν, για οποιοδήποτε συνεκτικό υπογράφημα H του G , $f(H) \cap H = \emptyset$ ή περιέχει ένα σταθερό σημείο της f .

Λήμμα 4.4 ([166]). Υπάρχει μία συνάρτηση $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για οποιονδήποτε ακέραιο N , οποιοδήποτε γράφημα G τάξης $n > F(N, \text{td}(G))$, και οποιαδήποτε απεικόνιση $g : V(G) \rightarrow [N]$ υπάρχει ένας μη-τετριμμένος ανελικτικός g -διατηρητικός αυτομορφισμός $\mu : G \rightarrow G$ με την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Ένα άμεσο πόρισμα του παραπάνω λήμματος είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 4.5 ([166]). Έστω ότι $k \geq 1$ είναι ένας ακέραιος. Τότε, η κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}_k$ περιέχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\hat{\mathcal{G}}_k$ τέτοιο ώστε, για

κάθε γράφημα $G \in \mathcal{G}_k$, υπάρχει $\hat{G} \in \hat{\mathcal{G}}_k$ το οποίο είναι ομο-ισοδύναμο με το G και ισομορφικό με ένα εναγόμενο υπογράφημα του G .

Επιπροσθέτως, από το Λήμμα 4.4, μπορεί να εξαχθεί ένα υπέρ-εκθετικό (super-exponential) άνω φράγμα για την τάξη των απαγορευμένων υπογραφημάτων.

Καθώς ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να μελετήσουμε τρόπους υπολογισμού συνόλων παρεμπόδισης θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι όταν μας δίνονται ένα άνω φράγμα στην τάξη των παρεμποδίσεων μίας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$ και ένας αλγόριθμος που αποφασίζει εάν ένα εισαγόμενο γράφημα ανήκει στην $\mathcal{F}$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το σύνολο παρεμπόδισης της $\mathcal{F}$. Πράγματι, ως παρατηρήσουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει απαριθμώντας όλα τα γραφήματα μέχρι αυτό το φράγμα και αποφασίζοντας εάν ανήκουν στην $\mathcal{F}$ ή όχι. Τότε, τα ελαχιστικά γραφήματα που δεν ανήκουν στην $\mathcal{F}$ είναι οι παρεμποδίσεις της $\mathcal{F}$. Άρα, για τον υπολογισμό του συνόλου παρεμπόδισης ελασσόνων της $\mathcal{G}_k$, το μόνο που χρειαζόμαστε είναι ένας αλγόριθμος που αποφασίζει εάν ένα γράφημα G έχει βάθος δέντρου το πολύ k .

Θεώρημα 4.1 ([21]). *Για κάθε σταθερό ακέραιο k , υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που αποφασίζει εάν ένα γράφημα G έχει βάθος δέντρου k .*

Ωστόσο, όπως αναφέραμε πριν, το φράγμα που προκύπτει από το Λήμμα 4.4 είναι μία υπέρ-εκθετική συνάρτηση στο k . Αποδεικνύουμε, στην επόμενη ενότητα, ότι ένας ευθύς ισχυρισμός δείχνει ένα αρκετά καλύτερο φράγμα. Επιπλέον, στις επόμενες ενότητες, με συνδυαστικά επιχειρήματα εντοπίζουμε τα άκυκλα γραφήματα στο $\mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_k)$, $k \geq 1$ και $R \in \{\sqsubseteq, \subseteq, \leq_m\}$, και τα σύνολα $\mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_k)$, για $k \in [3]$ και $R \in \{\sqsubseteq, \subseteq, \leq_m\}$.

4.2 Άνω Φράγμα στην Τάξη των Παρεμποδίσεων για $\mathcal{G}_k$

Παρατήρηση 4.1. Για κάθε $k \geq 0$, όλα τα γραφήματα στα $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$, $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$, και $\mathbf{obs}_{\leq_m}(\mathcal{G}_k)$ είναι συνεκτικά.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το γεγονός ότι για κάθε γράφημα G , $\mathbf{td}(G) = \max\{\mathbf{td}(C) \mid C \in \mathcal{C}(G)\}$. $\square$

Παρατήρηση 4.2. Για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο k ,

$$\mathbf{obs}_{\leq_m}(\mathcal{G}_k) \subseteq \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k) \subseteq \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k).$$

Παρατήρηση 4.3. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε $G \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$, για κάποιον ακέραιο k . Τότε υπάρχει $G' \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ τέτοιο ώστε $V(G) = V(G')$ και $E(G') \subseteq E(G)$.

Απόδειξη. Έστω ότι το G είναι ένα αντιπαράδειγμα ελαχιστικού μεγέθους. Τότε, υπάρχει μία ακμή e τέτοια ώστε το $G' = G \setminus e$ επίσης να ανήκει στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$, $V(G) = V(G')$, και $E(G') \subseteq E(G)$. $\square$

Από το Λήμμα 4.5 και την Παρατήρηση 4.3 είναι εύκολο να δούμε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο k , τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ είναι επίσης πεπερασμένα.

Θεώρημα 4.2. Για οποιονδήποτε ακέραιο $k > 0$, εάν το G είναι ένα γράφημα με $\mathbf{td}(G) > k$, τότε το G περιέχει ένα συνεκτικό υπογράφημα H με $\mathbf{td}(H) > k$ και $|V(H)| \leq 2^{k-1}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι συνεκτικό, αλλιώς από τον ορισμό εστιάζουμε στην συνιστώσα του G που καθορίζει το βάθος δέντρου του. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathbf{td}(G) = k + 1$. Αποδεικνύουμε το θεώρημα με επαγωγή:

Εάν $\mathbf{td}(G) = 2$, τότε το G περιέχει τουλάχιστον μία ακμή, και μπορούμε να θέσουμε $H = K_2$. Εάν $\mathbf{td}(G) = 3$, τότε το G δεν είναι δάσος αστεριών, δηλαδή, περιέχει είτε το P_4 είτε το K_3 σαν υπογράφημα.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbf{td}(G) = k+1$ για $k \geq 3$, και ότι το θεώρημα ισχύει για όλες τις μικρότερες τιμές βάνθους δέντρου. Εάν το G περιέχει το P_{2^k} σαν υπογράφημα, τότε μπορούμε να θέσουμε $H = P_{2^k}$. Διαφορετικά, κάθε δύο κορυφές στο G συνδέονται από ένα μονοπάτι μήκους το πολύ $2^k - 2$.

Αφού $\mathbf{td}(G) > k - 1$, από την επαγωγική υπόθεση, το G περιέχει ένα υπογράφημα H_0 με $\mathbf{td}(H_0) \geq k$ και $m \leq 2^{2^{k-2}}$ κορυφές $v_1, \dots, v_m$. Για κάθε $i = 1, \dots, m$, το γράφημα $G \setminus v_i$ έχει βάνθος δέντρου μεγαλύτερο από $k - 1$. Ως εκ τούτου το $G \setminus v_i$ περιέχει ένα υπογράφημα H_i με το πολύ $2^{2^{k-2}}$ κορυφές και βάνθος δέντρου τουλάχιστον k .

Εάν υπάρχει i τέτοιο ώστε $V(H_0) \cap V(H_i) = \emptyset$, τότε θέτουμε το H να αποτελείται από τα H_0, H_i και το συντομότερο μονοπάτι που τα συνδέει. Για κάθε κορυφή v του H , το γράφημα $H \setminus v$ περιέχει το H_0 ή το H_i σαν υπογράφημα, άρα το βάνθος δέντρου του $H \setminus v$ είναι τουλάχιστον k και $\mathbf{td}(H) > k$. Επίσης, $|V(H)| \leq 2^{2^{k-2}+1} + 2^k - 3 \leq 2^{2^{k-1}}$ (για $k \geq 3$).

Από την άλλη, εάν όλα τα γραφήματα H_i τέμνουν το H_0 , τότε θέτουμε $H = H_0 \cup H_1 \cup \dots \cup H_m$. Αφού όλα τα γραφήματα H_i είναι συνεκτικά, το γράφημα H είναι επίσης συνεκτικό και έχει το πολύ $m + m(2^{2^{k-2}} - 1) \leq 2^{2^{k-1}}$ κορυφές. Παρόμοια με την προηγούμενη υπόθεση, τα γραφήματα $H \setminus v_i$ περιέχουν το H_i σαν υπογράφημα (για $i = 1, \dots, m$) και το γράφημα $H \setminus v$ για v διαφορετική από τις $v_1, \dots, v_m$ περιέχει το H_0 σαν υπογράφημα, συνεπώς $\mathbf{td}(H) > k$. $\square$

Από το Θεώρημα 4.2 και τις Παρατηρήσεις 4.2 και 4.3 προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.1. Όλα τα γραφήματα στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ (και συνεπώς, στα

$\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ και $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$ έχουν το πολύ $2^{2^{k-1}}$ κορυφές.

4.3 Ένα Δομικό Λήμμα για τις Παρεμποδίσεις του Βάθους Δέντρου

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε ένα λήμμα για το βάθος δέντρου που μας επιτρέπει να χτίσουμε νέες παρεμποδίσεις από απλούστερες παρεμποδίσεις. Πρώτα, θεωρούμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Παρατήρηση 4.4. Έστω ότι το G είναι ένα συνεκτικό γράφημα τέτοιο ώστε $\mathbf{td}(G) = k$ και ότι $\rho : V(G) \rightarrow [k]$ είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G . Τότε $|\rho^{-1}(k)| = 1$.

Απόδειξη. Εάν v_1 και v_2 είναι δύο (μη-γειτονικές) κορυφές στο $\rho^{-1}(k)$, τότε υπάρχει ένα μονοπάτι με άκρα v_1, v_2 . Ας παρατηρήσουμε ότι όλες οι εσωτερικές κορυφές αυτού του μονοπατιού έχουν χρώμα μικρότερο ή ίσο του k , αντίφαση. $\square$

Παρατήρηση 4.5. Εάν $G \in \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ (ή $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ ή $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$) τότε, για κάθε $v \in V(G)$, υπάρχει μία $(k+1)$ -διαβάθμιση κορυφών ρ τέτοια ώστε $\rho(v) = k+1$.

Απόδειξη. Αφού $G \in \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ (ή $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ ή $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$), το $G \setminus v$ επιδέχεται μία k -διαβάθμιση κορυφών ρ . Τότε η $\rho \cup (v, k+1)$ είναι η απαιτούμενη $(k+1)$ -διαβάθμιση κορυφών του G . $\square$

Έστω ότι τα G_1 και G_2 είναι δύο ξένα γραφήματα και έστω $v_i \in V(G_i)$, για $i \in [2]$. Ορίζουμε το

$$\mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2) = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{\{v_1, v_2\}\}).$$

Παρατήρηση 4.6. Έστω ότι τα G_1 και G_2 είναι ξένα γραφήματα όπου $\mathbf{td}(G_1) \leq k$ και $\mathbf{td}(G_2) \leq k$. Έστω $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$. Τότε το γράφημα $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ έχει βάθος δέντρου το πολύ $k + 1$.

Απόδειξη. Έστω ότι η ρ_i είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G_i , $i \in [2]$. Τότε, η $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \setminus \{(v_1, \rho_1(v_1))\} \cup \{(v_1, k+1)\}$ είναι μία $(k+1)$ -διαβάθμιση κορυφών του G . $\square$

Παρατήρηση 4.7. Έστω ότι τα G_1 και G_2 είναι ξένα συνεκτικά γραφήματα τέτοια ώστε $\mathbf{td}(G_1) \geq k$ και $\mathbf{td}(G_2) \geq k$. Έστω $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$. Τότε, το γράφημα $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ έχει βάθος δέντρου τουλάχιστον $k + 1$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει μία k -διαβάθμιση κορυφών $\rho : V(G) \rightarrow [k]$. Παρατηρούμε ότι $\rho^{-1}(k) \neq \emptyset$, αλλιώς $\mathbf{td}(G) < k$ αντιφάσκοντας στο δεδομένο ότι $\mathbf{td}(G_1) \geq k$. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με την Παρατήρηση 4.4, το G έχει μία μοναδική κορυφή v με $\rho(v) = k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $v \in V(G_1)$. Τότε, ο περιορισμός της ρ στο G_2 δίνει μία $(k-1)$ -διαβάθμιση κορυφών του, αντίφαση. $\square$

Λήμμα 4.6. Έστω k ένας θετικός ακέραιος και έστω $R \in \{\sqsubseteq, \subseteq, \leq_m\}$. Έστω ότι G_1 και G_2 είναι ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_{k-1})$ και έστω $v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)$. Τότε $\mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2) \in \mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_k)$.

Απόδειξη. Έστω G_1 και G_2 τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_{k-1})$ και έστω $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$. Θέτουμε $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$. Πρώτα, αποδεικνύουμε ότι $\mathbf{td}(G) = k + 1$. Πράγματι, από την Παρατήρηση 4.6, αντλούμε ότι $\mathbf{td}(G) \leq k + 1$ και, από την Παρατήρηση 4.7, αντλούμε ότι $\mathbf{td}(G) \geq k + 1$.

Τώρα, έχουμε να αποδείξουμε ότι εάν G' είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης ή της σύνθλιψης κάποιας ακμής e στο G , τότε $\mathbf{td}(G') \leq k$ (αυτό καλύπτει επίσης την περίπτωση αφαίρεσης κορυφής καθώς, από τον τρόπο που

ορίστηκε το G' , το G' είναι συνεκτικό και συνεπώς η αφαίρεση μίας κορυφής συνεπάγεται την αφαίρεση τουλάχιστον μίας ακμής).

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση όπου $e = \{v_1, v_2\}$. Εάν $G' = G \setminus e$, τότε από τον ορισμό, $\mathbf{td}(G) = \max\{\mathbf{td}(G_1), \mathbf{td}(G_2)\} \leq k$. Εάν $G' = G / e$, τότε από την Παρατήρηση 4.5, υπάρχει μία k -διαβάθμιση κορυφών ρ_i του G_i τέτοια ώστε $\rho_i(v_i) = k$, $i \in [2]$. Τότε εάν η v_{new} είναι το αποτέλεσμα της σύνθλιψης της e έχουμε ότι η $\rho : V(G') \rightarrow [k]$ όπου

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1(x) & \text{εάν } x \in V(G_1) \setminus \{v_1\} \\ \rho_2(x) & \text{εάν } x \in V(G_2) \setminus \{v_2\} \\ k & \text{εάν } x = v_{\text{new}} \end{cases}$$

είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G' , συνεπώς $\mathbf{td}(G') \leq k$.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου η e είναι μία ακμή του G_1 ή του G_2 . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $e_1 \in E(G_1)$. Επειδή $G_1 \in \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$, υπάρχει μία $(k-1)$ -διαβάθμιση κορυφών ρ'_1 του $G_1 \setminus e$ (και G_1 / e). Από την Παρατήρηση 4.5, αφού $G_2 \in \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$, υπάρχει μία k -διαβάθμιση κορυφών ρ_2 του G_2 τέτοια ώστε $\rho_2(v_2) = k$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\rho'_1 \cup \rho_2$ είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G' , άρα $\mathbf{td}(G') \leq k$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. $\square$

4.4 Άκυκλες Παρεμποδίσεις για το Βάθος Δέντρου

Για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, ορίζουμε αναδρομικά την κλάση γραφημάτων $\mathcal{T}_k$ όπως ακολούθως. Έστω ότι $\mathcal{T}_0 = \{K_1\}$ και, για κάθε $k \geq 1$, θέτουμε

$$\mathcal{T}_k = \{\mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2) \mid G_1, G_2 \in \mathcal{T}_{k-1}, v_i \in V(G_i), i \in [2]\}$$

Ο παραπάνω ορισμός μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το Λήμμα 4.6 όπως παρακάτω.

Παρατήρηση 4.8. Για κάθε θετικό ακέραιο k και κάθε $R \in \{\sqsubseteq, \subseteq, \leq_m\}$, $\mathcal{T}_k \subseteq \mathbf{obs}_R(\mathcal{G}_k)$.

Λήμμα 4.7. Για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k , εάν $G \in \mathcal{T}_k$, τότε για οποιαδήποτε κορυφή $v \in V(G)$ υπάρχει ένα φύλλο $u \neq v$ του G τέτοιο ώστε το δέντρο που κατασκευάζεται από το $G \setminus u$ μετά την προσθήκη ενός φύλλου γειτονικού στο v ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}_k$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει για οποιονδήποτε δέντρο στην $\mathcal{T}_{k-1}$, $k \geq 2$. Έστω $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_{k-1}$ και $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$, τέτοια ώστε $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$. Ας θεωρήσουμε μία τυχαία κορυφή $v \in V(G)$, και ας δείξουμε ότι υπάρχει ένα φύλλο u του G το οποίο μπορούμε να μεταφέρουμε στη v διατηρώντας παράλληλα το ανήκειν στην $\mathcal{T}_k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v \in V(G_1)$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μία κορυφή $u' \in V(G_1)$ τέτοια ώστε το δέντρο που κατασκευάζεται από το $G_1 \setminus u'$ προσθέτοντας ένα φύλλο γειτονικό v ανήκει επίσης στην $\mathcal{T}_{k-1}$. Εάν $u' \neq v_1$ μπορούμε να θέσουμε $u = u'$. Διαφορετικά, έστω ότι το u'' είναι το φύλλο του G_2 που μπορεί να μετακινηθεί στην v_2 . Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να θέσουμε $u = u''$: Μετακινώντας το φύλλο u'' στη v έχει το ίδιο αποτέλεσμα όπως μετακινώντας το στη v_2 , μετακινώντας το φύλλο u' στη v , και αντικαθιστώντας την ακμή e με μία ακμή ανάμεσα στην u'' και την κορυφή του G_1 που ήταν γειτονική στην u' . $\square$

Στο Λήμμα 4.6 περιγράψαμε μία διαδικασία η οποία για οποιονδήποτε μη-αρνητικό ακέραιο k κατασκευάζει γραφήματα $G \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k+1})$ από ξένα γραφήματα $G_1, G_2 \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ (προσθέτοντας μία ακμή η οποία συνδέει μία κορυφή v_1 του G_1 και μία κορυφή v_2 του G_2). Με το ακόλουθο λήμμα

χαρακτηρίζουμε πλήρως και κατασκευάζουμε όλα τα άκυκλα γραφήματα στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k+1})$ για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο k .

Λήμμα 4.8. Έστω ότι το G είναι ένα δέντρο στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ για $k \geq 1$. Τότε, υπάρχει μία ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε εάν $\{G_1, G_2\} = \mathcal{C}(G \setminus \{e\})$ τότε $G_1, G_2 \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $k \geq 2$ υποθέτοντας ότι το λήμμα ισχύει για όλες τις άκυκλες παρεμποδίσεις μικρότερου βάθους δέντρου. Από την Παρατήρηση 4.6, προκύπτει ότι για κάθε ακμή $e = \{v_1, v_2\} \in E(G)$, τουλάχιστον μία από τις συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2 του $G \setminus e$ έχει βάθος δέντρου τουλάχιστον k . Ισχυριζόμαστε ότι το G περιέχει τουλάχιστον μία ακμή $e = \{v_1, v_2\}$ τέτοια ώστε αμφότερες οι συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus e$ έχουν βάθος δέντρου k . Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν είναι σωστό. Τότε μπορούμε να κατευθύνουμε κάθε ακμή $e = \{v_1, v_2\}$ του $E(G)$ έτσι ώστε η ουρά της να ανήκει στη συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus e$ που έχει βάθος δέντρου αυστηρά μικρότερο από k . Συμβολίζουμε αυτό το διατεταγμένο δέντρο με $\tilde{T}$. Καθώς $k \geq 2$, το $\tilde{T}$ περιέχει εσωτερικές κορυφές. Επιπλέον, όλες οι ακμές του $\tilde{T}$ που είναι προσπίπτουσες σε φύλλα κατευθύνονται μακριά από αυτά. Έπεται ότι το $\tilde{T}$ περιέχει μία εσωτερική κορυφή v με εξώβαθμο 0. Αυτό σημαίνει ότι κάθε, έστω G_i , συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus v$ έχει μία $(k-1)$ -διαβάθμιση κορυφών ρ_i . Τότε η $\rho = \{(v, k)\} \cup \bigcup_{i=1, \dots, m} \rho_i$ είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G , μία αντίφαση και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Έστω τώρα ότι η G_i είναι η συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus e$ που περιέχει την v_i , $i \in [2]$. Εάν μία, έστω η G_1 , δεν ανήκει στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$ τότε περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα G'_1 τέτοιο ώστε $G'_1 \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$. Επιπλέον, υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι P στο G που συνδέει τη G'_1 με τη G_2 . Παρατηρούμε ότι, αφού $G \in \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$, το G είναι ακριβώς η ένωση των G'_1, G_2

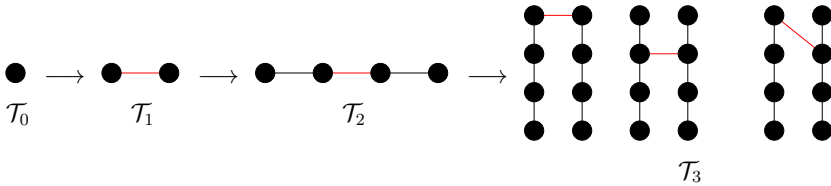
και P . Χρειάζεται να δείξουμε ότι το P δεν έχει εσωτερικές κορυφές. Ας υποθέσουμε ότι αυτή η περίπτωση δεν ισχύει, και έστω ότι w είναι η εσωτερική κορυφή του P που είναι γειτονική με μία κορυφή $v \in V(G_1)$. Από την επαγωγική υπόθεση, τα G'_1 και G_2 ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 4.7, άρα το G_1 περιέχει ένα φύλλο u τέτοιο ώστε το γράφημα που προκύπτει από το G_1 μεταφέροντας το φύλλο u στην v ανήκει στο $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_{k-1})$. Αυτό έπεται ότι μπορούμε να αφαιρέσουμε την κορυφή u από το G και να θεωρήσουμε ότι η w είναι η αντικαταστάτριά της. Το δημιουργημένο γράφημα είναι ένα γνήσιο εναγόμενο υπογράφημα του G και έχει βάθος δέντρου $k+1$, αντίφαση. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. $\square$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια των Λημμάτων 4.6 και 4.8.

Θεώρημα 4.3. Έστω ότι k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε το $\mathcal{T}_k$ είναι το σύνολο όλων των άκυκλων γραφημάτων στο $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$.

Πόρισμα 4.2. Για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο k , το $\mathcal{T}_k$ είναι το σύνολο όλων των άκυκλων γραφημάτων στο $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_k)$ (ή στο $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)$). (Δείτε το Σχήμα 4.1)

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις Παρατηρήσεις 4.2 και 4.8. $\square$



Σχήμα 4.1: Παραδείγματα άκυκλων παρεμποδίσεων.

4.5 Κάτω Φράγμα στο Πλήθος των Παρεμποδίσεων για την $\mathcal{G}_k$

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε ότι $|\mathcal{T}_k| = \frac{1}{2}2^{2^{k-1}-k}(1+2^{2^{k-1}-k})$, $k \geq 1$. Αυτό μας δίνει ένα κάτω φράγμα στο $|\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_k)|$, $k \geq 2$. Όπως θα δούμε αργότερα μπορούμε να εντοπίσουμε τα στοιχεία των συνόλων $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_i)$, $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_i)$, και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_i)$, για $i = 0, 1, 2, 3$.

Για ένα δέντρο $G \in \mathcal{T}_k$ τέτοιο ώστε $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$, καλούμε την $\{v_1, v_2\}$ μεσαία ακμή (*middle edge*) του G .

Παρατήρηση 4.9. Εάν ο k είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος τότε κάθε γράφημα στο $\mathcal{T}_k$ έχει ακριβώς 2^k κορυφές. Αυτό συνεπάγεται ότι η μεσαία ακμή ενός γραφήματος $G \in \mathcal{T}_k$ είναι μοναδική.

Ας θεωρήσουμε επίσης την ακόλουθη.

Παρατήρηση 4.10. Έστω ότι τα T^1, T^2 είναι δύο δέντρα και έστω ότι $e^i = \{v_1^i, v_2^i\} \in E(T^i)$, $i \in [2]$. Εάν η ϕ είναι ένας ισομορφισμός από το T^1 στο T^2 τέτοιος ώστε $\phi(v_i^1) = v_i^2$, $i \in [2]$, και το T_i^j είναι η συνεκτική συνιστώσα του $T^j \setminus e^j$ που περιέχει την v_i^j , $i \in [2]$, $j \in [2]$, τότε η $\phi_i = \{(x, y) \in \phi \mid x \in V(T_i^1)\}$ είναι ένας ισομορφισμός από το T_i^1 στο T_i^2 , $i \in [2]$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι, οι αυτομορφισμοί ενός γραφήματος σχηματίζουν μία ομάδα. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{Aut}(G)$ για την ομάδα αυτομορφισμών ενός γραφήματος G . Η Παρατήρηση 4.10 εύκολα έπεται το ακόλουθο.

Παρατήρηση 4.11. Έστω ότι το T είναι ένα δέντρο και $e = \{v_1, v_2\} \in E(T)$. Εάν η $\phi \in \mathbf{Aut}(T)$ ικανοποιεί ότι $\phi(v_i) = v_{3-i}$, $i \in [2]$, και το T_i είναι η συνεκτική συνιστώσα του $T \setminus e$ που περιέχει την v_i , $i \in [2]$, τότε η $\phi' = \{(x, y) \in \phi \mid x \in V(T_1)\}$ είναι ένας ισομορφισμός από το T_1 στο T_2 .

Παρατήρηση 4.12. Έστω ότι G_1, G_2 είναι ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k, k \geq 1$, και $v_i \in V(G_i), i \in [2]$. Εάν $\phi \in \mathbf{Aut}(G)$, όπου $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$, τότε $\phi(e) = e$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 4.9. $\square$

Λήμμα 4.9. Έστω ότι $G \in \mathcal{T}_k$ για $k \geq 1$, η $e = \{v_1, v_2\} \in E(G)$ είναι η μεσαία ακμή και $\phi \in \mathbf{Aut}(G)$. Εάν υπάρχει $v \in V(G)$ τέτοια ώστε $\phi(v) = v$, τότε $\phi(v_i) = v_i, i \in [2]$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $k \geq 2$. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι $\phi(v_i) = v_{3-i}, i \in [2]$. Συμβολίζουμε με G_1, G_2 τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus e$ όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $v, v_1 \in V(G_1)$. Από την Παρατήρηση 4.11, η $\phi' = \{(v_1, v_2) \in \phi \mid v_1 \in V(G_1)\}$ είναι ένας ισομορφισμός του G_1 στο G_2 , αντίφαση αφού $\phi'(v) = \phi(v) = v$. $\square$

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του ακόλουθου.

Λήμμα 4.10. Έστω ότι k είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος. Για οποιαδήποτε $G \in \mathcal{T}_k$ και $\phi \in \mathbf{Aut}(G)$, εάν υπάρχει $v \in V(G)$ τέτοια ώστε $\phi(v) = v$ τότε $\phi = \mathbf{id}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο k . Για $k = 0$, ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος. Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $k = n \geq 0$. Έστω ότι $k = n + 1$. Συμβολίζουμε με $e = \{v_1, v_2\} \in E(G)$ την μεσαία ακμή και με G_1, G_2 τις συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus e$, όπου $v_i \in V(G_i), i \in [2]$. Αφού $\phi \in \mathbf{Aut}(G)$, από το Λήμμα 4.9, έπεται ότι $\phi(v_i) = v_i, i \in [2]$. Ως εκ τούτου η ϕ είναι ένας ισομορφισμός από το $G \setminus e$ στο $G \setminus e$. Από την Παρατήρηση 4.10, $\phi_i = \{(v, u) \in \phi \mid v \in V(G_i)\} \in \mathbf{Aut}(G_i), i \in [2]$. Ας παρατηρήσουμε ότι $\phi_i(v_i) = \phi(v_i) = v_i, i \in [2]$. Αφού $G_i \in \mathcal{T}_n, i \in [2]$, από την επαγωγική υπόθεση, η $\phi_i, i \in [2]$, είναι ο τετριμμένος αυτομορφισμός του G_i . Άρα, $\phi = \mathbf{id}$. $\square$

Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα και $v \in V(G)$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{tr}_G(v)$ την τροχιά (orbit) της ομάδας αυτομορφισμών του G που περιέχει την v , δηλαδή,

$$\mathbf{tr}_G(v) = \{u \in V(G) \mid \exists \phi \in \mathbf{Aut}(G) \text{ έτσι ώστε } \phi(u) = v\}.$$

Λήμμα 4.11. Έστω ότι G_1, G_2 είναι ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k$, $v_2, v'_2 \in V(G_2)$ τέτοιες ώστε $v_2 \in \mathbf{tr}_{G_2}(v'_2)$ και $v_1 \in V(G_1)$. Τότε τα $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ και $G' = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v'_2)$ είναι ισομορφικά.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{id} \in \mathbf{Aut}(G_1)$ και $\phi \in \mathbf{Aut}(G_2)$, τέτοια ώστε $\phi(v_2) = v'_2$. Τότε η $\mathbf{id} \cup \phi$ είναι ένας ισομορφισμός από το G στο G' . $\square$

Λήμμα 4.12. Έστω ότι G_1, G_2 είναι ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k$, $v_2, v'_2 \in V(G_2)$ τέτοιες ώστε $v_2 \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v'_2)$ και $v_1 \in V(G_1)$. Τότε τα $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ και $G' = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v'_2)$ δεν είναι ισομορφικά.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η ϕ είναι ένας ισομορφισμός από το G στο G' . Η Παρατήρηση 4.12 έπεται ότι, είτε $\phi(v_1) = v_1$ και $\phi(v_2) = v'_2$ είτε $\phi(v_1) = v'_2$ και $\phi(v_2) = v_1$. Πρώτα αποκλείουμε την περίπτωση όπου $\phi(v_1) = v_1$ και $\phi(v_2) = v'_2$. Πράγματι, από την Παρατήρηση 4.10, $\phi' = \{(x, y) \in \phi \mid x \in V(G_2)\} \in \mathbf{Aut}(G_2)$ και επιπλέον $\phi'(v_2) = \phi(v_2) = v'_2$, αντίφαση καθώς $v_2 \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v'_2)$. Συνεπώς, $\phi(v_1) = v'_2$ και $\phi(v_2) = v_1$. Από την Παρατήρηση 4.10, η $\phi_i = \{(x, y) \in \phi \mid x \in V(G_i)\}$ είναι ένας ισομορφισμός από το G_i στο G_{3-i} , $i \in [2]$. Τότε $\psi = \phi_1 \circ \phi_2 \in \mathbf{Aut}(G_2)$ και $\psi(v_2) = \phi_1(\phi_2(v_2)) = \phi_1(\phi(v_2)) = \phi_1(v_1) = v'_2$. Έπεται ότι $v_2 \in \mathbf{tr}_{G_2}(v'_2)$, αντίφαση. $\square$

Δοσμένου ενός γραφήματος G , λέμε ότι το G είναι *ασύμμετρο* (asymmetric) εάν έχει την τετριμμένη ομάδα αυτομορφισμών. Επιπλέον, λέμε ότι ένα γράφημα G είναι *2-ασύμμετρο* (2-asymmetric) εάν ο μόνος μη-τετριμμένος αυτομορφισμός του είναι μια ανέλιξη χωρίς σταθερά σημεία.

Λήμμα 4.13. Έστω ότι ο k είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος και έστω ότι τα G_1, G_2 είναι δύο ξένα μη-ισομορφικά γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k$. Τότε το γράφημα $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ είναι ασύμμετρο.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\phi \in \mathbf{Aut}(G)$ και $\phi \neq \mathbf{id}$. Από το Λήμμα 4.10, $\phi(v) \neq v$ για όλες τις $v \in V(G)$ και, από την Παρατήρηση 4.12, $\phi(v_i) = v_{3-i}$, $i \in [2]$. Από την Παρατήρηση 4.11, το G_1 είναι ισομορφικό με το G_2 , αντίφαση. $\square$

Λήμμα 4.14. Έστω ότι ο k είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος και έστω ότι τα G_1, G_2 είναι δύο ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k$. Εάν η ϕ είναι ένας ισομορφισμός από το G_1 στο G_2 και οι $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$, είναι τέτοιες ώστε $\phi(v_1) \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v_2)$, τότε το $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ είναι ασύμμετρο.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\psi \in \mathbf{Aut}(G)$ και $\psi \neq \mathbf{id}$. Από το Λήμμα 4.10, $\psi(v) \neq v$ για όλες τις $v \in V(G)$ και, από την Παρατήρηση 4.12, $\psi(v_1) = v_2$ και $\psi(v_2) = v_1$. Από την Παρατήρηση 4.11, η $\chi = \{(x, y) \in \psi \mid x \in V(G_1)\}$ είναι ένας ισομορφισμός από το G_1 στο G_2 . Επιπλέον, η $\phi \circ \chi^{-1}$ είναι ένας αυτομορφισμός του G_2 που απεικονίζει την v_2 στην $\phi(v_1)$, αντιφάσκοντας στην υπόθεση ότι $\phi(v_1) \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v_2)$. $\square$

Λήμμα 4.15. Έστω ότι ο k είναι ένας μη-αρνητικός ακέραιος και έστω ότι τα G_1, G_2 είναι δύο ξένα γραφήματα τέτοια ώστε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_k$. Εάν η $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ είναι ένας ισομορφισμός από το G_1 στο G_2 και $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$, είναι δύο κορυφές τέτοιες ώστε $\phi(v_1) \in \mathbf{tr}_{G_2}(v_2)$, τότε το $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$ είναι 2-ασύμμετρο.

Απόδειξη. Καθώς $\phi(v_1) \in \mathbf{tr}_{G_2}(v_2)$, υπάρχει ένας ισομορφισμός $\psi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ τέτοιος ώστε $\psi(v_1) = v_2$. Παρατηρούμε ότι η $\chi = \psi \cup \psi^{-1}$ είναι ένας αυτομορφισμός του G , και ότι η χ είναι μία ανέλιξη χωρίς σταθερά σημεία. Ας θεωρήσουμε έναν αυτομορφισμό $\chi' \neq \mathbf{id}$ του G . Από το

Λήμμα 4.10 και την Παρατήρηση 4.12, $\chi'(v_1) = v_2$ και, από την Παρατήρηση 4.11, η $\chi'_1 = \{(x, y) \in \chi' | x \in V(G_1)\}$ είναι ένας ισομορφισμός των G_1 και G_2 . Τότε, η $\chi'_1 \circ \psi^{-1}$ είναι ένας αυτομορφισμός του G_2 που σταθεροποιεί τη v_2 , και, από το Λήμμα 4.10, $\chi'_1 = \psi$. Συμπεραίνουμε ότι $\chi' = \chi$, και άρα $\mathbf{Aut}(G) = \{\mathbf{id}, \chi\}$ και το G είναι 2-ασύμμετρο. $\square$

Από το Θεώρημα 4.3 και τα Λήμματα 4.13, 4.14, και 4.15 έπεται ευθέως ότι.

Παρατήρηση 4.13. *Εάν το G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε $G \in \mathcal{T}_k$ τότε το G είναι είτε ασύμμετρο είτε 2-ασύμμετρο.*

Για κάθε ακέραιο $k \geq 0$, ορίζουμε την ακόλουθη διαμέριση του $\mathcal{T}_k$:

$$\mathcal{A}_k = \{G \in \mathcal{T}_k \mid \mathbf{Aut}(G) = \{\mathbf{id}\}\} \text{ και } \mathcal{B}_k = \{G \in \mathcal{T}_k \mid \mathbf{Aut}(G) \neq \{\mathbf{id}\}\}.$$

Συμβολίζουμε με $\alpha_k = |\mathcal{A}_k|$, $\beta_k = |\mathcal{B}_k|$, και $\tau_k = |\mathcal{T}_k| = \alpha_k + \beta_k$. Θέτουμε επίσης $\gamma_k = 2^{k-2}$. Μία άμεση συνέπεια των Παρατηρήσεων 4.9 και 4.13 είναι η ακόλουθη.

Παρατήρηση 4.14. *Εστω ότι ο $k \geq 2$ είναι ένας ακέραιος. Τότε η ομάδα αυτομορφισμών κάθε γραφήματος $G \in \mathcal{A}_k$ (αντίστοιχα, $G \in \mathcal{B}_k$) έχει ακριβώς γ_{k+2} (αντίστοιχα, γ_{k+1}) τροχιές.*

Παρατήρηση 4.15. $\beta_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ και $\alpha_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.

Θεώρημα 4.4. *Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, $\tau_k = 2^{2^k - (2k+1)} + 2^{2^{k-1} - (k+1)}$.*

Απόδειξη. Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι για $k \in [2]$ ο ισχυρισμός ισχύει. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα. Ας θυμηθούμε ότι $G \in \mathcal{T}_k$ εάν και μόνο εάν $G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2)$, για κάποια $G_i \in \mathcal{T}_{k-1}$, και $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το τ_k είναι αρκετό να υπολογίσουμε τους τρόπους να επιλέξουμε $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_{k-1}$ και $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$, χωρίς να

καταλήζουμε σε ισομορφικά γραφήματα. Έστω ότι τα G_1, G_2 είναι γραφήματα τέτοια ώστε $G_i \in \mathcal{T}_{k-1}$ και $v_i \in V(G_i)$, $i \in [2]$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^1 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \not\simeq G_2, G_i \in \mathcal{A}_{k-1} \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2] \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^2 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \not\simeq G_2, G_i \in \mathcal{B}_{k-1} \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2] \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^3 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \not\simeq G_2, G_1 \in \mathcal{A}_{k-1}, G_2 \in \mathcal{B}_{k-1}, \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2] \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^4 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \simeq_\phi G_2, G_i \in \mathcal{A}_{k-1}, \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2], \text{ τέτοιες ώστε } \phi(v_1) \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v_2) \} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^5 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \simeq_\phi G_2, G_i \in \mathcal{B}_{k-1}, \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2], \text{ τέτοιες ώστε } \phi(v_1) \notin \mathbf{tr}_{G_2}(v_2) \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^1 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \simeq_\phi G_2, G_i \in \mathcal{A}_{k-1}, \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2], \text{ τέτοιες ώστε } \phi(v_1) \in \mathbf{tr}_{G_2}(v_2) \} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_k^2 = \{ & G \mid G = \mathbf{j}(G_1, G_2, v_1, v_2), G_1 \simeq_\phi G_2, G_i \in \mathcal{B}_{k-1}, \\ & \text{και } v_i \in V(G_i), i \in [2], \text{ τέτοιες ώστε } \phi(v_1) \in \mathbf{tr}_{G_2}(v_2) \}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Από τους ορισμούς τους, τα παραπάνω σύνολα είναι μία διαμέριση του $\mathcal{T}_k$. Από το Λήμμα 4.13 (για τις Σχέσεις (4.1)–(4.3)) και από το Λήμμα 4.14 (για τις Σχέσεις (4.4) και (4.5)), η ένωση των πέντε πρώτων είναι υποσύνολο του $\mathcal{A}_k$. Επιπλέον, από το Λήμμα 4.15 (εφαρμοσμένο στις Σχέσεις (4.6) και (4.7)) η ένωση των τελευταίων δύο είναι υποσύνολο του $\mathcal{B}_k$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A}_k = \bigcup_{i=1, \dots, 5} \mathcal{A}_k^i$ και $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_k^1 \cup \mathcal{B}_k^2$.

Από την Παρατήρηση 4.14, τα Λήμματα 4.11 και 4.12, και τις Σχέσεις (4.1)–

(4.7), συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}_k^1| &= \binom{\alpha_{k-1}}{2} \cdot \gamma_{k+1}^2, \\
 |\mathcal{A}_k^2| &= \binom{\beta_{k-1}}{2} \cdot \gamma_k^2, \\
 |\mathcal{A}_k^3| &= \alpha_{k-1} \cdot \gamma_{k+1} \cdot \beta_{k-1} \cdot \gamma_k, \\
 |\mathcal{A}_k^4| &= \alpha_{k-1} \cdot \binom{\gamma_{k+1}}{2} \\
 |\mathcal{A}_k^5| &= \beta_{k-1} \cdot \binom{\gamma_k}{2} \\
 |\mathcal{B}_k^1| &= \alpha_{k-1} \cdot \gamma_{k+1} \\
 |\mathcal{B}_k^2| &= \beta_{k-1} \cdot \gamma_k
 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \binom{\alpha_{k-1}}{2} \gamma_{k+1}^2 + \binom{\beta_{k-1}}{2} \gamma_k^2 + \alpha_{k-1} \binom{\gamma_{k+1}}{2} + \\
 &\quad \beta_{k-1} \binom{\gamma_k}{2} + \alpha_{k-1} \beta_{k-1} \gamma_k \gamma_{k+1}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\beta_k = \alpha_{k-1} \gamma_{k+1} + \beta_{k-1} \gamma_k \tag{4.9}$$

Απλοποιώντας την (4.8),

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{1}{2} [(\gamma_{k+1}^2 \alpha_{k-1}^2 + \gamma_k^2 \beta_{k-1}^2 + 2\alpha_{k-1} \beta_{k-1} \gamma_k \gamma_{k+1}) - \\
 &\quad (\alpha_{k-1} \gamma_{k+1} + \beta_{k-1} \gamma_k)] \\
 &= \frac{1}{2} (\beta_k^2 - \beta_k).
 \end{aligned}$$

Έπεται (χρησιμοποιώντας την Σχέση (4.9)) ότι,

$$\tau_k = \frac{1}{2} (\beta_k^2 + \beta_k) \text{ και } \beta_k = \gamma_k \beta_{k-1}^2$$

Θέτουμε $\delta_k = 2^{k-1} - k$ και παρατηρούμε ότι $\beta_k = 2^{\delta_k} = 2^{2^{k-1}-k}$, για κάθε ακέραιο $k \geq 2$. Τότε, $\tau_k = 2^{2^k-(2k+1)} + 2^{2^{k-1}-(k+1)}$, $k \geq 3$, και το θεώρημα έπεται. $\square$

4.6 Παρεμποδίσσεις για την $\mathcal{G}_k$, $k \leq 3$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

- $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_0) = \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_0) = \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_0) = \{K_1\}$,
- $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_1) = \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_1) = \mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_1) = \{K_2\}$,
- $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_2) = \mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_1) = \{K_3, P_4\}$ και $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_2) = \{K_3, P_4, C_4\}$.

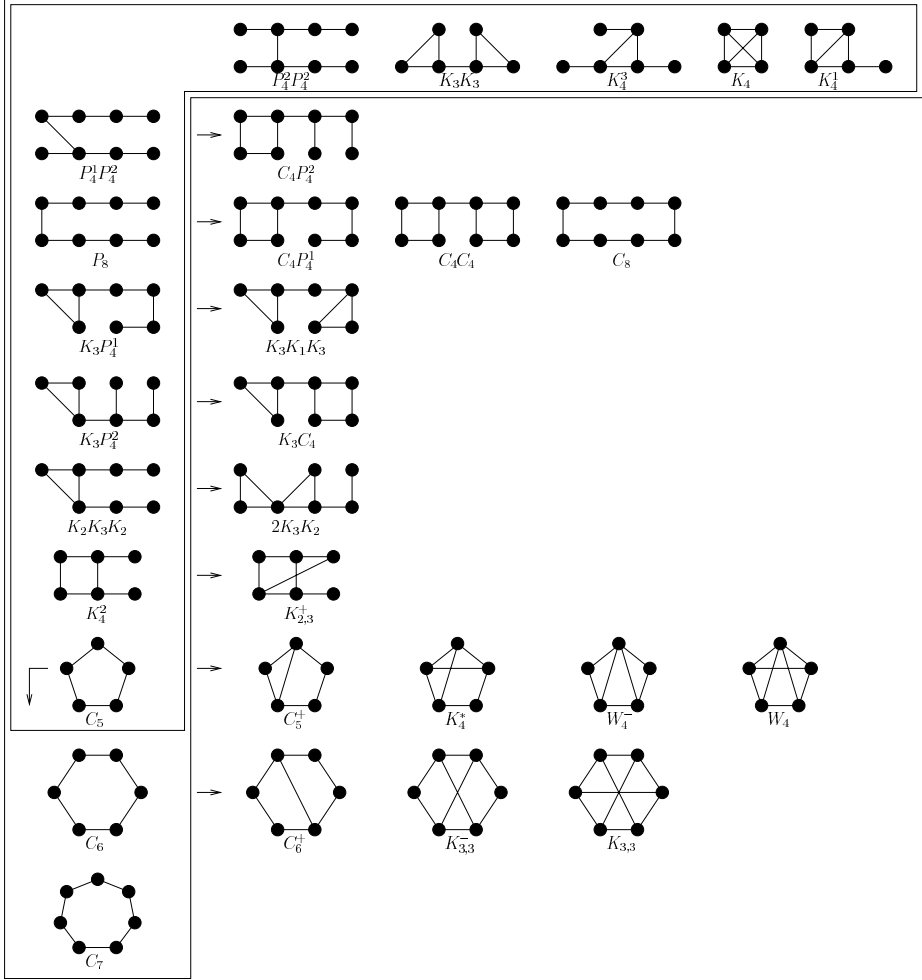
Έστω ότι $\mathcal{D}$ είναι το σύνολο των γραφημάτων που εμφανίζονται εντός του εξωτερικού πολυγώνου στο Σχήμα 4.2. Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι $\mathbf{obs}_{\subseteq}(\mathcal{G}_3) = \mathcal{D}$.

Θεώρημα 4.5. *Για οποιοδήποτε γράφημα G , $\mathbf{td}(G) > 3$ εάν και μόνο εάν το G περιέχει ένα από τα γραφήματα του $\mathcal{D}$ σαν υπογράφημα.*

Απόδειξη. Αφού καθένα από τα γραφήματα στο $\mathcal{D}$ είναι συνεκτικό και έχει βάθος δέντρου τέσσερα, επαρκεί να δείξουμε ότι οποιοδήποτε συνεκτικό γράφημα με βάθος δέντρου τέσσερα περιέχει ένα από αυτά σαν υπογράφημα. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι δεν ισχύει αυτή η περίπτωση, και έστω ότι G είναι ένα συνεκτικό γράφημα με βάθος δέντρου τέσσερα που δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα στο $\mathcal{D}$ σαν υπογράφημα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το G είναι ελαχιστικό, δηλαδή, ότι $\mathbf{td}(G \setminus e) = 3$ και $\mathbf{td}(G \setminus v) = 3$ για οποιαδήποτε ακμή $e \in E(G)$ και οποιαδήποτε κορυφή $v \in V(G)$. Το γράφημα G δεν μπορεί να περιέχει κύκλους μήκους μεγαλύτερου από τέσσερα, διαφορετικά, θα περιείχε το C_5, C_6, C_7 , ή P_8 σαν υπογράφημα.

Έστω ότι το G' είναι ένα 2-συνεκτικό υπογράφημα του G , και ας υποθέσουμε ότι $|V(G')| \geq 5$. Παρατηρούμε ότι το G' περιέχει έναν 4-κύκλο $C = v_1v_2v_3v_4$. Ας θεωρήσουμε μία κορυφή $v_5 \in V(G') \setminus V(C)$. Αφού το G' είναι 2-συνεκτικό, υπάρχει ένα μονοπάτι P με ξένα άκρα στον C έτσι ώστε $v_5 \in V(P)$ και $|V(P) \cap V(C)| = 2$. Αφού το G δεν περιέχει κύκλους μήκους τουλάχιστον 5, το P έχει μήκος 2 και συνδέει δύο απέναντι κορυφές του C , έστω τις v_1 και v_3 . Εάν το υπογράφημα που ενάγεται από το $V(C) \cup \{v_5\}$ περιέχει οποιαδήποτε από τις ακμές $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$ ή $\{v_4, v_5\}$, τότε το G περιέχει το C_5 σαν υπογράφημα, άρα μπορούμε να υποθέσουμε πως δεν ισχύει αυτή η περίπτωση. Επίσης, καμμία από τις v_2, v_4 , και v_5 δεν μπορεί να είναι γειτονική με καμμία άλλη κορυφή του G , διαφορετικά το G θα περιείχε το K_4^2 . Ας θεωρήσουμε το γράφημα H που προκύπτει από το G αφαιρώντας την ακμή $\{v_1, v_5\}$. Από την ελαχιστικότητα του G , $\text{td}(H) = 3$. Το γράφημα H είναι συνεκτικό, άρα το H περιέχει μία κορυφή v τέτοια ώστε το $H \setminus v$ να είναι δάσος αστεριών. Εάν $v = v_1$ ή $v = v_3$, τότε το $G \setminus v$ είναι δάσος αστεριών, το οποίο είναι αντίφαση με το $\text{td}(G) = 4$. Ωστόσο, το $H \setminus v$ για οποιαδήποτε άλλη κορυφή v περιέχει το P_4 σαν υπογράφημα. Αυτό είναι αντίφαση, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι οποιοδήποτε 2-συνεκτικό υπογράφημα του G έχει το πολύ τέσσερις κορυφές.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου το G περιέχει έναν 4-κύκλο $C = v_1v_2v_3v_4$. Εάν αμφότερες οι ακμές $\{v_1, v_3\}$ και $\{v_2, v_4\}$ βρίσκονται στο G , τότε το G περιέχει το K_4 σαν υπογράφημα. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν είναι αυτή η περίπτωση. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\{v_1, v_3\}$ είναι ακμή (άρα η $\{v_2, v_4\}$ δεν είναι ακμή). Εάν η v_2 ή η v_4 είναι γειτονική με μία κορυφή έξω από το C , τότε το G περιέχει το K_4^1 σαν υπογράφημα. Διαφορετικά, θεωρούμε το γράφημα H που προκύπτει από το G αφαιρώντας την ακμή $\{v_1, v_3\}$. Από την ελαχιστικότητα του G , υπάρχει μία κορυφή v τέτοια ώστε το $H \setminus v$ να είναι δάσος αστεριών. Η κορυφή v πρέπει να ανήκει στο C .



Σχήμα 4.2: Τα απαγορευμένα γραφήματα για την $\mathcal{G}_3$.

Αφού το $G \setminus v$ δεν είναι δάσος αστεριών, $v \neq v_1$ και $v \neq v_3$, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v = v_2$. Καθώς το $H \setminus v_2$ είναι ένα δάσος αστεριών, η v_4 είναι ο μόνος γείτονας των v_1 και v_3 στο $H \setminus v_2$. Αλλά τότε $H = C$, και το βάθος δέντρου του G θα ήταν μόνο τρία, το οποίο είναι αντίφαση. Άρα,

οποιοσδήποτε 4-κύκλος στο G είναι εναγόμενος.

Έστω ότι ο $C = v_1v_2v_3v_4$ είναι ένας εναγόμενος 4-κύκλος στο G . Αφού το G δεν περιέχει το K_4^2 σαν υπογράφημα, οι κορυφές του $V(G) \setminus V(C)$ μπορούν να είναι γειτονικές μόνο με δύο μη-γειτονικές κορυφές του C , έστω v_1 και v_3 . Καθώς $\text{td}(G) = 4$, έχουμε ότι $G \neq C$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία κορυφή $v_5 \in V(G) \setminus V(C)$ γειτονική της v_1 . Ας θεωρήσουμε το γράφημα H που προκύπτει από το G αφαιρώντας την ακμή $\{v_1, v_4\}$. Από την ελαχιστικότητα του G , υπάρχει μία κορυφή v τέτοια ώστε το $H \setminus v$ να είναι δάσος αστεριών. Αφού το $v_5v_1v_2v_3v_4$ είναι ένα μονοπάτι, η v πρέπει να είναι η v_1 , η v_2 , ή η v_3 . Εάν $v = v_1$ ή $v = v_3$, τότε το $G \setminus v$ είναι ένα δάσος αστεριών, άρα $v = v_2$. Ωστόσο, αυτό σημαίνει ότι το $G \setminus v_1$ είναι ένα δάσος αστεριών, το οποίο είναι άτοπο, άρα το G δεν περιέχει κανέναν 4-κύκλο.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου το G περιέχει ένα τρίγωνο $C = v_1v_2v_3$. Το γράφημα G δεν μπορεί να περιέχει άλλο τρίγωνο ξένο του C , αφού τότε θα περιείχε το $K_3P_4^1$ ή το K_3K_3 σαν υπογράφημα. Μαζί με το γεγονός ότι κάθε μη-τετριμμένο 2-συνεκτικό υπογράφημα του G είναι τρίγωνο, αυτό έπεται ότι όλα τα τρίγωνα στο G τέμνονται σε μία κορυφή. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή v_4 που να μην ανήκει στο C και να είναι γειτονική με την v_1 , και ότι όλα τα τρίγωνα στο G περιέχουν την κορυφή v_1 .

Η κορυφή v_1 είναι διαχωριστής του G . Το γράφημα $G \setminus v_1$ δεν είναι δάσος αστεριών, άρα μία από τις συνιστώσες του περιέχει ένα τρίγωνο ή το P_4 . Όλα τα τρίγωνα στο G περιέχουν την κορυφή v_1 , μία από τις συνιστώσες του $G \setminus v_1$ περιέχει ένα μονοπάτι P μήκους τρία.

Εάν το P είναι ξένο με τον C , τότε το G περιέχει σαν υπογράφημα το $K_3P_4^1$ ή το $K_3P_4^2$. Συνεπάγεται ότι το C είναι το μόνο τρίγωνο στο G και ότι το μονοπάτι P τέμνει το $C \setminus v_1$. Εάν ο βαθμός αμφοτέρων των v_2 και v_3 είναι μεγαλύτερος από δύο, τότε το G περιέχει το υπογράφημα

K_4^3 , άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο βαθμός της v_2 είναι δύο και ότι $P = v_2v_3v_5v_6$ για κάποιες κορυφές v_5 και v_6 . Όμοια, το $G \setminus v_3$ περιέχει το P_4 σαν υπογράφημα, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία κορυφή v_7 γειτονική της v_4 . Ωστόσο, το γράφημα G θα περιείχε τότε το $K_2K_3K_2$ σαν υπογράφημα. Συνεπώς, το G δεν περιέχει τρίγωνο, και πρέπει να είναι δέντρο.

Είναι, ωστόσο, εύκολο να επιβεβαιώσουμε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3, ότι τα μόνο ελαχιστικά δέντρα με βάθος δέντρου τέσσερα είναι τα P_8 , $P_4^1P_4^2$ και $P_4^2P_4^2$. Συνεπάγεται ότι οποιοδήποτε γράφημα G με $\mathbf{td}(G) > 3$ περιέχει ένα από τα γραφήματα στην $\mathcal{D}$ σαν υπογράφημα. $\square$

Πόρισμα 4.3. Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{G}_3)$ περιέχει ακριβώς όλα τα γραφήματα που απεικονίζονται στο εσωτερικό πολύγωνο του Σχήματος 4.2.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Παρατήρηση 4.2 και τα δεδομένα ότι $C_{5 \leq m}C_6$ και $C_{5 \leq m}C_7$. $\square$

Πόρισμα 4.4. Το σύνολο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_3)$ περιέχει ακριβώς όλα τα γραφήματα του Σχήματος 4.2.

Απόδειξη. Έπεται από επιθεώρηση, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.3. $\square$

Ας παρατηρήσουμε ότι οι παρεμποδίσεις του $\mathcal{G}_k$ έχουν το πολύ 2^k κορυφές, $k \in [3]$. Ως εκ τούτου, το φράγμα του Θεωρήματος 4.2 δεν είναι σφικτό ακόμα και σε αυτή την περίπτωση (ισχυρίζεται μόνο ότι οι παρεμποδίσεις έχουν το πολύ 16 κορυφές). Κλείνουμε αυτή την ενότητα με την ακόλουθη εικασία.

Εικασία 2. Για κάθε $k \geq 1$, η τάξη των γραφημάτων στο $\mathbf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{G}_k)$ είναι φραγμένη από 2^k .

4.7 Μία Αναγωγή για το Βάθος Δέντρου

Σε αυτή την ενότητα, στα πλαίσια της προσπάθειας εντοπισμού ελαχιστικών γραφημάτων που δεν ανήκουν στην κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}_k$, αποδεικνύουμε έναν κανόνα ο οποίος μας διευκολύνει στον εντοπισμό αυτών των γραφημάτων ως προς σχέσεις που επιτρέπουν την αφαίρεση κορυφών.

Για την ακρίβεια, υποδεικνύουμε μία διαδικασία η οποία μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε ένα σύνολο κορυφών από ένα γράφημα G , διατηρώντας το βάθος δέντρου του.

Δοσμένου ενός γραφήματος G , λέμε ότι το σύνολο $S \subseteq V(G)$ είναι ένα σύνολο αδερφών κορυφών (*siblings*) εάν για κάθε $x, y \in S$, $N_G(x) = N_G(y)$. Θεωρούμε την επόμενη.

Παρατήρηση 4.16. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα και ρ είναι μία k -διαβάθμιση κορυφών του G . Έστω επίσης $v_1, v_2 \in V(G)$ τέτοιες ώστε $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ και $\rho(v_1) < \rho(v_2)$. Τότε, $\rho(v_2) \notin \rho(N_{G \setminus \{v_2\}}(v_1))$.

Αποδεικνύουμε τώρα το ακόλουθο γενικό λήμμα-αναγωγή.

Λήμμα 4.16. Έστω k ένας θετικός ακέραιος, G ένα γράφημα και $S \subseteq V(G)$ ένας σύνολο αδερφών του G βαθμού k . Έστω επίσης το $G' = G \setminus S'$ όπου το S' είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του S τέτοιο ώστε $|S'| \leq |S| - k$. Τότε, $\text{td}(G) = \text{td}(G')$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $|S| \geq k + 1$. Θέτουμε $S'' = S \setminus S' = \{u_i \mid i \in |S''|\}$. Καθώς το G' είναι υπογράφημα του G , είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\text{td}(G) \leq \text{td}(G')$. Έστω ότι η $\rho' : V(G') \rightarrow \{1, \dots, t\}$ είναι μία διαβάθμιση κορυφών του G' . Έστω ότι το $N = \{v_i \mid i \in [k]\}$ είναι η κοινή γειτονιά των κορυφών στο S'' και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\rho'(v_i) \leq \rho'(v_{i+1}), i \in [k - 1]$. Πα-

ρατηρούμε ότι $|S''| \geq k$ και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\rho'(u_i) \leq \rho'(u_{i+1}), i \in [|S''| - 1]$. Χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός 4. Έστω ότι P είναι ένα (z', z) -μονοπάτι στο G όπου $z \in S''$, $z' \in (G \setminus S'') \setminus N$, και $\rho'(z) = \rho'(z')$. Έστω ότι P' είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z' και την πρώτη κορυφή, έστω x , στο N (ας θυμηθούμε ότι το N είναι διαχωριστής του G). Τότε, υπάρχει μία κορυφή $y \in V(P') \setminus \{z'\}$ τέτοια ώστε $\rho'(y) > \rho'(z')$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 4. Είναι αρκετό να παρατηρήσουμε ότι το μονοπάτι $P'' = (V(P') \cup \{z\}, E(P') \cup \{\{x, z\}\})$ θα έπρεπε να περιέχει μία εσωτερική κορυφή y με $\rho'(y) > \rho'(z')$. $\square$

Σε ότι ακολουθεί κατασκευάζουμε μία διαβάθμιση κορυφών $\rho : V(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$. Έστω

$$m = \begin{cases} \max\{i \mid \rho'(u_1) > \rho'(v_i)\} + 1 & \text{εάν } A = \{i \mid \rho'(u_1) > \rho'(v_i)\} \neq \emptyset \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και ας παρατηρήσουμε ότι $m \leq k + 1$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$\rho = \{(x, \rho'(x)) \mid x \in V(G') \setminus (S'' \cup \bigcup_{i \in [m-1]} \{v_i\})\} \cup \sigma$$

όπου

$$\sigma = \begin{cases} \{(v_i, \rho'(u_{i+1})) \mid i \in [m-1]\} \cup \{(x, \rho'(u_1)) \mid x \in S\} & m \neq k+1 \\ \{(v_i, \rho'(u_i)) \mid i \in [m-1]\} \cup \{(x, \rho'(v_1)) \mid x \in S\} & m = k+1 \end{cases}$$

είναι t -διαβάθμιση κορυφών του G .

Πρώτα, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $m = 1$. Τότε, παρατηρούμε ότι η

$$\rho'' = \{(x, \rho'(x)) \mid x \in V(G') \setminus S''\} \cup \{(x, \rho'(u_1)) \mid x \in S''\}$$

είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G' . Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η $\rho'' \cup \{(x, \rho'(u_1)) \mid x \in S'\}$ είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G η οποία είναι ίση με τη ρ .

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $1 < m \leq k + 1$. Αφού $A \neq \emptyset$, η Παρατήρηση 4.16 συνεπάγεται ότι

$$\rho'(u_i) < \rho'(u_{i+1}), \quad i \in [|S''| - 1] \quad (4.10)$$

$$\rho'(v_i) < \rho'(v_{i+1}), \quad m \leq i \leq k - 1 \quad (4.11)$$

$$\rho'(N_{G' \setminus S''}(\bigcup_{i \in [m-1]} \{v_i\})) \cap \rho'(S'') = \emptyset \quad (4.12)$$

άρα, από την (4.10), $|\rho'(S'')| = |S''| \geq k$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $1 < m < k + 1$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$\begin{aligned} \rho'' = & \{(x, \rho'(x)) \mid x \in V(G') \setminus (S'' \cup \bigcup_{i \in [m-1]} \{v_i\})\} \cup \\ & \{(v_i, \rho'(u_{i+1})) \mid i \in [m-1]\} \cup \{(x, \rho'(u_1)) \mid x \in S''\} \end{aligned}$$

είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G' . Πράγματι, η ρ'' είναι ένα έγκυρος χρωματισμός του G' εξαιτίας των (4.10), (4.11), και (4.12). Για να αποδείξουμε ότι η ρ'' είναι t -διαβάθμιση κορυφών, θεωρούμε ένα (z', z) -μονοπάτι P ανάμεσα σε δύο κορυφές $z, z' \in V(G')$, όπου $\rho''(z) = \rho''(z')$. Παρατηρούμε τον ακόλουθο.

Ισχυρισμός 5. $|\rho''(N)| = k$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 5. Έπεται άμεσα από τις (4.10) και (4.11). $\square$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

Υποπερίπτωση 1.1. Εάν ένα, έστω z , από τα άκρα του P ανήκει στο S'' , τότε το P περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή v_i , $i \in N$. Εάν $i \in A$, τότε

$\rho''(v_i) \geq \rho'(u_2) > \rho'(u_1) = \rho''(z)$. Εάν $i \in [k] \setminus A$, τότε $\rho''(v_i) = \rho'(v_i) > \rho'(u_1) = \rho''(z)$.

Υποπερίπτωση 1.2. Εάν ένα, έστω z , από τα άκρα του P ανήκει στο $N' = \{v_i \mid i \in A\}$, τότε υποθέτουμε ότι $z = v_i$ και, από τον Ισχυρισμό 5, $z' \in (V(G') \setminus S'') \setminus N$. Έστω ότι P' είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z' και την πρώτη κορυφή x στο N . Τότε, από τον Ισχυρισμό 4, υπάρχει μία κορυφή $y \in V(P') \setminus \{z'\}$ όπου $\rho'(y) > \rho'(z')$. Ας παρατηρήσουμε ότι $\rho'(z') = \rho''(z')$ και $\rho''(y) \geq \rho'(y)$. Άρα, $\rho''(y) > \rho''(z')$ και έχουμε τελειώσει αφού $y \in V(P') \subseteq V(P)$.

Υποπερίπτωση 1.3. Εάν ένα, έστω z , από τα άκρα του P ανήκει στο $N \setminus N'$ τότε, ξανά από τον Ισχυρισμό 5, $z' \in (V(G') \setminus S'') \setminus N$. Έστω ότι το P' είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z' και την πρώτη κορυφή x του N . Εάν $w = z$, τότε $P' = P$ και έχουμε τελειώσει. Εάν $x \neq z$, ορίζουμε $P'' = (V(P') \cup \{u_1, z\}, E(P) \cup \{\{x, u_1\}, \{u_1, z\}\})$ και παρατηρούμε ότι $\rho'(z) = \rho''(z')$ και $\rho'(z') = \rho''(z')$. Συνεπώς, το P'' περιέχει κάποια εσωτερική κορυφή y με $\rho'(y) > \rho'(z) = \rho''(z)$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι $\rho'(u_1) < \rho'(z)$, άρα $y \in V(P')$. Ισχύει επίσης ότι $\rho''(y) \geq \rho'(y)$, άρα $\rho''(y) > \rho''(z)$ και έχουμε τελειώσει καθώς $y \in V(P') \subseteq V(P)$.

Υποπερίπτωση 1.4. Εάν και οι δύο z, z' ανήκουν στο $(V(G') \setminus S'') \setminus N$, τότε εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $V(P) \cap S'' \neq \emptyset$ (θυμόμαστε ότι ο νέος χρωματισμός, αυξάνει μόνο τα χρώματα των κορυφών που δεν ανήκουν στο S''). Έστω ότι P' (αντίστοιχα P'') είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z (αντίστοιχα z') και την πρώτη κορυφή x (αντίστοιχα x') στο N . Ορίζουμε το μονοπάτι $P''' = P' \cup P'' \cup (\{u_1, x, x'\}, \{\{x, u_1\}, \{x', u_1\}\})$. Ξανά $\rho'(z) = \rho''(z')$ και $\rho'(z') = \rho''(z')$ και έστω ότι y είναι μία κορυφή του P''' με

$\rho'(y) > \rho'(z) = \rho''(z)$. Εάν $y \in V(P') \cup V(P'')$ τότε έχουμε τελειώσει αφού $\rho''(y) \geq \rho'(y)$ και $V(P') \cup V(P'') \subseteq V(P)$. Εάν $y = u_1$, τότε επίσης έχουμε τελειώσει αφού $S'' \cap V(P) \neq \emptyset$ και το χρώμα που δίνεται από την ρ'' σε κάθε κορυφή στο $S'' \cap V(P) \neq \emptyset$ είναι ίσο με $\rho'(u_1)$.

Μόλις αποδείξαμε ότι η ρ'' είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G' . Παραμένει τώρα να παρατηρήσουμε ότι η $\rho'' \cup \{(x, \rho'(u_1)) \mid x \in S'\}$ είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G που είναι ίση της ρ .

Περίπτωση 2. $m = k + 1$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$\begin{aligned} \rho'' = & \{(x, \rho'(x)) \mid x \in V(G') \setminus (\bigcup_{i \in [m-1]} \{v_i\} \cup S'')\} \cup \\ & \{(v_i, \rho'(u_i)) \mid i \in [m-1]\} \cup \{(x, \rho'(v_1)) \mid x \in S''\} \end{aligned}$$

είναι t -διαβάθμιση κορυφών του G' .

Παρατηρούμε πρώτα ότι ο Ισχυρισμός 5 είναι ξανά αληθής από την (4.10).

Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 2.1. Εάν ένα, έστω z , από τα άκρα του P ανήκει στο S'' , τότε το P περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή v_i , $i \in N$. Τότε $\rho''(v_i) \geq \rho'(u_1) > \rho'(v_1) = \rho''(z)$.

Υποπερίπτωση 2.2. Εάν ένα, έστω z , από τα άκρα του P ανήκει στο N , τότε υποθέτουμε ότι $z = v_i$ και, από τον Ισχυρισμό 5, $z' \in (V(G') \setminus S'') \setminus N$. Έστω ότι P' είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z' και την πρώτη κορυφή x στο N . Τότε, από τον Ισχυρισμό 4, υπάρχει μία κορυφή $y \in V(P') \setminus \{z'\}$ με $\rho'(y) > \rho'(z')$. Παρατηρούμε ότι $\rho'(z') = \rho''(z')$ και $\rho''(y) \geq \rho'(y)$. Συνεπώς, $\rho''(y) > \rho''(z')$ και έχουμε τελειώσει καθώς $y \in V(P') \subseteq V(P)$.

Υποπερίπτωση 2.3. Εάν αμφότερες οι z, z' ανήκουν στο $(V(G') \setminus S'') \setminus N$, τότε εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $V(P) \cap S'' \neq \emptyset$ (ας θυμηθούμε ότι ο νέος χρωματισμός μόνο αυξάνει τα χρώματα εκτός του S''). Έστω ότι P' (αντίστοιχα P'') είναι το τμήμα του P ανάμεσα στην z (αντίστοιχα z') και την πρώτη κορυφή x (αντίστοιχα x') στο N . Ορίζουμε το μονοπάτι $P''' = P' \cup P'' \cup (\{u_1, x, x'\}, \{\{x, u_1\}, \{x', u_1\}\})$. Ξανά $\rho'(z) = \rho''(z')$ και $\rho'(z') = \rho''(z')$ και έστω ότι y είναι μία κορυφή στο P''' με $\rho'(y) > \rho'(z) = \rho''(z)$. Εάν $y \in V(P') \cup V(P'')$, τότε έχουμε τελειώσει αφού $\rho''(y) \geq \rho'(y)$ και $V(P') \cup V(P'') \subseteq V(P)$. Εάν $y = u_1$, τότε έχουμε τελειώσει καθώς $\rho''(x) \geq \rho'(u_1)$ και $x \in V(P') \cup V(P'') \subseteq V(P)$.

Μόλις αποδείξαμε ότι η ρ'' είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G' . Παραμένει να παρατηρήσουμε ότι η $\rho'' \cup \{(x, \rho'(v_1)) \mid x \in S'\}$ είναι μία t -διαβάθμιση κορυφών του G ίση με την ρ . □

Υπολογίζοντας Παρεμποδίσεις Εμβυθίσεων

Η ανάπτυξη της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων αποτελεί ένα ζωτικό κομμάτι της σύγχρονης Συνδυαστικής. Πολλά από τα θεωρήματα και τις τεχνικές που παρουσιάστηκαν στο πλαίσιο της φαίνονται να είναι αποφασιστικής σημασίας τόσο στους Αλγόριθμους και τη Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας όσο και στη Δομική Θεωρία Γραφημάτων. Τέτοια θεωρήματα είναι το Θεώρημα Αποκλειόμενης Σχάρας [197], τα Δομικά Θεωρήματα των [193, 207] και η τεχνική της Μη-σχετικής Κορυφής της [185]. (Για παραδείγματα σε αλγοριθμικές τεχνικές, δείτε τις [50, 109] και το Κεφάλαιο 8).

Ωστόσο, ενώ η διάταξη ως προς ελάσσονα έχει μελετηθεί εκτενώς κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών [4, 29, 185, 193, 197, 207, 210, 211], η διάταξη των εμβυθίσεων μόλις πρόσφατα απέσπασε περισσότερη προσοχή [58, 109, 216]. Ας θυμηθούμε ότι ένα από τα θεμελιώδη αποτελέσματα που εμφανίστηκαν στην τελευταία εργασία της σειράς Ελασσόνων Γραφημάτων

ήταν η απόδειξη της εικασίας του Nash-Williams (δείτε την Ενότητα 3.1), δηλαδή, ότι η κλάση όλων των γραφημάτων είναι καλά μερικώς διατεταγμένη από τη διάταξη των εμβυθίσεων [211].

Όπως έχουμε ήδη δει, ένα άμεσο πόρισμα αυτών των αποτελεσμάτων είναι ότι μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$, η οποία είναι κλειστή ως προς εμβυθίσεις, μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από μία πεπερασμένη οικογένεια $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ ελαχιστικών, σύμφωνα με τη διάταξη των εμβυθίσεων, γραφημάτων που δεν περιέχονται στην $\mathcal{C}$. Επιπροσθέτως, στην [109], αποδείχθηκε ότι υπάρχει ένας $O(|V(G)|^3)$ αλγόριθμος που αποφασίζει εάν ένα γράφημα H είναι εμβύθιση ενός γραφήματος G (όπου οι κρυμμένες σταθερές εξαρτώνται μόνο από το H). Άρα, μία άμεση αλγοριθμική απόρροια της περατότητας της $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ και του αλγόριθμου στην [109], είναι ότι μπορεί να αποφασιστεί σε κυβικό χρόνο εάν ένα γράφημα ανήκει στην $\mathcal{C}$ ή όχι (ελέγχοντας εάν το γράφημα G περιέχει κάποιο από τα γραφήματα της $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ σαν εμβύθιση). Με άλλα λόγια, αυτά τα δύο αποτελέσματα συνεπάγονται πως το ανήκειν σε μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις μπορεί να αποφασιστεί σε κυβικό χρόνο. (Δείτε επίσης την Ενότητα 3.3)

Ας θυμηθούμε εδώ ότι το ίδιο μετά-αλγοριθμικό αποτέλεσμα ισχύει και για την διάταξη των ελασσόνων από τις αποδείξεις στις [193] και [194]. Επιπλέον, εκείνο το αποτέλεσμα, δηλαδή, η ύπαρξη ενός αλγόριθμου κυβικού χρόνου που αποφασίζει το ανήκειν ενός γραφήματος σε μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς ελάσσονα, διεύρυνε την προοπτική προς την κατανόηση των NP-δύσκολων προβλημάτων. Για την ακρίβεια, σύμφωνα με τον M. Langston, σε εκείνο το σημείο έγινε σαφές αυτό που φαινόταν ως «διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας» ανάμεσα σε αυτά τα προβλήματα [22]. Ας παρατηρήσουμε, για παράδειγμα, για το διάσημο πρόβλημα του k -ΚΑΛΥΜΜΑΤΟΣ ΚΟΡΥΦΩΝ, ότι η κλάση των γραφημάτων που επιδέχονται κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ k είναι κλειστή ως προς ελάσσονα. Συνεπώς, για κάθε συγκεκριμε-

νοποιημένο k υπάρχει ένας κυβικού χρόνου αλγόριθμος που αποφασίζει εάν ένα γράφημα έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους k . Ωστόσο, κανένα παρόμοιο αποτέλεσμα δεν αναμένεται για το πρόβλημα του k -ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ, αφού είναι γνωστό ότι αυτό είναι NP-δύσκολο για κάθε συγκεκριμένο $k \geq 3$. Η παρατήρηση αυτού του χάσματος στην χρονική πολυπλοκότητα των NP-δύσκολων προβλημάτων ενθάρρυνε την ανάπτυξη της Θεωρίας Παραμετρικής Πολυπλοκότητας [66, 82, 172] από τους M. Fellows και R. Downey (δείτε επίσης το Κεφάλαιο 8). Η θεωρία αυτή, όπως αποδείχθηκε κατά την διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, είναι πολύ ισχυρή και έχει αναπτυχθεί σημαντικά (για παράδειγμα, δείτε τις [10, 23, 24, 41, 50]).

Παρ' όλα αυτά, ας θυμηθούμε ότι, το προαναφερθέν μετά-αλγοριθμικό αποτέλεσμα για μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ κλειστή ως προς εμβυθίσεις, υποθέτει πως η οικογένεια $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ είναι γνωστή. Επιπλέον, καθώς οι αποδείξεις των [194] και [211] είναι μη-κατασκευαστικές (δείτε την [95]), δεν παρέχεται κάποιος γενικός αλγόριθμος που να μας επιτρέπει τον εντοπισμό των συνόλων παρεμπόδισης για κάθε κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις. Επιπλέον, ακόμα και για συγκεκριμένες κλάσεις γραφημάτων, αυτό το έργο μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολο αφού ένα τέτοιο σύνολο θα μπορούσε να περιέχει πολλά γράφηματα και κανένα άνω φράγμα στην πληθυσμότητά του δεν είναι γνωστό πέρα από την περατότητά του [69] (δείτε επίσης το προηγούμενο κεφάλαιο).

Το θέμα της υπολογισσιμότητας των συνόλων παρεμπόδισης ελασσόνων και εμβυθίσεων τέθηκε από τους M. Fellows και M. Langston [78, 79] και οι δυσκολίες στον υπολογισμό των συνόλων παρεμπόδισης σύντομα έγιναν σαφείς. Για την ακρίβεια, στην [79], οι M. Fellows και M. Langston έδειξαν ότι το πρόβλημα του προσδιορισμού των συνόλων παρεμπόδισης από περιγραφές μηχανών για κλάσεις γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς ελάσσονα είναι αναδρομικά μη-επιλύσιμο (το οποίο ισχύει ευθέως και για την διάταξη

των εμβυθίσεων). Επιπλέον, στην [37], οι B. Courcelle, R. Downey και M. Fellows απέδειξαν ότι το σύνολο παρεμπόδισης μίας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς ελάσσονα δεν μπορεί να υπολογιστεί από μία περιγραφή της στη Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική (ΜΔΛ). Άρα, ένα απορρέον πρόβλημα είναι η αναγνώριση των πληροφοριών που χρειάζονται για μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ κλειστής ως προς εμβυθίσεις έτσι ώστε να γίνει δυνατός ο επαρκής υπολογισμός του συνόλου παρεμπόδισης $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$.

Αρκετές μέθοδοι έχουν προταθεί με σκοπό την αντιμετώπιση της μη κατασκευασιμότητας αυτών των συνόλων (δείτε, για παράδειγμα, τις [29, 78]). Επιπλέον, το πρόβλημα του αλγοριθμικού εντοπισμού συνόλων παρεμπόδισης ελασσόνων έχει μελετηθεί εκτενώς [4, 29, 37, 78, 79, 144]. Στην [29], αποδείχθηκε ότι το σύνολο παρεμπόδισης μίας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς ελάσσονα, έστω $\mathcal{F}$, η οποία είναι η ένωση δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς ελάσσονα, έστω $\mathcal{F}_1$ και $\mathcal{F}_2$, των οποίων τα σύνολα παρεμπόδισης είναι δοσμένα, μπορεί να υπολογιστεί υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα δέντρο το οποίο δεν ανήκει στην $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Τέλος, στην [4], δείχθηκε ότι αυτή η επιπλέον απαίτηση δεν είναι απαραίτητη.

Σε αυτό το κεφάλαιο, εκκινούμε την μελέτη για τον υπολογισμό των συνόλων παρεμπόδισης εμβυθίσεων. Για την ακρίβεια, αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του υπολογισμού του συνόλου $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ για οικογένειες κλάσεων γραφημάτων $\mathcal{C}$ που κατασκευάζονται με πεπερασμένες ενώσεις κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις. Ας παρατηρήσουμε ότι η ένωση και η τομή δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις είναι επίσης κλειστές ως προς εμβυθίσεις. Ως εκ τούτου, τα σύνολα παρεμπόδισής τους έχουν πεπερασμένο μέγεθος. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι, δοσμένων των συνόλων παρεμπόδισης δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις, το σύνολο παρεμπόδισης της τομής τους μπορεί να υπολογισθεί με τετριμμένο τρόπο. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος

ο οποίος, δοσμένων των συνόλων παρεμπόδισης δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις, εξάγει το σύνολο παρεμπόδισης της ένωσης τους.

Η προσέγγισή μας βασίζεται στον υπολογισμό ενός άνω φράγματος στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων μιας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς εμβυθίσεις. Ας παρατηρήσουμε ότι ο συνδυασμός της περιγραφής μιας μηχανής για μια κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς ελάσσονα $\mathcal{F}$ με ένα άνω φράγμα στο μέγεθος των απαγορευμένων γραφημάτων κάνει αυτόν τον υπολογισμό δυνατό, αλλά ούτε μία περιγραφή μιας μηχανής της κλάσης γραφημάτων ούτε το άνω φράγμα από μόνα τους είναι επαρκείς πληροφορίες. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε πριν, δεν είναι γνωστή κάποια γενική διαδικασία για τον υπολογισμό ενός τέτοιου άνω φράγματος. Χτίζουμε πάνω στην τεχνική που εισήχθη από τους I. Adler, M. Grohe, και S. Kreutzer στην [4] για τον υπολογισμό των συνόλων παρεμπόδισης ελασσόνων. Πιο συγκεκριμένα, θα ζητήσουμε μία ΜΔΛ-περιγραφή μίας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς εμβυθίσεις, αντί για την περιγραφή μιας μηχανής, και ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος, αντί για άνω φράγμα στο μέγεθος, των παρεμποδίσεων της κλειστής ως προς εμβυθίσεις κλάσης γραφημάτων.

Για αυτό, προσαρμόζουμε τα αποτελέσματα στην [4] έτσι ώστε να επιτρέψουμε τον υπολογισμό του συνόλου παρεμπόδισης οποιασδήποτε κλειστής ως προς εμβυθίσεις κλάσης γραφημάτων, υπό τις συνθήκες πως ένα ρητό άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων της μπορεί επίσης να υπολογιστεί και η κλάση μπορεί να οριστεί στην ΜΔΛ. Παρουσιάζουμε αυτόν τον αλγόριθμο στο Λήμμα 5.4 και με αυτό ολοκληρώνουμε το μέρος της υπολογισιμότητας αυτού του κεφαλαίου. Το επόμενο μας βήμα είναι ένα συνδυαστικό αποτέλεσμα που αποδεικνύει ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων της ένωσης δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς εμβυθίσεις, των οποίων τα σύνολα παρεμπόδισης είναι γνωστά. Δείχνουμε τότε

ότι το σύνολο παρεμπόδισης της ένωσής τους μπορεί να υπολογιστεί επαρκώς. Οι συνδυαστικές μας αποδείξεις διαφέρουν σημαντικά από αυτές της [4] και κάνουν χρήση μίας κατάλληλης παραλλαγής του Θεωρήματος Μοναδικής Δέσμωσης των K. Kawarabayashi και P. Wollan [124].

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου είναι δομημένο ως εξής. Στην Ενότητα 5.1, διατυπώνουμε τις βασικές έννοιες που χρησιμοποιούμε στο κεφάλαιο καθώς και μερικά πολύ γνωστά αποτελέσματα. Στην Ενότητα 5.2, παρουσιάζουμε το αποτέλεσμα υπολογισιμότητας, δηλαδή, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο παρεμπόδισης μίας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς εμβυθίσεις μπορεί να υπολογιστεί όταν ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των παρεμπόδισέων της και μία ΜΔΛ-περιγραφή της κλάσης γραφημάτων είναι γνωστά. Για αυτό, αποδεικνύουμε μία έκδοση του Λήμματος 3.1 στην [4], προσαρμοσμένη στην διάταξη των εμβυθίσεων. Στην Ενότητα 5.3, παρέχουμε το φράγμα στο δέντροπλάτος των γραφημάτων που ανήκουν στο σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$ υποθέτοντας ότι τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1)$ και $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_2)$ είναι γνωστά, όπου $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ είναι κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις. Έτσι, επεκτείνουμε την υπολογισιμότητα των συνόλων παρεμπόδισης εμβυθίσεων σε πεπερασμένες ενώσεις κλάσεων γραφημάτων οι οποίες είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις.

5.1 Προκαταρκτικά

Ορίζουμε μία διάταξη $\leq$ ανάμεσα σε πεπερασμένα σύνολα γραφημάτων ως εξής: $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ εάν και μόνο εάν

1. $\sum_{G \in \mathcal{F}_1} |V(G)| < \sum_{H \in \mathcal{F}_2} |V(H)|$ ή
2. $\sum_{G \in \mathcal{F}_1} |V(G)| = \sum_{H \in \mathcal{F}_2} |V(H)|$ και $\sum_{G \in \mathcal{F}_1} |E(G)| < \sum_{H \in \mathcal{F}_2} |E(H)|$.

Ορισμός 5.1 (Ένας ισοδύναμος ορισμός των συνόλων παρεμπόδισης.). Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις. Ένα σύνολο γραφημάτων $F = \{H_1, \dots, H_n\}$ καλείται σύνολο παρεμπόδισης (εμβυθίσεων) της $\mathcal{C}$, και συμβολίζεται με $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$, εάν και μόνο εάν το F είναι ένα $\leq$ -ελαχιστικό σύνολο γραφημάτων για το οποίο ισχύει το ακόλουθο: Για κάθε γράφημα G , το G δεν ανήκει στην $\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα γράφημα $H \in F$ τέτοιο ώστε $H \leq_{im} G$.

Σχόλιο 2. Ενώ έχουμε ήδη ορίσει τα σύνολα παρεμπόδισης θα θέλαμε να συμπεριλάβουμε και τον Ορισμό 5.1 καθώς μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση της απόδειξης του Λήμματος 5.4.

Ας θυμηθούμε ότι, λόγω της [211], για κάθε κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις $\mathcal{C}$ το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ είναι πεπερασμένο.

Στην [210], οι N. Robertson και P. Seymour απέδειξαν ένα θεώρημα το οποίο είναι γνωστό ως το Θεώρημα Ζωτικής Δέσμωσης. Το θεώρημα αυτό παρέχει ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος ενός γραφήματος G το οποίο περιέχει μία ζωτική k -δέσμωση L τέτοια ώστε $V(L) = V(G)$, όπου το φράγμα εξαρτάται μόνο από το k . Μία ισχυρότερη διατύπωση του Θεωρήματος Ζωτικής Δέσμωσης αποδείχθηκε πρόσφατα από τους K. Kawarabayashi και P. Wollan [124], όπου αντί να ζητήσουν η δέσμωση να είναι ζωτική, ζητάνε να είναι μοναδική. Παρατηρούμε εδώ ότι μία ζωτική δέσμωση είναι επίσης μοναδική. Καθώς σε κάποιες από τις αποδείξεις μας (για παράδειγμα, στην απόδειξη του Λήμματος 5.5) αντιμετωπίζουμε μοναδικές, αλλά όχι απαραίτητα και ζωτικές, δεσμώσεις κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Ζωτικής Δέσμωσης στην μεταγενέστερή του μορφή όπως διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 5.1 (Θεώρημα Μοναδικής Δέσμωσης [124, 210]). Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε να ισχύει το επόμενο. Έστω ότι η L είναι μία (1-προσεγγιστική) k -δέσμωση στο G με $V(L) = V(G)$.

Εάν η L είναι μοναδική τότε $\mathbf{tw}(G) \leq w(k)$.

Μοναδική Δευτεροβάθμια Λογική

Λήμμα 5.1. Η κλάση των γραφημάτων που περιέχουν ένα συγκεκριμένο-ποιημένο γράφημα H σαν εμβύθιση είναι ΜΔΛ-ορίσιμη από έναν ΜΔΛ-τύπο ϕ_H .

Απόδειξη. Έστω $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και $E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Έστω επίσης ότι ϕ_H είναι ο ακόλουθος τύπος.

$$\begin{aligned} \phi_H := & \exists E_1, E_2, \dots, E_m \exists x_1, x_2, \dots, x_n \left[\left(\bigwedge_{i \in [n]} V(x_i) \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in [m]} E_j \subseteq E \right) \wedge \right. \\ & \left. \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{p \neq q} E_p \cap E_q = \emptyset \right) \wedge \left(\bigwedge_{e_r = \{v_k, v_l\} \in E(H)} \text{path}(x_k, x_l, E_r) \right) \right], \end{aligned}$$

όπου $\text{path}(x, y, Z)$ είναι ο τύπος της ΜΔΛ που ορίζει ότι οι ακμές στο Z σχηματίζουν ένα μονοπάτι από το x στο y . Αυτό μπορεί να γίνει λέγοντας ότι το σύνολο ακμών Z είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή v προσπίπτουσα σε μία ακμή στο Z είτε είναι προσπίπτουσα σε ακριβώς δύο ακμές του Z είτε σε ακριβώς μία ακμή με την περαιτέρω συνθήκη ότι $v = x$ ή $v = y$. Άρα, ο $\text{path}(x, y, Z)$ μπορεί να εκφραστεί στην ΜΔΛ από τον ακόλουθο τύπο.

$$\begin{aligned} & [(x \neq y) \wedge \exists p, q (Z(p) \wedge Z(q) \wedge I(x, p) \wedge I(y, q) \wedge \\ & \forall p' \in Z (I(x, p') \rightarrow p = p') \wedge \forall q' \in Z (I(y, q') \rightarrow q = q')) \wedge \\ & \forall w (V(w) \wedge w \neq x \wedge w \neq y \wedge \exists q_1 (Z(q_1) \wedge I(w, q_1)) \rightarrow \\ & \exists q_2, q_3 (Z(q_2) \wedge Z(q_3) \wedge q_2 \neq q_3 \wedge I(w, q_2) \wedge I(w, q_3))) \wedge \\ & \forall p_1, p_2, p_3 (Z(p_1) \wedge Z(p_2) \wedge Z(p_3) \wedge \\ & \exists m (V(m) \wedge I(u, p_1) \wedge I(u, p_2) \wedge I(u, p_3)) \rightarrow \bigvee_{i \neq j} (p_i = p_j))] \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι ο ϕ_H είναι ο επιθυμητός τύπος. □

Διατυπώνουμε τώρα ένα θεώρημα το οποίο διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του αλγόριθμου για τον υπολογισμό των παρεμποδίσεων εμβυθίσεων για γενικές κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις.

Θεώρημα 5.2 ([13, 36]). *Έστω ϕ ένας συγκεκριμενοποιημένος τύπος της ΜΔΛ. Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος για κάθε θετικό ακέραιο k και κάθε γράφημα G , του οποίου το δεντροπλάτος είναι άνω φραγμένο από k και είναι δοσμένο μαζί με μία δεντροαποσύνθεσή του, αποφασίζει εάν το G ικανοποιεί τον ϕ .*

Στην [4], οι I. Adler, M. Grohe, και S. Kreutzer παρέχουν εργαλεία που μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.2, όταν ένα άνω φράγμα στο δεντροπλάτος των παρεμποδίσεων είναι γνωστό και μία ΜΔΛ-περιγραφή της κλάσης γραφημάτων μπορεί να υπολογιστεί, έτσι ώστε να υπολογίσουμε το σύνολο παρεμπόδισης των κλάσεων γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς ελάσσονα. Προσαρμόζουμε τον μηχανισμό τους στην διάταξη των εμβυθίσεων και αποδεικνύουμε ότι το δεντροπλάτος των παρεμποδίσεων των κλάσεων γραφημάτων που είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις είναι άνω φραγμένο από κάποια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από την κλάση γραφημάτων. Αυτό παρέχει μία γενική τεχνική για την κατασκευή των συνόλων παρεμπόδισης εμβυθίσεων όταν μία ρητή τιμή της συνάρτησης είναι γνωστή. Τότε, αποκτώντας ένα τέτοιο υπολογίσιμο άνω φράγμα στο δεντροπλάτος των γραφημάτων του συνόλου $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$, όπου $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ και $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ είναι κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις των οποίων τα σύνολα παρεμπόδισης είναι δοσμένα, δείχνουμε ότι το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$ μπορεί να υπολογιστεί επαρκώς.

5.2 Υπολογίζοντας Σύνολα Παρεμπόδισης Εμβυθίσεων

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε το ανάλογο του Λήμματος 2.2 στην [4] (Λήμμα 5.2) και το ανάλογο του Λήμματος 3.1 στην [4] (Λήμμα 5.4) για την διάταξη εμβυθίσεων.

Πρώτα διατυπώνουμε το συνδυαστικό λήμμα αυτής της ενότητας.

Λήμμα 5.2. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω ότι τα H και G είναι γραφήματα τέτοια ώστε $H \leq_{im} G$. Εάν το G' είναι ένα ελαχιστικό υπογράφημα του G με $H \leq_{im} G'$ τότε $\text{tw}(G') \leq f(|E(H)|)$.

Η απόδειξη του Λήμματος 5.2 παραλείπεται καθώς μία ισχυρότερη εκδοχή του αποδεικνύεται αργότερα (Λήμμα 5.7). Συνεχίζουμε δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς έτσι ώστε να αποδείξουμε το ανάλογο του Λήμματος 3.1 στην [4] για την διάταξη εμβυθίσεων.

Επέκταση της $\mathbf{M\Delta\Lambda}$ Για ευκολία, θεωρούμε την επέκταση της υπογραφής τ_G σε μία υπογραφή τ_{ex} που συνδυάζει την αναπαράσταση ενός γραφήματος G με την αναπαράσταση μίας εκ των δεντροαποσυνθέσεών του.

Ορισμός 5.2. Εάν το G είναι ένα γράφημα και $\mathcal{T} = (\mathcal{X}, T)$ είναι μία δεντροαποσύνθεση του G , η τ_{ex} είναι η υπογραφή που αποτελείται από τα κατηγορηματικά σύμβολα V, E, I της τ_G , και τέσσερα παραπάνω κατηγορηματικά σύμβολα V_T, E_T, I_T , και X .

Μία δεντρό-επέκταση (*tree-dec expansion*) των G και $\mathcal{T}$, είναι η τ_{ex} -δομή

$$\mathfrak{G}_{ex} = (V(G) \cup E(G) \cup V(T) \cup E(T), \\ V^{\mathfrak{G}_{ex}}, E^{\mathfrak{G}_{ex}}, I^{\mathfrak{G}_{ex}}, V_T^{\mathfrak{G}_{ex}}, E_T^{\mathfrak{G}_{ex}}, I_T^{\mathfrak{G}_{ex}}, X^{\mathfrak{G}_{ex}})$$

όπου το $V_T^{\mathfrak{G}^{ex}} = V(T)$ αναπαριστά το σύνολο κορυφών του T , το $E_T^{\mathfrak{G}^{ex}} = E(T)$ το σύνολο ακμών του T , το $I_T^{\mathfrak{G}^{ex}} = \{(v, e) \mid v \in e \cap V(T) \wedge e \in E(T)\}$ την σχέση πρόσπτωσης στο T και $X^{\mathfrak{G}^{ex}} = \{(t, v) \mid t \in V(T) \wedge v \in X_t \cap V(G)\}$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$ την κλάση των δεντρό-επεκτάσεων που αποτελούνται από ένα γράφημα G με $\mathbf{tw}(G) \leq k$, και μία δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}, T)$ του G με πλάτος $\leq k$.

Λήμμα 5.3 ([4]). *Ισχύουν ότι:*

1. *Εάν το G είναι ένα γράφημα και η $(\mathcal{X}, T)$ είναι μία δεντροαποσύνθεση του με πλάτος το πολύ k τότε το δεντροπλάτος της δεντρό-επέκτασης του G είναι το πολύ $k + 2$.*
2. *Υπάρχει μία πρόταση της ΜΔΛ $\phi_{\mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}}$ τέτοια ώστε για κάθε τ_{ex} -δομή $\mathfrak{G}, \mathfrak{G} \models \phi_{\mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}}$ εάν και μόνο εάν $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$.*

Ένα κλασικό αποτέλεσμα [13] (δείτε το Θεώρημα 5.2) δηλώνει ότι μπορούμε να αποφασίσουμε, για κάθε $k \geq 0$, εάν ένας τύπος της ΜΔΛ ικανοποιείται σε ένα γράφημα G με $\mathbf{tw}(G) \leq k$. Ένα άμεσο πόρισμα αυτού του αποτελέσματος και του Λήμματος 5.3 είναι το επόμενο.

Πόρισμα 5.1. *Μπορούμε να αποφασίσουμε, για κάθε k , εάν ένας τύπος της ΜΔΛ ϕ ικανοποιείται σε κάποιο $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$.*

Θεώρημα 5.3 ([4]). *Για κάθε $k \geq 0$, υπάρχει μία πρόταση της ΜΔΛ $\phi_{\mathcal{T}_k}$ τέτοια ώστε για κάθε δεντρό-επέκταση $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_l}$ του G , για κάποιο $l \geq k$, ισχύει ότι $\mathfrak{G} \models \phi_{\mathcal{T}_k}$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{tw}(G) = k$.*

Ορισμός 5.3. *Μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ είναι ΜΔΛ-ορίσιμη κατά στρώσεις (layerwise MSO-definable), εάν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να υπολογίσουμε έναν τύπο της ΜΔΛ ϕ_k τέτοιον ώστε $G \in \mathcal{C} \wedge \mathbf{tw}(G) \leq k$ εάν και μόνο εάν $\mathfrak{G} \models \phi_k$, όπου $\mathfrak{G} \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$ είναι μία δεντρό-επέκταση του G .*

Ορισμός 5.4. Έστω ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις. Το πλάτος (*width*) της $\mathcal{C}$, $\mathbf{width}(\mathcal{C})$, είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε για κάθε γράφημα $G \notin \mathcal{C}$ υπάρχει ένα γράφημα $G' \subseteq G$ με $G' \notin \mathcal{C}$ και $\mathbf{tw}(G') \leq k$.

Σημειώνουμε ότι το Λήμμα 5.2 επιβεβαιώνει ότι το πλάτος μίας κλάσης γραφημάτων κλειστής ως προς εμβυθίσεις είναι καλά ορισμένο.

Παρατήρηση 5.1. Εάν οι $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ είναι κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις τότε ισχύουν τα παρακάτω.

1. Για κάθε γράφημα $G \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, υπάρχει ένα γράφημα $G' \subseteq G$ τέτοιο ώστε $G' \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ και $\mathbf{tw}(G') \leq \max\{r(|E(H)|, |E(J)|) \mid H \in \mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1), J \in \mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_2)\}$, όπου r είναι η συνάρτηση του Λήμματος 5.7 και άρα,
2. Για κάθε γράφημα $G \notin \mathcal{C}_1$, υπάρχει ένα γράφημα $G' \subseteq G$ τέτοιο ώστε $G' \notin \mathcal{C}_1$ και $\mathbf{tw}(G') \leq \max\{f(|E(H)|) \mid H \in \mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1)\}$, όπου f είναι η συνάρτηση του Λήμματος 5.2.

Τέλος, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το ανάλογο του Λήμματος 3.1 στην [4] για τη διάταξη των εμβυθίσεων.

Λήμμα 5.4. Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος, δοσμένου ενός άνω φράγματος $l \geq 0$ στο πλάτος μίας κλάσης $\mathcal{C}$ ΜΔΛ-ορίσιμης κατά στρώσεις, και μίας υπολογίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{M}\Delta\Lambda$ τέτοια ώστε για κάθε θετικό ακέραιο k , $f(k) = \phi_k$, όπου ϕ_k είναι ο τύπος της ΜΔΛ που ορίζει την $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}_k$, υπολογίζει το $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C})$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το λήμμα είναι αρκετό να αποδείξουμε τον ακόλουθο.

Ισχυρισμός 6. Για οποιαδήποτε πεπερασμένη οικογένεια γραφημάτων $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$, είναι αποφάνσιμο εάν οι δύο ακόλουθες συνθήκες είναι μη-ικανοποιήσιμες για ένα δοσμένο γράφημα G .

1. $G \in \mathcal{C}$ και υπάρχει ένα $F \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $F \leq_{im} G$.
2. $G \notin \mathcal{C}$ και για κάθε $F \in \mathcal{F}$, $F \not\leq_{im} G$.

Για να δούμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αρκετός, ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι εάν η $\mathcal{F}$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια γραφημάτων για την οποία οι τύποι χ και ψ είναι μη-ικανοποιήσιμοι τότε η $\mathcal{F}$ είναι ένας χαρακτηρισμός της $\mathcal{C}$ με απαγορευμένες εμβυθίσεις, δηλαδή, ένα γράφημα G ανήκει στην $\mathcal{C}$ εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα από τα γραφήματα στην $\mathcal{F}$ σαν εμβύθιση. Από τον ορισμό, το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq_{im}}(\mathcal{C})$ είναι η ελαχιστική τέτοια οικογένεια σύμφωνα με την σχέση $\leq$ που ορίστηκε στην Ενότητα 5.1. Άρα, εάν ο Ισχυρισμός 6 ισχύει, μπορούμε να βρούμε το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq_{im}}(\mathcal{C})$ απαριθμώντας, σύμφωνα με την $\leq$, όλες τις πεπερασμένες οικογένειες γραφημάτων $\mathcal{F}$ και αποφασίζοντας, για κάθε μία από αυτές, εάν οι τύποι χ και ψ είναι μη-ικανοποιήσιμοι.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 6. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα στην $\mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $F \leq_{im} G$, για κάποιο $F \in \mathcal{F}$. Το Λήμμα 5.2 συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα γράφημα $G' \subseteq G$ με $\mathbf{tw}(G') \leq f(|E(F)|)$ και $F \leq_{im} G'$, όπου η f είναι η συνάρτηση του Λήμματος 5.2. Παρατηρούμε ότι $G' \in \mathcal{C}$. Άρα, ο χ είναι ικανοποιήσιμος εάν και μόνο εάν υπάρχει ένα γράφημα στην $\mathcal{C}$, του οποίου το δεντροπλάτος είναι φραγμένο από $\max\{f(|E(F)|) : F \in \mathcal{F}\}$, που τον ικανοποιεί, όπου η f είναι η υπολογίσιμη συνάρτηση του Λήμματος 5.2. Έστω ότι ο $\phi_{\mathcal{C}}$ είναι ο τύπος που ορίζει την $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}_k$ στην $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$, και $\phi_{\mathcal{F}} \equiv \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \phi_F$, όπου ο ϕ_F είναι ο τύπος του Λήμματος 5.1 και $k = \max\{f(|E(F)|) : F \in \mathcal{F}\}$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιο γράφημα $G \in \mathcal{C}$ που είναι μοντέλο του $\phi_{\mathcal{F}}$

εάν και μόνο εάν ο $\phi_C \wedge \phi_F$ είναι ικανοποιήσιμος για κάποιο $G' \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}_k}$. Από το Πόρισμα 5.1, αυτό είναι αποφάνσιμο.

Έστω ότι το $G \notin \mathcal{C}$ είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε $F \not\leq_{im} G$, για κάθε $F \in \mathcal{F}$. Ας θυμηθούμε ότι το πλάτος μίας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{C}$ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε για κάθε γράφημα $G \notin \mathcal{C}$ να υπάρχει ένα $G' \subseteq G$ με $G' \notin \mathcal{C}$ και $\text{tw}(G') \leq k$. Άρα, το G περιέχει ένα υπογράφημα G' με δεντροπλάτος το πολύ w τέτοιο ώστε $G' \notin \mathcal{C}$, όπου το w είναι υπολογίσιμο από το Λήμμα 5.2. Παρατηρούμε ότι $F \not\leq_{im} G'$, για κάθε $F \in \mathcal{F}$. Εάν η ϕ'_C είναι η πρόταση της ΜΔΛ που ορίζει την $\mathcal{C} \cap \mathcal{T}_w$ (δοσμένη από την υπόθεση), τότε υπάρχει ένα γράφημα $G \notin \mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $F \not\leq_{im} G$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ εάν και μόνο εάν ο $\neg\phi'_C \wedge \neg\phi_F$ είναι ικανοποιήσιμος στην $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_w}$. Η αποφανσιμότητα της ικανοποιησιμότητας του $\neg\phi'_C \wedge \neg\phi_F$ στην $\mathcal{C}_{\mathcal{T}_w}$ έπεται ξανά από το Πόρισμα 5.1. $\square$

Καθώς ο Ισχυρισμός 6 ισχύει, το λήμμα έπεται. $\square$

Πόρισμα 5.2. Υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος δοσμένου ενός τύπου της ΜΔΛ ϕ και $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε ο ϕ ορίζει μία κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις $\mathcal{C}$ πλάτους το πολύ k , υπολογίζει το σύνολο παρεμπόδισης της $\mathcal{C}$.

Θα θέλαμε να σχολιάσουμε εδώ ότι ενώ το Λήμμα 5.4 παρέχει τις απαραίτητες συνθήκες για τον υπολογισμό του συνόλου παρεμπόδισης για οποιαδήποτε κλάση γραφημάτων κλειστή ως προς εμβυθίσεις $\mathcal{C}$, δεν υπάρχει ομοιόμορφος τρόπος υπολογισμού αυτών των συνθηκών, δηλαδή του άνω φράγματος του πλάτους της $\mathcal{C}$ και της ΜΔΛ-περιγραφής της.

Σε ότι ακολουθεί, αποδεικνύοντας μερικά συνδυαστικά λήμματα, είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε ότι εάν οι $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ είναι δύο κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις, των οποίων τα σύνολα παρεμπόδισης είναι γνωστά, τότε το σύνολο $\text{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$ είναι υπολογίσιμο.

5.3 Φράγματα στο Δεντροπλάτος των Παρεμποδίσεων

Σε αυτή την ενότητα, δίνουμε ένα άνω φράγμα στο δεντροπλάτος των παρεμποδίων εμβυθίσεων της κλάσης γραφημάτων $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, όπου οι $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ είναι κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως εμβυθίσεις, δεδομένου ότι τα σύνολα παρεμπόδισής τους είναι γνωστά. Για να το κάνουμε αυτό, πρώτα αποδεικνύουμε μία γενίκευση του Θεωρήματος Μοναδικής Δέσμωσης. Έπειτα, εισάγουμε την έννοια της r -προσεγγιστικής ακμοδέσμωσης και εργαζόμαστε στα ελαχιστικά γραφήματα που δεν ανήκουν στην $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

Τέλος, καθώς είναι τετριμμένο να υπολογίσουμε μία περιγραφή της $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ στην ΜΔΛ όταν μας δίνονται τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1)$ και $\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_2)$, δείχνουμε ότι το σύνολο παρεμπόδισής της $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ είναι υπολογίσιμο.

Λήμμα 5.5. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα που περιέχει μία 2-προσεγγιστική k -δέσμωση $\tilde{L}$ τέτοια ώστε $V(\tilde{L}) = V(G)$. Εάν η $\tilde{L}$ είναι μοναδική, τότε $\mathbf{tw}(G) \leq f(k)$.

Απόδειξη. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα το οποίο περιέχει μία μοναδική 2-προσεγγιστική k -δέσμωση $\tilde{L}$ με $V(\tilde{L}) = V(G)$ η οποία συνδέει τα σύνολα $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ και $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ στο G . Συμβολίζουμε με T το σύνολο $A \cup B$ και θεωρούμε το γράφημα G^b με

$$\begin{aligned} V(G^b) &= V((G \setminus T) \times K_2) \cup T \\ E(G^b) &= E((G \setminus T) \times K_2) \cup \{\{t, t'\} \mid t, t' \in T \wedge \{t, t'\} \in E(G)\} \\ &\quad \cup \{\{t, (v, x)\} \mid t \in T \wedge x \in V(K_2) \wedge v \in V(G) \wedge \{t, v\} \in E(G)\}, \end{aligned}$$

όπου $V(K_2) = \{1, 2\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το G^b περιέχει μία k -δέσμωση που συνδέει τα A και B . Έστω ότι το G' είναι ένα ελαχιστικό

εναγόμενο υπογράφημα του G^b το οποίο περιέχει μία k -δέσμωση L' η οποία συνδέει τα A και B . Από το Θεώρημα 5.1, έπεται ότι

$$\mathbf{tw}(G') \leq w(k). \quad (5.1)$$

Από εδώ και στο εξής εργαζόμαστε προς το να αποδείξουμε ότι $G \leq_m G'$. Για την επίτευξη αυτού, αποδεικνύουμε τους ακόλουθους δύο ισχυρισμούς για το G' .

Ισχυρισμός 7. *Εάν η L' είναι μία k -δέσμωση στο G' που συνδέει τα A και B τότε για κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus T$ κανένα μονοπάτι της L' δεν περιέχει και την $(v, 1)$ και την $(v, 2)$.*

Απόδειξη. Προς άτοπο, ας υποθέσουμε ότι για κάποια κορυφή $v \in V(G) \setminus T$, υπάρχει ένα (t, t') -μονοπάτι P της L' το οποίο περιέχει αμφότερες τις $(v, 1)$ και $(v, 2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε επίσης ότι η $(v, 1)$ εμφανίζεται πριν από την $(v, 2)$ στο P . Έστω ότι η y είναι η διάδοχος της $(v, 2)$ στο P και ας παρατηρήσουμε ότι $y \neq (v, 1)$. Από τον ορισμό του G^b και το γεγονός ότι το G' είναι εναγόμενο υπογράφημα του G^b , έχουμε ότι $\{y, (v, 1)\} \in E(G') \setminus E(L')$. Αντικαθιστώντας το υπομονοπάτι του P από την $(v, 1)$ στην y με την ακμή $\{(v, 1), y\}$, προκύπτει μία δέσμωση στο $G' \setminus (v, 2)$ που συνδέει τα A και B . Αυτό αντιφάσκει στην ελαχιστικότητα του G' . $\square$

Ισχυρισμός 8. *Εάν η L' είναι μία k -δέσμωση στο G' που συνδέει τα A και B τότε για κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus T$, $V(L') \cap \{(v, 1), (v, 2)\} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι υπάρχει μία δέσμωση L' στο G' και μία κορυφή $x \in V(G) \setminus T$ τέτοια ώστε η L' συνδέει τα A και B και $V(L') \cap \{(x, 1), (x, 2)\} = \emptyset$. Ο Ισχυρισμός 7 διασφαλίζει ότι, μετά τη σύνθλιψη των ακμών $\{(v, 1), (v, 2)\}$, $v \in V(G) \setminus T$ (όποτε αυτές υπάρχουν), τα αντίστοιχα μονοπάτια συνθέτουν μία 2-προσεγγιστική k -δέσμωση $\tilde{L}'$ του

$G \setminus \{x\}$ που συνδέει τα A και B . Αυτό είναι αντίφαση στην υπόθεση ότι η $\tilde{L}$ είναι μοναδική. Άρα, ο ισχυρισμός ισχύει. $\square$

Ας θυμηθούμε ότι $T \subseteq V(G')$ και ότι το G' είναι εναγόμενο υπογράφημα του G^b . Ο Ισχυρισμός 8 συνεπάγεται ότι μπορούμε να αποκτήσουμε το G από το G' συνθλίβοντας τις ακμές $\{(v, 1), (v, 2)\}$ για κάθε $v \in V(G) \setminus T$ (όποτε αυτές υπάρχουν). Αφού $G \leq_m G'$, από την (5.1), έπεται ότι, $\mathbf{tw}(G) \leq w(k)$. $\square$

Παρατηρούμε ότι, το προηγούμενο λήμμα ισχύει για οποιοδήποτε γράφημα G το οποίο περιέχει μία r -προσεγγιστική k -δέσμωση. Αυτό μπορεί να γίνει φανερό αντικαθιστώντας, στην απόδειξή του, το $(G \setminus T) \times K_2$ με το $(G \setminus T) \times K_r$.

Διατυπώνουμε τώρα ένα λήμμα το οποίο παρέχει ένα άνω φράγμα στο δεντροπλάτος ενός γραφήματος G , δεδομένου ενός άνω φράγματος στο δεντροπλάτος του γραμμικού του γραφήματος $L(G)$.

Λήμμα 5.6. *Έστω ότι ο k είναι ένας θετικός ακέραιος. Εάν το G είναι ένα γράφημα με $\mathbf{tw}(L(G)) \leq k$ τότε $\mathbf{tw}(G) \leq 2k + 1$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε το $L(G)$ επιδέχεται μία δεντροαποσύνθεση πλάτους το πολύ k και θυμόμαστε ότι κάθε κορυφή του $L(G)$ αντιστοιχεί σε μία ακμή του G . Κατασκευάζουμε μία δεντροαποσύνθεση $\mathcal{T}$ του G από μία δεντροαποσύνθεση $\mathcal{T}_L$ του $L(G)$ αντικαθιστώντας σε κάθε τσάντα της $\mathcal{T}_L$ κάθε κορυφή του $L(G)$ με τα άκρα της αντίστοιχης ακμής στο G . Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι αυτή είναι μία δεντροαποσύνθεση του G . Συνεπώς, $\mathbf{tw}(G) \leq 2k + 1$. $\square$

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο λήμμα, χρειαζόμαστε να εισάγουμε την έννοια μιας r -προσεγγιστικής k -ακμοδέσμωσης σε ένα γράφημα. Παρόμοια

με την έννοια μιας r -προσεγγιστικής δέσμωσης, μία r -προσεγγιστική ακμοδέσμωση (r -approximate edge-linkage) σε ένα γράφημα G είναι μία οικογένεια μονοπατιών E στο G τέτοια ώστε για κάθε $r + 1$ διαφορετικά μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_{r+1}$ στην E , ισχύει ότι $\bigcap_{i \in [r+1]} E(P_i) = \emptyset$. Καλούμε αυτά τα μονοπάτια *συνιστώσες* (*components*) της ακμοδέσμωσης. Έστω ότι $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ και $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ είναι στοιχεία του $V(G)^k$. Λέμε ότι μία r -προσεγγιστική ακμοδέσμωση E , που αποτελείται από τα μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$, *συνδέει* (*links*) τα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ και $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ εάν το P_i είναι ένα μονοπάτι με άκρα α_i και β_i , για κάθε $i \in [k]$. Η *τάξη* (*order*) της E είναι k . Καλούμε μία r -προσεγγιστική ακμοδέσμωση τάξης k , r -προσεγγιστική k -ακμοδέσμωση (r -approximate k -edge-linkage). Όταν $r = 1$, καλούμε μία τέτοια οικογένεια μονοπατιών, *ακμοδέσμωση* (*edge-linkage*).

Λήμμα 5.7. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση r τέτοια ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω ότι τα G_1, G_2 , και G είναι γραφήματα τέτοια ώστε $G_i \leq_{im} G$, $i \in [2]$. Εάν το G' είναι ένα ελαχιστικό υπογράφημα του G όπου $G_i \leq_{im} G'$, $i \in [2]$, τότε $\text{tw}(G') \leq r(|E(G_1)|, |E(G_2)|)$.

Απόδειξη. Έστω ότι το G' είναι ένα ελαχιστικό υπογράφημα του G τέτοιο ώστε $G_i \leq_{im} G'$, $i \in [2]$. Ας προσέξουμε ότι οι ακμές του G_i συνθέτουν μία k_i -ακμοδέσμωση E_i στο G , όπου $k_i = |E(G_i)|$, $i \in [2]$. Επιπροσθέτως, ας παρατηρήσουμε ότι τα μονοπάτια των E_1 και E_2 απαρτίζουν μία 2-προσεγγιστική k -ακμοδέσμωση E του G , με $k = k_1 + k_2$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις δεσμώσεις, δεν απαιτούμε τα μονοπάτια που συνθέτουν ακμοδεσμώσεις να έχουν διαφορετικά άκρα. Η ελαχιστικότητα του G' συνεπάγεται ότι $\bigcup \{P \mid P \in E\} = G'$. Συμβολίζουμε με $A = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ και $B = (v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k})$ τα σύνολα κορυφών που συνδέονται από μία ακμοδέσμωση E στο G' και έστω ότι το $\hat{G}$ είναι το γράφημα με

$$\begin{aligned} V(\widehat{G}) &= V(G') \cup \{u_{i_q} \mid q \in [k]\} \cup \{u_{j_q} \mid q \in [k]\}, \\ E(\widehat{G}) &= E(G') \cup \{t_{i_q} \mid q \in [k]\} \cup \{t_{j_q} \mid q \in [k]\}, \end{aligned}$$

όπου οι κορυφές u_{i_q} και u_{j_q} , $q \in [k]$, είναι νέες, $t_{i_q} = \{u_{i_q}, v_{i_q}\}$, $q \in [k]$, και $t_{j_q} = \{u_{j_q}, v_{j_q}\}$, $q \in [k]$.

Θεωρούμε το γραμμικό γράφημα του $\widehat{G}$, $L(\widehat{G})$, και παρατηρούμε ότι η E αντιστοιχεί σε μία 2-προσεγγιστική k -δέσμωση L από το A_L στο B_L στο $L(\widehat{G})$, όπου $A_L = (t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k})$ και $B_L = (t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k})$. Αυτό είναι αληθές καθώς, από την κατασκευή του $\widehat{G}$, όλες οι κορυφές στα A_L και B_L είναι διαφορετικές. Από την ελαχιστικότητα του G' αντλούμε ότι $V(L) = V(L(\widehat{G}))$ και συνάγουμε ότι η L είναι μοναδική. Από το Λήμμα 5.5, προκύπτει ότι $\mathbf{tw}(L(\widehat{G})) \leq f(k)$. Συνεπώς, από το Λήμμα 5.6, παίρνουμε ότι $\mathbf{tw}(\widehat{G}) \leq p(f(k))$, όπου p είναι η συνάρτηση του Λήμματος 5.6. Τέλος, αφού $G' \subseteq \widehat{G}$, $\mathbf{tw}(G') \leq r(k_1, k_2)$, όπου $r(k_1, k_2) = p(f(k_1 + k_2))$. $\square$

Ας παρατηρήσουμε ότι το Λήμμα 5.2 έπεται από το Λήμμα 5.7 όταν θέσουμε ως G_2 το κενό γράφημα. Εν τέλει, δείχνουμε ότι, δοσμένων δύο κλειστών ως προς εμβυθίσεις κλάσεων γραφημάτων $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$, η κλειστή ως προς εμβυθίσεις κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ είναι ορίσιμη στην ΜΔΛ κατά στρώσεις.

Παρατήρηση 5.2. Εάν οι $\mathcal{C}_1$ και $\mathcal{C}_2$ είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις κλάσεις γραφημάτων τότε η $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ είναι μία κλάση γραφημάτων ορίσιμη στη ΜΔΛ κατά στρώσεις η οποία ορίζεται, για κάθε $k \geq 0$, από τον τύπο

$$\phi_k \equiv \left(\left(\bigwedge_{G \in \text{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_1)} \neg \phi_G \right) \vee \left(\bigwedge_{H \in \text{obs}_{\leq im}(\mathcal{C}_2)} \neg \phi_H \right) \right) \wedge \phi_{\mathcal{T}_k}$$

όπου οι ϕ_G και ϕ_H είναι οι τύποι που περιγράφονται στο Λήμμα 5.1, και ο $\phi_{\mathcal{T}_k}$ είναι ο τύπος του Θεωρήματος 5.3.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το κεντρικό μας αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.4. *Έστω ότι οι C_1 και C_2 είναι δύο κλάσεις γραφημάτων κλειστές ως προς εμβυθίσεις. Εάν τα σύνολα $\mathbf{obs}_{\leq im}(C_1)$ και $\mathbf{obs}_{\leq im}(C_2)$ είναι δοσμένα τότε το σύνολο $\mathbf{obs}_{\leq im}(C_1 \cup C_2)$ είναι υπολογίσιμο.*

Απόδειξη. Η Παρατήρηση 5.2 μας παρέχει μία περιγραφή της κλειστής ως προς εμβυθίσεις κλάσης γραφημάτων $C_1 \cup C_2$ στην ΜΔΛ, και το Λήμμα 5.7 μας δίνει ένα άνω φράγμα στο πλάτος της $C_1 \cup C_2$. Συνεπώς, το Λήμμα 5.4 είναι εφαρμόσιμο. $\square$

5.4 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, επεκτείναμε την μελέτη της υπολογισιμότητας συνόλων παρεμπόδισης για κλάσεις γραφημάτων οι οποίες είναι κλειστές ως προς εμβυθίσεις. Πιο συγκεκριμένα, παρείχαμε ένα άνω φράγμα στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων μίας κλάσης γραφημάτων C , η οποία είναι η ένωση δύο κλειστών ως προς εμβυθίσεις κλάσεων γραφημάτων C_1 και C_2 με τα $\mathbf{obs}_{\leq im}(C_1)$ και $\mathbf{obs}_{\leq im}(C_2)$ δοσμένα. Τότε, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, αποδείξαμε ότι το $\mathbf{obs}_{\leq im}(C)$ είναι υπολογίσιμο.

Στην [211], οι N. Robertson και P. Seymour ισχυρίστηκαν ότι η κλάση των γραφημάτων είναι καλά μερικώς διατεταγμένη από την διάταξη των ισχυρών εμβυθίσεων. Ωστόσο, μία πλήρης απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δεν έχει εμφανιστεί μέχρι στιγμής. Παρατηρούμε εδώ ότι τα συνδυαστικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή, τα άνω φράγματα στο δέντροπλάτος των παρεμποδίσεων, ισχύουν επίσης για την διάταξη των ισχυρών εμβυθίσεων. Άρα, εάν ο ισχυρισμός των N. Robertson και P. Seymour ισχύει, το σύνολο παρεμπόδισης της ένωσης δύο κλάσεων γραφημάτων κλειστών ως προς ισχυρές εμβυθίσεις, των οποία τα σύνολα παρεμπόδισης είναι δοσμένα, μπορεί να υπολογιστεί επαρκώς.

Τέλος, έχει αποδειχθεί από τους B. Courcelle, R. Downey και M. Fellows [37] ότι το σύνολο παρεμπόδισης μίας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{C}$ κλειστής ως προς ελάσσονα δεν μπορεί να υπολογιστεί από έναν αλγόριθμο του οποίου η είσοδος είναι μία περιγραφή της $\mathcal{C}$ σαν πρόταση της ΜΔΛ. Η υπολογισιμότητα του συνόλου παρεμπόδισης μίας κλειστής ως προς εμβυθίσεις κλάσης γραφημάτων $\mathcal{C}$, δοσμένης μονάχα μίας περιγραφής της $\mathcal{C}$ στην ΜΔΛ, παραμένει ανοικτό πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Το Ασθενές Δομικό Θεώρημα των Ελασσόνων Γραφημάτων

Η σειρά των Ελασσόνων Γραφημάτων των N. Robertson και P. Seymour φάνηκε να είναι μία πλούσια πηγή δομικών αποτελεσμάτων στη Θεωρία Γραφημάτων με πολλαπλές εφαρμογές στους Αλγόριθμους. Ένα από τα πιο φημισμένα αποτελέσματα αυτού του εγχειρήματος ήταν η ύπαρξη ενός κυβικού χρόνου αλγόριθμου για την επίλυση προβλημάτων όπως τα ΞΕΝΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ (DISJOINT PATHS) και η ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΕΛΑΣΣΟΝΟΣ (MINOR CONTAINMENT). Βασικό συστατικό αυτών των αλγορίθμων είναι ένα θεώρημα, το οποίο αποδείχτηκε στην εργασία XIII της σειράς [193], και αποκαλύπτει την τοπική δομή των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο γράφημα ως ελάσσον. Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο τώρα καλείται *ασθενές δομικό θεώρημα* (*weak structure theorem*), βεβαιώνει ότι υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε ακέραιο k , κάθε γράφημα H με h κορυφές, και κάθε

γράφημα G , ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. Το G περιέχει το H σαν ελάσσον,
2. Το G έχει δεντροπλάτος το πολύ $f(k, h)$, ή
3. Το G περιέχει ένα σύνολο X που αποτελείται από το πολύ $\binom{h}{2}$ κορυφές (οι οποίες καλούνται *απόγειες* (*apices*)) τέτοιο ώστε το $G \setminus X$ να περιέχει ως υπογράφημα την υποδιαίρεση W ενός τοίχου ύψους k η οποία είναι διευθετημένη μέσα στο G με έναν «ισόπεδο» τρόπο (συνθήκη *ισοπεδότητας*).

Για να κάνουμε την παραπάνω διατύπωση ακριβή χρειάζεται να κάνουμε σαφή την συνθήκη της ισοπεδότητας στην τρίτη δήλωση. Αναβάλλουμε όμως το περίπλοκο αυτό έργο μέχρι την Ενότητα 6.2 και αντί αυτού, χονδρικά φανταζόμαστε τον W με τέτοιο τρόπο ώστε το τμήμα του $G \setminus X$ που εδρεύει μέσα στην περίμετρο P του W μπορεί να ιδωθεί ως ένα σύνολο γραφημάτων προσκολλημένα σε μία επίπεδη περιοχή, όπου κάθε ένα από αυτά έχει φραγμένο δεντροπλάτος και το σύνορό του με τα άλλα γραφήματα έχει μέγεθος φραγμένο από 3.

Οι αλγοριθμικές εφαρμογές του ασθενούς δομικού θεωρήματος έγκεινται στο γεγονός ότι το γράφημα μέσα στην P μπορεί να ιδωθεί σαν μία *δισδιάστατη δομή* (*bidimensional structure*) όπου, για αρκετά συνδυαστικά προβλήματα, ένα πιστοποιητικό λύσης μπορεί να αναθεωρηθεί ώστε να αποφεύγει την μεσαία κορυφή του υποδιαιρεμένου τοίχου W . Αυτό είναι γνωστό ως η *τεχνική της μη-σχετικής κορυφής* (*irrelevant vertex technique*) και μπορεί να θεωρηθεί σαν μία αναγωγή της εισόδου ενός προβλήματος σε μία ισοδύναμη όπου η «άσχετη κορυφή» έχει διαγραφεί. Η εφαρμογή αυτής της τεχνικής έχει προχωρήσει πολύ περισσότερο από την αρχική της χρήση στη Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων και έχει εξελιχθεί σε ένα καθιε-

ρωμένο εργαλείο στην Αλγοριθμική Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων (δείτε στις [42, 44, 106, 133, 134, 138] για εφαρμογές αυτής της τεχνικής).

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε μία βελτιστοποιημένη έκδοση του ασθενούς δομικού θεωρήματος. Η βελτίωσή μας είναι διπλή: πρώτον, η συνάρτηση f είναι τώρα γραμμική στο k και δεύτερον, το πλήθος των απόγειων κορυφών είναι φραγμένο από $h - 5$. Και οι δύο βελτιστοποιήσεις είναι σφικτές όπως υποδεικνύεται από το γράφημα J που προκύπτει παίρνοντας μία $(k \times k)$ -σχάρα (για $k \geq 3$) και κάνοντας όλες τις κορυφές τις γειτονικές με ένα αντίγραφο του K_{h-5} . Πράγματι, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι το J αποκλείει το $H = K_h$ σαν ελάσσον, το δεντροπλάτος του είναι $k + h - 5$ και γίνεται επίπεδο (εδώ, αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη «ισοπεδότητας») μετά την αφαίρεση ακριβώς $h - 5$ κορυφών.

Η απόδειξή μας παρεκκλίνει σημαντικά από την απόδειξη στην [193]. Χτίζει στο (ισχυρό) δομικό θεώρημα ((strong) structure theorem) της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων το οποίο αποδείχτηκε στην εργασία XVI της σειράς [207]. Το θεώρημα αυτό αποκαλύπτει την καθολική δομή ενός γραφήματος χωρίς το K_h ως ελάσσον και βεβαιώνει ότι κάθε τέτοιο γράφημα μπορεί να προκύψει από την συγκόλληση γραφημάτων που μπορούν «σχεδόν να εμβαπτιστούν» σε μία επιφάνεια όπου το K_h δεν μπορεί να εμβαπτιστεί (δείτε την Ενότητα 6.1 για την ακριβή διατύπωση). Η απόδειξη εκμεταλλεύεται αυτό το δομικό αποτέλεσμα και το συνδυάζει με το γεγονός, το οποίο αποδείχθηκε στην [83], ότι τα γραφήματα που αποκλείουν κάποιο απόγειο γράφημα σαν ελάσσον και είναι «σχεδόν εμβαπτίσιμα» χωρίς μία $(k \times k)$ -τριγωνοποιημένη σχάρα έχουν δεντροπλάτος $O(k)$.

Η οργάνωση αυτού του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη. Στην Ενότητα 6.1, δίνουμε τους ορισμούς όλων των εργαλείων που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξή μας, συμπεριλαμβανομένου του δομικού θεωρήματος των Ελασσόνων Γραφημάτων. Ο ορισμός της συνθήκης της ισοπεδότητας δίνεται

στην Ενότητα 6.2 μαζί με την διατύπωση του κεντρικού μας αποτελέσματος. Κάποια λήμματα που αφορούν το αναλλοίωτο της συνθήκης ισοπεδότητας κάτω από συγκεκριμένους τοπικούς μετασχηματισμούς δίνονται στην Υποενότητα 6.3.1 και περαιτέρω ορισμοί και αποτελέσματα που αφορούν απόγειες κορυφές δίνονται στην Υποενότητα 6.3.2. Η απόδειξη του κεντρικού μας αποτελέσματος παρουσιάζεται στην Ενότητα 6.4. Τέλος, στην Ενότητα 6.5 βλέπουμε πως δύο ήδη γνωστά αποτελέσματα και ένα νέο προκύπτουν από το κεντρικό μας αποτέλεσμα και πως η δυϊκότητα και αυτοδυϊκότητα ορισμένων πλαχοστρώσεων μπορεί να «επεκταθεί» από το επίπεδο στον κόσμο των γραφημάτων που εξαιρούν ένα απόγειο γράφημα ως ελάσσον.

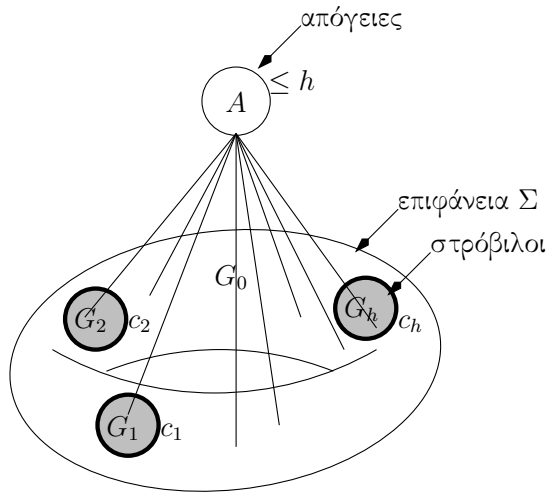
6.1 Προκαταρκτικά

Το δομικό θεώρημα των Ελασσόνων Γραφημάτων. Η απόδειξη του αποτελέσματός μας χρησιμοποιεί το Θεώρημα Αποκλεισμένου Ελάσσονος από τα Ελάσσονα Γραφημάτων. Πριν το διατυπώσουμε, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 6.1 (*h-σχεδόν εμβαπτίσιμα γραφήματα*). Έστω ότι η Σ είναι μία επιφάνεια και $h > 0$ είναι ένας ακέραιος. Ένα γράφημα G είναι *h-σχεδόν εμβαπτίσιμο* (*h-nearly embeddable graphs*) στην Σ εάν υπάρχει ένα σύνολο κορυφών $X \subseteq V(G)$ (που καλούνται *απόγειες* (*apices*)) μεγέθους το πολύ h έτσι ώστε το γράφημα $G - X$ να είναι η ένωση των (πιθανά κενών) υπογραφημάτων $G_0, \dots, G_h$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Υπάρχει ένα σύνολο κύκλων $C_1, \dots, C_h$ στη Σ τέτοιο ώστε οι κύκλοι C_i είναι τα σύνορα των ανοικτών ανά δύο ξένων δίσκων Δ_i στην Σ .
- ii) Το G_0 έχει μία εμβάπτιση στην Σ με τέτοιον τρόπο ώστε $G_0 \cap \bigcup_{i=1, \dots, h} \Delta_i = \emptyset$.

- iii) Τα γραφήματα $G_1, \dots, G_h$ (που καλούνται *στρόβιλοι* (*vortices*)) είναι ανά δύο ξένα και για $1 \leq i \leq h$, $V(G_0) \cap V(G_i) \subset C_i$.
- iv) Για $1 \leq i \leq h$, έστω ότι $U_i := \{u_1^i, \dots, u_{m_i}^i\}$ είναι οι κορυφές του $V(G_0) \cap V(G_i) \subset C_i$ εμφανιζόμενες με την σειρά που προκύπτει αν διέλθουμε δεξιόστροφα τον C_i . Καλούμε τις κορυφές του U_i *βάσεις* (*bases*) του G_i . Τότε το G_i έχει μία αποσύνθεση μονοπατιού $\mathcal{B}_i = (B_j^i)_{1 \leq j \leq m_i}$, πλάτους το πολύ h τέτοια ώστε για $1 \leq j \leq m_i$, ισχύει ότι $u_j^i \in B_j^i$.



Σχήμα 6.1: Ένα h -σχεδόν εμβαπτίσιμο γράφημα.

Δοσμένης μιας δεντροαποσύνθεσης $(\mathcal{X}, T)$ ενός γραφήματος G , όπου $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των τσαντών της αποσύνθεσης, για κάθε $i \in V(T)$ συμβολίζουμε με $\overline{X}_i$ την *κλειστότητα* (*closure*) της τσάντας $X_i \in \mathcal{X}$, δηλαδή, $\overline{X}_i$ είναι το γράφημα $G[X_i] \cup (\cup_{j \in N_T(i)} K[X_i \cap X_j])$. (Θα θέλαμε εδώ να

αναφέρουμε ότι το γράφημα $\overline{X}_i$ αναφέρεται επίσης σαν κορμός (*torso*) στην κορυφή i .)

Παρατήρηση 6.1. Εάν το G είναι ένα γράφημα και $\eta(\mathcal{X}, T)$ είναι μία δεντροαποσύνθεσή του τότε υπάρχει ένα $X \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{tw}(\overline{X}) \geq \mathbf{tw}(G)$.

Χρειαζόμαστε επίσης το ακόλουθο απλό αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.1. Εάν το G είναι ένα γράφημα και $X \subseteq V(G)$, τότε $\mathbf{tw}(G - X) \geq \mathbf{tw}(G) - |X|$.

Λέμε ότι μια δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{X}, T)$ ενός γραφήματος G είναι μικρή (*small*) εάν για κάθε $i, j \in V(T)$, με $i \neq j$, $X_i \not\subseteq X_j$.

Μία απλή απόδειξη του παρακάτω λήμματος μπορεί να βρεθεί στην [82].

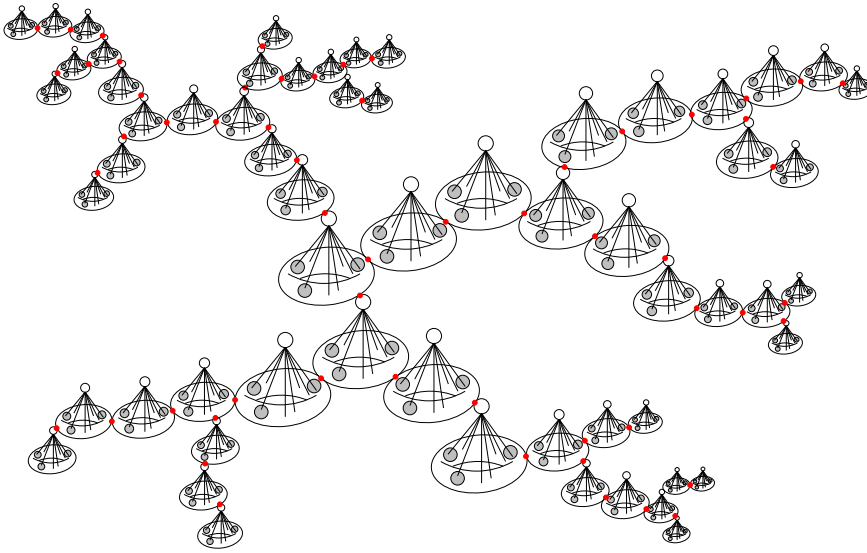
Λήμμα 6.2. Ισχύουν τα παρακάτω.

1. Εάν το G είναι ένα γράφημα και $\eta(\mathcal{X}, T)$ είναι μία μικρή δεντροαποσύνθεσή του τότε $|V(T)| \leq |V(G)|$.
2. Κάθε γράφημα G έχει μια μικρή δεντροαποσύνθεση πλάτους $\mathbf{tw}(G)$.

Η ακόλουθη πρόταση είναι γνωστή ως το δομικό θεώρημα των Ελασσόνων Γραφημάτων [207]. (Για ένα παράδειγμα¹ ενός H -ελεύθερου-ελάσσονος γραφήματος, δείτε το Σχήμα 6.2)

Πρόταση 6.1. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε μη-επίπεδο γράφημα H με h κορυφές και κάθε γράφημα G που αποκλείει το H σαν ελάσσον υπάρχει μία δεντροαποσύνθεση $(\mathcal{G} = \{G_i \mid i \in V(T)\}, T)$ όπου για κάθε $i \in V(T)$, το $\overline{G}_i$ είναι $f(h)$ -σχεδόν εμβαπτίσιμο γράφημα σε μία επιφάνεια Σ στην οποία το H δεν μπορεί να εμβαπτιστεί.

¹Καθώς ο σκοπός των εικόνων είναι να διευκολύνουν την διάσθηση η επιφάνεια Σ απεικονίζεται ως ο τόρος. Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι δουλεύουμε σε γενικές επιφάνειες φραγμένου γένους.

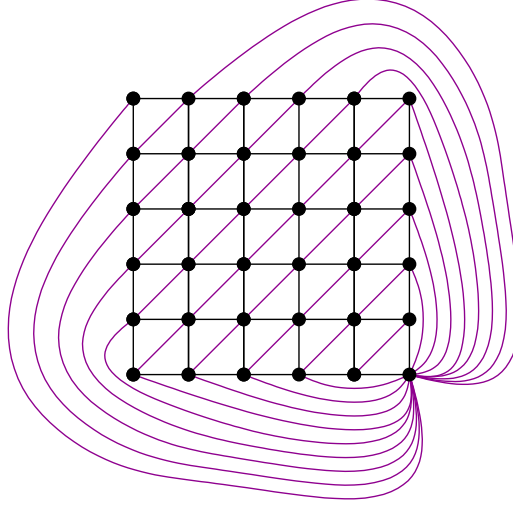


Σχήμα 6.2: Παράδειγμα ενός H -ελεύθερου-ελασσόνων γραφήματος.

6.2 Διατύπωση του Κεντρικού Αποτελέσματος

Ορίζουμε το Γ_k ως την ακόλουθη (μοναδική, μέχρι ισομορφισμού) τριγωνοποίηση της $(k \times k)$ -σχάρας. Έστω ότι Γ είναι μία ενεπίπεδη εμβάπτιση της $(k \times k)$ -σχάρας τέτοια ώστε όλες οι εξωτερικές κορυφές βρίσκονται στο σύνορο της εξωτερικής όψης. Τριγωνοποιούμε τις εσωτερικές κορυφές της $(k \times k)$ -σχάρας έτσι ώστε, στο προκύπτον γράφημα, όλες οι εσωτερικές κορυφές έχουν βαθμό 6 και όλες οι μη-γωνιακές εξωτερικές κορυφές έχουν βαθμό 4. Η κατασκευή της Γ_k ολοκληρώνεται όταν συνδέσουμε μία γωνία βαθμού 2 με όλες τις κορυφές της εξωτερικής όψης (καλούμε αυτή την γωνία *φορτωμένη* (*loaded*)). Για ένα παράδειγμα, δείτε την Γ_6 στο Σχήμα 6.3. Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό Γ_k^* για το γράφημα που προκύπτει από

την Γ_k εάν αφαιρέσουμε όλες τις ακμές που προσπίπτουν στην φορτωμένη κορυφή και δεν υπάρχουν στην υποβόσκουσα σχάρα.



Σχήμα 6.3: Το γράφημα Γ_6 .

Ορίζουμε την (k, l) -πυραμίδα ((k, l) -pyramid) να είναι το γράφημα που προκύπτει εάν πάρουμε την ξένη ένωση μίας $(k \times k)$ -σχάρας και μίας κλίκας K_l και προσθέσουμε όλες τις ακμές ανάμεσα στις κορυφές της κλίκας και τις κορυφές της σχάρας. Συμβολίζουμε την (k, l) -πυραμίδα με $\Pi_{k,l}$.

Περιφέρειες και περιφερειακές διαιρέσεις. Έστω ότι W είναι ένας υποδιαιρεμένος τοίχος σε ένα γράφημα G . Λέμε ότι ο W είναι ισόπεδος (flat) στο G εάν η περιφέρειά του, έστω K , στο G δεν έχει (c_1, c_3) -μονοπάτι και (c_2, c_4) -μονοπάτι τα οποία είναι ξένα ως προς κορυφές.

Παρατήρηση 6.2. Εάν το G είναι ένα γράφημα το οποίο περιέχει έναν ισόπεδο τοίχο W σαν υπογράφημα τότε οποιαδήποτε υποδιαίρεση του W είναι επίσης ισόπεδη στο γράφημα G' που προκύπτει από το G μετά τις υποδιαιρέσεις στον τοίχο.

Εάν το J είναι ένα υπογράφημα του K , συμβολίζουμε με $\partial_K J$ το σύνολο όλων των κορυφών v για τις οποίες είτε $v \in C$ είτε η v είναι προσπίπτουσα σε μία ακμή του K που δεν ανήκει στο J , δηλαδή,

$$\partial_K J = \{v \in V(J) \mid v \in C \text{ ή } \exists e \in E(K) \setminus E(J) : v \in e\}.$$

Μία περιφερειακή διαίρεση (*rural division*) $\mathcal{D}$ της περιφέρειας K είναι μία συλλογή

$$(D_1, D_2, \dots, D_m)$$

υπογραφημάτων του K με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Η $\{E(D_1), E(D_2), \dots, E(D_m)\}$ είναι μία διαμέριση του $E(K)$ σε μη-κενά υποσύνολα,
2. Για $i, j \in [m]$, εάν $i \neq j$ τότε $\partial_K D_i \neq \partial_K D_j$ και $V(D_i) \cap V(D_j) = \partial_K D_i \cap \partial_K D_j$,
3. Για κάθε $i \in [m]$ και όλες τις $x, y \in \partial_K D_i$ υπάρχει ένα (x, y) -μονοπάτι στο D_i με καμμία εσωτερική κορυφή στο $\partial_K D_i$,
4. Για όλα τα $i \in [m]$, $|\partial_K D_i| \leq 3$, και
5. Το υπεργράφημα $H_K = (\bigcup_{i \in [m]} \partial_K D_i, \{\partial_K D_i \mid i \in [m]\})$ είναι επίπεδο, το γράφημα πρόσπτωσής του μπορεί να εμβαπτιστεί σε έναν κλειστό δίσκο Δ έτσι ώστε οι c_1, c_2, c_3 , και c_4 να εμφανίζονται με αυτή τη σειρά στο σύνορο του Δ και για κάθε υπερακμή e του H υπάρχουν $|e|$

αμοιβαία ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια ανάμεσα στα e και C στο K .

Καλούμε τα στοιχεία της $\mathcal{D}$ πτερύγια (*flaps*). Ένα πτερύγιο $D \in \mathcal{D}$ καλείται *εσωτερικό* (*internal*) εάν $V(D) \cap V(P) = \emptyset$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 6.1. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε, για κάθε δύο γραφήματα H και G και κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. Το H είναι ελάσσον του G .
2. $\text{tw}(G) \leq f(h) \cdot k$, όπου $h = \mathbf{n}(H)$.
3. $\exists A \subseteq V(G)$ με $|A| \leq \mathbf{an}(H) - 1$ τέτοιο ώστε το $G \setminus A$ να περιέχει σαν υπογράφημα έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο W όπου
 - ο W έχει ύψος k και
 - η περιφέρεια του W έχει μία περιφερειακή διαίρεση $\mathcal{D}$ τέτοια ώστε κάθε εσωτερικό πτερύγιο του $\mathcal{D}$ έχει δεντροπλάτος το πολύ $f(h) \cdot k$.

Αναβάλλουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 μέχρι την Ενότητα 6.4 και κλείνουμε αυτή την ενότητα με μία σύντομη περιγραφή της απόδειξης. Ένα βασικό συστατικό είναι το Ισχυρό Δομικό Θεώρημα, δηλαδή, η Πρόταση 6.1, η οποία βεβαιώνει ότι κάθε H -ελεύθερο-ελάσσονος γράφημα G μπορεί να ιδωθεί σαν μία δεντροαποσύνθεση τέτοια ώστε, για κάθε κορυφή G_i , το γράφημα $\overline{G}_i$ είναι ένα $f(h)$ -σχεδόν εμβαπτίσιμο γράφημα. Δοσμένου ότι το γράφημα G έχει δεντροπλάτος μεγαλύτερο ή ίσο του $f(h) \cdot k$, όπου η $f(h)$ είναι «αρκετά μεγάλη» (και εξαρτάται από το αποκλειόμενο γράφημα H), θα έπρεπε να υπάρχει μία κορυφή G_i της δεντροαποσύνθεσης τέτοια ώστε το δεντροπλάτος

του $\overline{G}_i$ παραμένει αρκετά μεγάλο ενώ όλες οι άλλες κορυφές έχουν μικρότερο δεντροπλάτος. Αυτό, σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα της [83], συνεπάγεται ότι το $f(h)$ -σχεδόν εμβαπτίσιμο γράφημα $\overline{G}_i$ περιέχει σαν υπογράφημα την υποδιαίρεση W ενός «αρκετά μεγάλου» (αλλά ακόμα εξαρτώμενου γραμμικά από το k) τοίχου ο οποίος είναι εμβαπτισμένος ισόπεδα σε μία επιφάνεια, με την έννοια ότι η περίμετρός του είναι το σύνορο ενός δίσκου του οποίου το εσωτερικό, η περιφέρεια του W , περιέχει, μεταξύ άλλων τμημάτων του $\overline{G}_i$, το υπόλοιπο του W .

Το επόμενο, και περισσότερο τεχνικό, βήμα είναι να εξάγουμε από αυτή την «τοπική» δομή, η οποία αφορά το $\overline{G}_i$, έναν τοίχο και μία περιφερειακή διαίρεση της περιφέρειάς του στο γενικό γράφημα G . Για αυτό, θεωρούμε τα άλλα μέρη της δεντροαποσύνθεσης ως πτερύγια φραγμένου δεντροπλάτους τα οποία περιέχουν το πολύ τρεις μη-απόγειες κορυφές του $\overline{G}_i$.

Σε αυτό το σημείο, έπεται ότι η τρίτη δήλωση του Θεωρήματος 6.1 ισχύει για το ενισχυμένο γράφημα G' που προκύπτει από το G εάν προσθέσουμε όλες τις «εικονικές» ακμές οι οποίες είναι ακμές του $\overline{G}_i$ αλλά όχι του G_i . Η απόδειξη ολοκληρώνεται δείχνοντας ότι, ακόμα και αν η αφαίρεση αυτών των εικονικών ακμών βλάψει τμήματα του υποδιαφιρεμένου τοίχου W και της αντίστοιχης περιφερειακής διαίρεσης, τα τμήματα αυτά μπορούν να ανακατασκευαστούν από συλλογές μονοπατιών μέσα στα πτερύγια που είναι τώρα προσκολλημένα στην περιφέρεια του $\overline{G}_i$.

6.3 Ορισμένα Βοηθητικά Λήμματα

Τα βασικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας είναι τα Λήμματα 6.6 και 6.10 τα οποία χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του κεντρικού μας αποτελέσματος στην Ενότητα 6.4.

6.3.1 Ένα Λήμμα για το Αναλλοίωτο της Ισοπεδότητας

Πριν αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα αυτής της ενότητας χρειάζεται να διατυπώσουμε το ακόλουθο κλασικό αποτέλεσμα. (Δείτε, για παράδειγμα, την Πρόταση 1.7.2 στην [60].)

Πρόταση 6.2. Έστω ότι τα G, H είναι γραφήματα τέτοια ώστε $H \leq_m G$. Εάν $\Delta(H) \leq 3$, τότε $H \leq_{tm} G$.

Χρειαζόμαστε επίσης τον ακόλουθο ορισμό. Έστω το $G = G_0 \cup G^+$, όπου το G_0 είναι ένα γράφημα εμβαπτισμένο σε μια επιφάνεια Σ γένους Euler γ και έστω ότι το G^+ είναι ένα άλλο γράφημα το οποίο ίσως μοιράζεται κοινές κορυφές με το G_0 . Έστω επίσης ότι το H είναι ένα γράφημα και $v \in V(H)$. Λέμε ότι το G περιέχει το H σαν v -στρωτή σύνθλιψη (v -smooth contraction) εάν $H \leq_c^\phi G$ για κάποια $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$, και υπάρχει ένας κλειστός δίσκος D στην Σ τέτοιος ώστε οι κορυφές του G^+ βρίσκονται εκτός του D και όλες οι κορυφές του G οι οποίες είναι εκτός του D είναι ακριβώς το μοντέλο της v , δηλαδή, $\phi^{-1}(v) = V(G) \setminus (V(G) \cap D)$.

Λήμμα 6.3. Έστω ότι ο k είναι ένας θετικός ακέραιος και το G είναι ένα γράφημα το οποίο είναι h -σχεδόν εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους Euler γ χωρίς απόγειες κορυφές και περιέχει την $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$ σαν v -στρωτή σύνθλιψη, όπου v είναι η φορτωμένη γωνία της $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$. Τότε το G περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαμετρημένο τοίχο ύψους k του οποίου η περιφέρεια μπορεί να εμβαπτιστεί σε έναν κλειστό δίσκο Δ έτσι ώστε η περίμετρος του W να ταυτίζεται με το σύνορο του Δ .

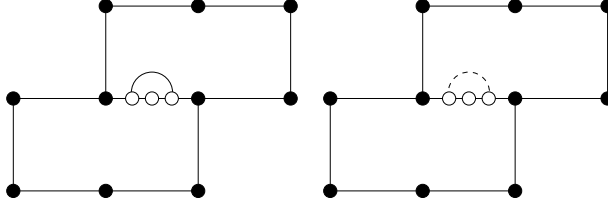
Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$ είναι μία v -στρωτή σύνθλιψη του G μέσω της ϕ , όπου v είναι η φορτωμένη κορυφή της $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι

$$V(\Gamma_{2 \cdot k + 8}) = \{1, \dots, 2 \cdot k + 8\}^2,$$

όπου $v = (2 \cdot k + 8, 2 \cdot k + 8)$. Έστω ότι το R είναι το σύνολο των εξωτερικών κορυφών της $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$ και έστω το $G' = G \setminus \bigcup_{x \in R} \phi^{-1}(x)$. Καθώς το G περιέχει την $\Gamma_{2 \cdot k + 8}$ σαν v -στρωτή σύνθλιψη και $v \in R$, έπεται ότι το G' είναι εμβαπτισμένο μέσα σε έναν ανοικτό δίσκο Δ' . Επιπλέον, το G' μπορεί να συνθλιβεί στο $\Gamma_{2 \cdot k + 6}^*$ μέσω του περιορισμού της ϕ στο $V(G')$. Από τον ορισμό του τοίχου, έπεται ότι το $\Gamma_{2 \cdot k + 6}^*$ περιέχει τον W_{k+2} σαν υπογράφημα. Αφού το G' περιέχει το $\Gamma_{2 \cdot k + 6}^*$ σαν ελάσσον, έπεται ότι το G' περιέχει τον W_{k+2} σαν ελάσσον. Επιπλέον, καθώς ο W_{k+2} έχει μέγιστο βαθμό 3, από την Πρόταση 6.2, είναι επίσης τοπολογικό ελάσσον του G' . Συνεπώς το G' περιέχει σαν υπογράφημα (εμβαπτισμένο στον Δ') έναν υποδιαιρεμένο τοίχο ύψους $k + 2$. Ανάμεσα σε όλους τους υποδιαιρεμένους τοίχους, έστω ότι ο W_{ex} είναι αυτός του οποίου η περιφέρεια έχει το ελάχιστο πλήθος όψεων μέσα στον δακτύλιο $\Phi = \Delta_{\text{ex}} \setminus \Delta \subseteq \Delta'$ όπου οι Δ_{ex} και Δ ορίζονται ως οι κλειστοί δίσκοι έτσι ώστε το σύνορο του Δ_{ex} είναι το πρώτο στρώμα του W_{ex} και το σύνορο του Δ είναι το δεύτερο.

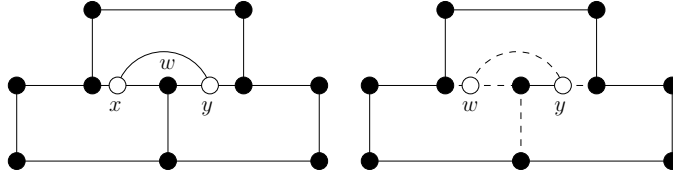
Έστω ότι ο W είναι ο υποδιαιρεμένος τοίχος του G' του οποίου η περίμετρος είναι το όριο του Δ . Εξ ορισμού, όλες οι κορυφές της περιφέρειας K του W είναι εντός του Δ . Υπολείπεται να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει για τις ακμές του K . Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η $\{x, y\}$ είναι μία ακμή εκτός του Δ . Εμφανώς, και η x και η y βρίσκονται στο σύνορο του Δ και η $\{x, y\}$ είναι εντός του δίσκου Δ^* που ορίζεται από κάποιο τούβλο του W_{ex} το οποίο είναι εντός του Φ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Οι $\{x, y\}$ βρίσκονται στο ίδιο τούβλο, έστω A του W . Τότε, υπάρχει ένα μονοπάτι αυτού του τούβλου το οποίο μπορεί να αντικατασταθεί στον W από την $\{x, y\}$ και έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον W από έναν νέο υποδιαιρεμένο τοίχο που αντιστοιχεί σε έναν δακτύλιο με λιγότερες όψεις, αντίφαση. (Δείτε, το Σχήμα 6.4.)



Σχήμα 6.4: Παράδειγμα της Περίπτωσης 1 στο Λήμμα 6.3.

Περίπτωση 2: Οι $\{x, y\}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο τούβλο του W . Τότε οι x και y θα πρέπει να ανήκουν σε γειτονικά τούβλα, έστω B και C αντίστοιχα. Έστω ότι το A είναι το μοναδικό τούβλο του W_{ex} που περιέχει τις x και y και έστω ότι η w είναι η μοναδική κοινή κορυφή των A, B και C . Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μονοπάτι P_B του B που συνδέει τις x και w και ένα μονοπάτι P_C του C που συνδέει τις y και w . Τότε, αντικαθιστούμε τον W από έναν νέο τοίχο ως εξής: Αντικαθιστούμε την w με την x , το P_C με την $\{x, y\}$, και θεωρούμε το P_B ως ένα υπομονοπάτι του κοινού μονοπατιού ανάμεσα στα B και C . (Δείτε το Σχήμα 6.5.)



Σχήμα 6.5: Παράδειγμα της Περίπτωσης 2 στο Λήμμα 6.3.

Ξανά, ο νέος τοίχος αντιστοιχεί σε έναν δακτύλιο με λιγότερες όψεις, αντίφαση. □

Λήμμα 6.4 ([83]). Υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε εάν το G είναι ένα γράφημα h -σχεδόν εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους

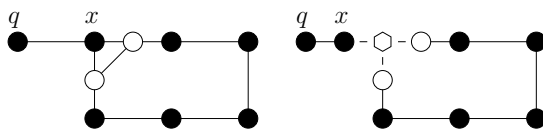
Euler γ χωρίς απόγειες κορυφές, όπου $\mathbf{tw}(G) \geq f(\gamma, h) \cdot k$, τότε το G περιέχει σαν v -στρωτή σύνθλιψη το γράφημα Γ_k με την φορτωμένη γωνία v .

Λήμμα 6.5. Έστω ότι h είναι ένας θετικός ακέραιος και το G είναι ένα γράφημα το οποίο περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαμεμένο τοίχο W ύψους h . Εάν το K_3 είναι υπογράφημα της περιφέρειας του W τότε εφαρμόζοντας έναν ΔY -μετασχηματισμό στο K_3 το προκύπτον γράφημα επίσης περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαμεμένο τοίχο W' ύψους h σαν υπογράφημα. Επιπλέον, ο W' είναι ισομορφικός με μια υποδιαίρεση του W .

Απόδειξη. Εξετάζουμε την μη-τετριμμένη περίπτωση όπου $E(K_3) \cap E(W) \neq \emptyset$. Ας παρατηρήσουμε ότι, καθώς ο W δεν περιέχει τρίγωνα, $|E(K_3) \cap E(W)| < 3$. Σε ότι ακολουθεί συμβολίζουμε με x, y, z τις κορυφές του K_3 , με w την κορυφή που εμφανίζεται μετά τον μετασχηματισμό, και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Τα K_3 και W έχουν ακριβώς μία κοινή ακμή, έστω την $\{x, y\}$. Καθώς η w είναι μία νέα κορυφή, το μονοπάτι (x, w, y) που εμφανίζεται μετά τον ΔY -μετασχηματισμό δεν έχει κοινές εσωτερικές κορυφές με τον W . Σε αυτή την περίπτωση, αντικαθιστούμε την ακμή $\{x, y\}$ στο W με τις ακμές $\{x, w\}, \{w, y\}$.

Περίπτωση 2. Τα K_3 και W έχουν ακριβώς δύο κοινές ακμές, έστω $\{x, y\}$ και $\{x, z\}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο υποπεριπτώσεις.

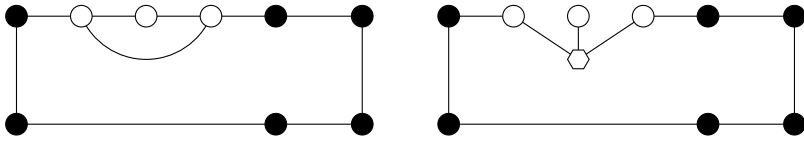


Σχήμα 6.6: Παράδειγμα της Υποπερίπτωσης 2.1 στο Λήμμα 6.5.

Υποπερίπτωση 2.1. Η x είναι πρωταρχική κορυφή και η x δεν είναι γωνία

του W . Έστω ότι η q είναι η τρίτη κορυφή στην γειτονιά της x . Παρατηρούμε ότι ο ΔY -μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με την αφαίρεση της ακμής $\{y, z\}$, η οποία δεν είναι ακμή του τοίχου, και την υποδιαίρεση της ακμής $\{x, q\}$. Τότε το λήμμα έπεται από την Παρατήρηση 6.2. (Δείτε το Σχήμα 6.6)

Υποπερίπτωση 2.2. Η x δεν είναι πρωταρχική κορυφή ή η x είναι γωνία. Τότε ο ΔY -μετασχηματισμός είναι ισοδύναμος με την αφαίρεση της ακμής $\{y, z\}$, η οποία δεν είναι ακμή του W , και κατόπιν με την αντικατάσταση της $\{y, x\}$ με την $\{y, w\}$ και της $\{x, z\}$ με την $\{w, z\}$. (Δείτε, το Σχήμα 6.7)



Σχήμα 6.7: Παράδειγμα της Υποπερίπτωσης 2.2 στο Λήμμα 6.5.

Ας παρατηρήσουμε ότι σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ο προκύπτων τοίχος W' παραμένει ισόπεδος και είναι ισομορφικός με μία υποδιαίρεση του W και το λήμμα έπεται. $\square$

Εφαρμόζοντας επαγωγικά την Παρατήρηση 6.2 και το Λήμμα 6.5 συνάγουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 6.6. Έστω ότι ο h είναι ένας θετικός ακέραιος και το G είναι ένα γράφημα που περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο W ύψους h σαν υπογράφημα. Εάν εφαρμόσουμε μία ακολουθία από υποδιαίρεσεις ή ΔY -μετασχηματισμούς στο G , τότε το προκύπτον γράφημα θα περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο W' ύψους h σαν υπογράφημα. Επιπλέον, ο W' είναι ισομορφικός με μία υποδιαίρεση του W .

6.3.2 Πυραμίδες και Δεντροπλάτος

Ας διατυπώσουμε πρώτα την επόμενη.

Πρόταση 6.3 ([197]). Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Εάν το H είναι ένα επίπεδο γράφημα με $|V(H)| + 2|E(H)| \leq n$, τότε το H είναι ισομορφικό με ένα ελάσσον της $2n \times 2n$ -σχάρας.

Συνδυάζοντας την Πρόταση 6.3 με τον τύπο του Euler για επίπεδα γραφήματα παίρνουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 6.7. Εάν το G είναι ένα επίπεδο γράφημα τότε το G είναι ισομορφικό με ένα ελάσσον της $(14 \cdot n(G) - 24) \times (14 \cdot n(G) - 24)$ -σχάρας.

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει το επόμενο.

Λήμμα 6.8. Έστω ότι ο h είναι ένας ακέραιος. Εάν το G είναι ένα h -απόγειο γράφημα τότε το G είναι ισομορφικό με ένα ελάσσον της $\Pi_{14 \cdot (n(G) - h) - 24, h}$.

Λήμμα 6.9. Εάν το G είναι ένα γράφημα το οποίο προκύπτει από μία $((k + \lceil \sqrt{h} \rceil) \times (k + \lceil \sqrt{h} \rceil))$ -σχάρα αφού κάνουμε τις κορυφές της γειτονικής με έναν σύνολο A που αποτελείται από h νέες κορυφές τότε το G περιέχει την $\Pi_{k, h}$ σαν ελάσσον.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με G' την σχάρα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του G και έστω G_1 και G_2 δύο ξένα υπογραφήματα του G' όπου το G_1 είναι ισομορφικό με την $(k \times k)$ -σχάρα και το G_2 είναι ισομορφικό με μία $(\alpha \times \alpha)$ -σχάρα όπου $\alpha = \lceil \sqrt{h} \rceil$. Αφαιρούμε από το G όλες τις κορυφές που δεν ανήκουν στο $A \cup V(G_1) \cup V(G_2)$. Τότε αφαιρούμε όλες τις ακμές του G' οι οποίες είναι προσπίπτουσες στο $V(G_2)$ και παρατηρούμε ότι, στο παραμένον γράφημα F , οι κορυφές στο $A \cup V(G_2)$ ενάγουν ένα γράφημα ισομορφικό του K_{h, α^2} το οποίο, με τη σειρά του, μπορεί να συνθλιβεί σε μία κλίκα στις κορυφές του A . Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνθλίψεις στο F κάποιος μπορεί να κατασκευάσει το $\Pi_{k, h}$ σαν ελάσσον του G . $\square$

Λήμμα 6.10. Έστω ότι τα G και H είναι γραφήματα τέτοια ώστε το H δεν είναι ελάσσον του G και υπάρχει ένα σύνολο $A \subseteq V(G)$ τέτοιο ώστε το $G \setminus A$ περιέχει έναν τοίχο W ύψους $g(h) \cdot (k+1) - 1$ σαν υπογράφημα, όπου $g(h) = 14 \cdot (h - \mathbf{an}(H)) + \lceil \sqrt{\mathbf{an}(H)} \rceil - 24$ και $h = \mathbf{n}(H)$. Εάν $|A| \geq \mathbf{an}(H)$ τότε υπάρχει ένα $A' \subseteq A$ τέτοιο ώστε το $G \setminus A'$ περιέχει έναν τοίχο $W' \subseteq W$ ύψους k σαν υπογράφημα με την ιδιότητα ότι εάν K' είναι η περιφέρεια του W' στο $G \setminus A'$ τότε $V(K') \cap (A \setminus A') = \emptyset$. Επιπλέον, $|A'| < |A|$.

Απόδειξη. Έστω το $A = \{\alpha_i \mid i \in [|A|]\}$ και έστω ότι η $P_{g(h)} = \{W_{(m,l)} \mid (m,l) \in [g(h)]^2\}$ είναι μία συλλογή από $(g(h))^2$ ξένους υποτοίχους $W_{(m,l)}$, $(m,l) \in [g(h)]^2$ του W με ύψος k . Για κάθε $(m,l) \in [g(h)]^2$, συμβολίζουμε με $K_{(m,l)}$ την περιφέρεια του $W_{(m,l)}$ στο $G \setminus A$ και έστω ότι $q_{(m,l)} = (q_{(m,l)}^1, q_{(m,l)}^2, \dots, q_{(m,l)}^{|A|})$ είναι το δυαδικό διάνυσμα όπου για κάθε $j \in |A|$,

$$q_{(m,l)}^j = \begin{cases} 1 & \text{εάν } \exists v \in V(K_{(m,l)}) : \{v, \alpha_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{εάν } \forall v \in V(K_{(m,l)}) : \{v, \alpha_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα $(m', l') \in [g(h)]^2$ τέτοιο ώστε $q_{(m', l')} \neq (1, 1, \dots, 1)$. Πράγματι, ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι για κάθε $(m, l) \in [g(h)]^2$, $q_{(m,l)} = (1, 1, \dots, 1)$. Θα καταλήξουμε σε αντίφαση δείχνοντας ότι το H είναι ελάσσον του G . Για αυτό, θεωρούμε το γράφημα

$$G' = G[V(W) \cup \bigcup_{(m,l) \in [g(h)]^2} V(K_{(m,l)})] \subseteq G.$$

Για κάθε $(m, l) \in [g(h)]^2$, συνθλίβουμε κάθε $K_{(m,l)}$ σε μία μοναδική κορυφή και αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη μιας $(g(h) \times g(h))$ -σχάρας σαν ελάσσον του G' και άρα του $G \setminus A$. Επιπλέον, για κάθε κορυφή v αυτής της σχάρας ισχύει ότι κάθε κορυφή στο A είναι γειτονική με κάποια κορυφή στο μοντέλο της v , άρα το G περιέχει το γράφημα J που προκύπτει αφού πάρουμε μία

$(g(h) \times g(h))$ -σχάρα και συνδέσουμε όλες τις κορυφές της με $\mathbf{an}(H)$ νέες κορυφές. Από το Λήμμα 6.9, το G περιέχει το $\Pi_{14 \cdot (n(h) - \mathbf{an}(H)) - 24, \mathbf{an}(H)}$ σαν ελάσσον. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 6.8, προκύπτει ότι το G περιέχει το H σαν ελάσσον, αντίφαση. Συνεπώς, υπάρχουν $(m', l') \in [g(h)]^2$ και $j_0 \in [|A|]$ τέτοια ώστε $q_{(m', l')}^{j_0} = 0$. Το λήμμα έπεται για $A' = A \setminus \{\alpha_{j_0}\}$ και $W' = W_{(m', l')}$. $\square$

6.4 Η Κεντρική Απόδειξη

6.4.1 Συμβολισμός

Παρακάτω, ορίζουμε τον συμβολισμό ο οποίος είναι χρήσιμος στην απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος.

Δοσμένης μιας δέντροαποσύνθεσης $\mathcal{T} = (\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in V(T)\}, T)$ ενός γραφήματος G , μιας κορυφής $i_0 \in V(T)$, και ενός συνόλου κορυφών $I \subseteq N_T(i_0)$, ορίζουμε το $\mathcal{T}_{i_0, I}$ ως την συλλογή των συνεκτικών συνιστωσών του $T \setminus i_0$ που περιέχουν κορυφές του I . Δοσμένου ενός υποδέντρου Y του T , ορίζουμε τα $G_Y = G[\cup_{i \in V(Y)} X_i]$ και $\overline{G}_Y = \cup_{i \in V(Y)} \overline{X}_i$.

Παρατήρηση 6.3. Δοσμένης μιας δέντροαποσύνθεσης $\mathcal{T} = (\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in V(T)\}, T)$ ενός γραφήματος G , μιας κορυφής $i_0 \in V(T)$, και ενός συνόλου κορυφών $I \subseteq N_T(i_0)$, ισχύει ότι για κάθε $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{i_0, I}$, το $\overline{G}_{T_1} \cap \overline{G}_{T_2}$ είναι ένα πλήρες γράφημα.

Δοσμένης μιας οικογένειας γραφημάτων $\mathcal{F}$, ενός γραφήματος G , και ενός συνόλου κορυφών $S \subseteq V(G)$, ορίζουμε την κλάση $\mathcal{F}_{S, G}^*$ ως την συλλογή των συνεκτικών συνιστωσών των γραφημάτων της $\mathcal{F} \setminus S$ και την κλάση $\mathcal{F}_{S, G}$ ως το σύνολο των γραφημάτων στην $\mathcal{F}_{S, G}^*$ που έχουν κάποια κοινή κορυφή με το $G \setminus S$. Λέμε ότι δύο γραφήματα $G_1, G_2 \in \mathcal{F}_{S, G}$ είναι G -ισοδύναμα εάν $V(G_1) \cap V(G \setminus S) = V(G_2) \cap V(G \setminus S)$ και έστω ότι οι $\mathcal{F}_{S, G}^1, \dots, \mathcal{F}_{S, G}^p$ είναι

οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{\mathcal{F},S,G} = \{\mathbf{UF}_{S,G}^1, \dots, \mathbf{UF}_{S,G}^p\}$, δηλαδή, για κάθε κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{F}_{S,G}^i$ κατασκευάζουμε ένα γράφημα στην $\mathcal{P}_{\mathcal{F},S,G}$, παίρνοντας την ένωση των γραφημάτων στην $\mathcal{F}_{S,G}^i$.

6.4.2 Απόδειξη του Κεντρικού Αποτελέσματος

Πριν αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο.

Παρατήρηση 6.4. Έστω ότι το T είναι ένα δέντρο, $k \in \mathbb{N}$, και η $w : V(T) \rightarrow \mathbb{N}$ είναι τέτοια ώστε υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή $v \in V(T)$ με $w(v) \geq k$. Υπάρχει μία κορυφή $u \in V(T)$ με $w(u) \geq k$ τέτοια ώστε το πολύ μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του $T \setminus u$ περιέχει μία κορυφή u' με $w(u') > k$.

Απόδειξη. Έστω το $Y = \{v \in V(T) \mid w(v) \geq k\}$. Επιλέγουμε μία κορυφή r του T και έστω ότι η v είναι μία κορυφή του Y με μέγιστη απόσταση από την r . Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι το λήμμα ισχύει για την v . $\square$

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην κεντρική απόδειξη αυτής της ενότητας.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα που αποκλείει το H σαν ελάχιστον. Από την Πρόταση 6.1, υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση f_1 τέτοια ώστε υπάρχει μία δεντροαποσύνθεση

$$\mathcal{T} = (\mathcal{X} = \{X_i \mid i \in V(T)\}, T)$$

του G , όπου για κάθε $i \in V(T)$, τα γραφήματα $\overline{X}_i$ είναι $f_1(h)$ -σχεδόν εμβαπτίσιμα σε μία επιφάνεια Σ γένους $f_1(h)$. Από όλες αυτές τις δεντροαποσυνθέσεις επιλέγουμε την $\mathcal{T} = (\mathcal{X}, T)$ έτσι ώστε:

- (i) Η $\mathcal{T}$ είναι μικρή.
- (ii) Δεδομένου του (i), η $\mathcal{T}$ έχει μέγιστο αριθμό κορυφών.
- (iii) Δεδομένου του (ii), η ποσότητα $\sum_{\substack{i,j \in V(T) \\ i \neq j}} |X_i \cap X_j|$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

Ας παρατηρήσουμε ότι, από το Λήμμα 6.2, η Συνθήκη (i) εγγυάται την δυνατότητα της επιλογής της Συνθήκης (ii). Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\overline{G}$ για να δηλώσουμε το γράφημα $\overline{G}_T$ και καλούμε τις ακμές του $E(\overline{G}) \setminus E(G)$ *εικονικές (virtual)*.

Έστω η $w : V(T) \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $w(i) = \mathbf{tw}(\overline{X}_i)$. Η Παρατήρηση 6.4 και η Παρατήρηση 6.1 συνεπάγονται ότι υπάρχει μία κορυφή $i_0 \in V(T)$ τέτοια ώστε $\mathbf{tw}(\overline{X}_{i_0}) \geq \mathbf{tw}(G)$ και το πολύ μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του $T \setminus i_0$ περιέχει μία κορυφή j με $w(j) > w(i_0)$. Συμβολίζουμε με A_{i_0} το σύνολο των απόγειων κορυφών του $\overline{X}_{i_0}$ και με F το γράφημα $\overline{X}_{i_0} \setminus A_{i_0}$ (σημειώνουμε ότι $F \subseteq \overline{G}$ αλλά το F δεν είναι απαραίτητα υπογράφημα του G αφού το F μπορεί να περιέχει εικονικές ακμές).

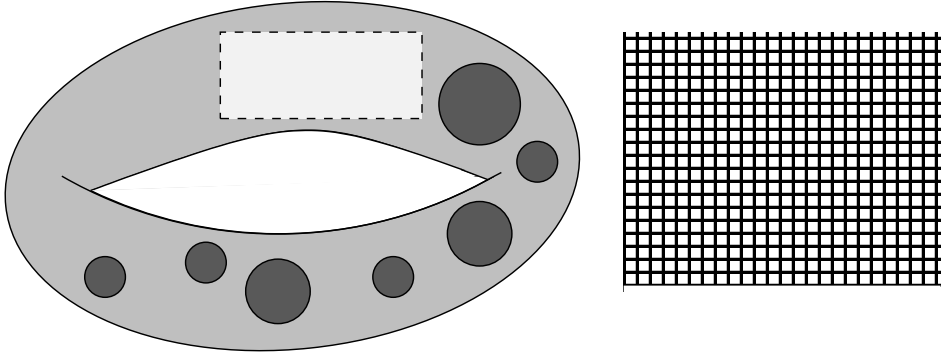
Από το Λήμμα 6.1 και την επιλογή της i_0 , ισχύει ότι

$$\mathbf{tw}(F) = \mathbf{tw}(\overline{X}_{i_0} \setminus A_{i_0}) \geq \mathbf{tw}(\overline{X}_{i_0}) - |A_{i_0}| \geq \mathbf{tw}(G) - |A_{i_0}|. \quad (6.1)$$

Ας θυμηθούμε ότι $|A_{i_0}| \leq f_1(h)$. Έστω ότι η f_2 είναι η συνάρτηση δύο μεταβλητών του Λήμματος 6.4. Ορίζουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών f_3 και τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής f_4 και f_5 έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f_5(h) &= 14 \cdot (h - \mathbf{an}(H)) + \lceil \sqrt{\mathbf{an}(H)} \rceil - 24 \\ f_4(h) &= f_5(h)^{|A_{i_0}| - \mathbf{an}(H) + 1} \\ f_3(h, k) &= f_2(f_1(h), f_1(h)) \cdot (4k \cdot f_4(h) + 12) + f_1(h) \end{aligned}$$

Καθώς το F είναι $f_1(h)$ -σχεδόν εμβαπτίσιμο στην Σ και δεν περιέχει απόγειες κορυφές, από την (6.1) και το Λήμμα 6.4, έχουμε ότι εάν $\mathbf{tw}(G) \geq f_3(h, k)$ τότε το F περιέχει το γράφημα $Q = \Gamma_{4k \cdot f_4(h) + 12}$ σαν v -στρωτή σύνθλιψη, όπου v είναι η φορτωμένη γωνία του Q . (Δείτε το Σχήμα 6.8.)



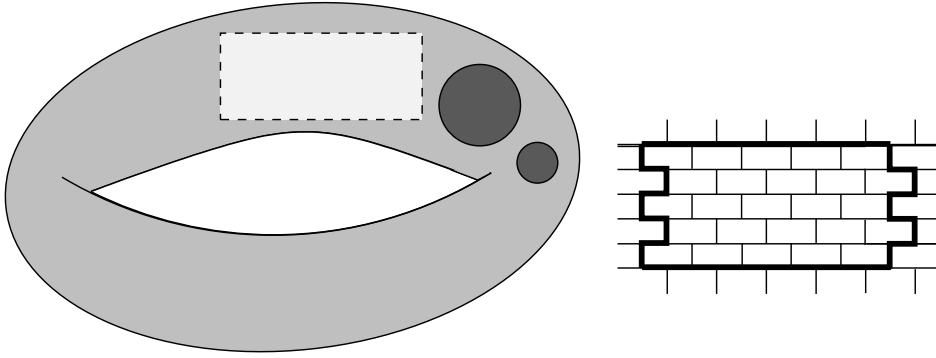
Σχήμα 6.8: Στα αριστερά: Το γράφημα F σχεδόν εμβαπτισμένο στην Σ (χωρίς απόγειες κορυφές), όπου το διακεκομμένο παραλληλόγραμμο αναπαριστά τον δίσκο της v -στρωτής σύνθλιψης. Στα δεξιά: Το περιεχόμενο του δίσκου.

Από το Λήμμα 6.3, έπεται ότι το F περιέχει σαν υπογράφημα έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο W' ύψους $2k \cdot f_4(h) + 2$ του οποίου η περιφέρεια K' στο F μπορεί να εμβαπτιστεί σε έναν κλειστό δίσκο Δ έτσι ώστε η περίμετρος του W' να ταυτίζεται με το σύνορο του Δ . Επιπλέον, ας παρατηρήσουμε εδώ ότι, ο W' βρίσκεται εντός του ίδιου δίσκου όπου η αντίστροφη εικόνα των κορυφών της v -στρωτής σύνθλιψης ήταν εμβαπτισμένη. (Δείτε το Σχήμα 6.9.)

Έστω το

$$I' = \{i \in N_T(i_0) \mid X_i \cap V(K') \neq \emptyset\}.$$

Με άλλα λόγια, το I' αντιστοιχεί σε όλες τις κορυφές της δεντροαποσύνθεσης $\mathcal{T}$, γειτονικές της i_0 , οι οποίες έχουν κορυφές «εντός» της περιφέρειας του



Σχήμα 6.9: Στα αριστερά: Το γράφημα F σχεδόν εμβαπτισμένο στην Σ (χωρίς απόγειες κορυφές), όπου το διακεκομμένο παραλληλόγραμμο αναπαριστά την περίμετρο του τοίχου. Στα δεξιά: Μέρος του περιεχομένου του δίσκου.

υποδιαιρεμένου δίσκου W' στο F (το διακεκομμένο παραλληλόγραμμο στο Σχήμα 6.9).

Ισχυρισμός 9. Για κάθε $i \in I'$, $|V(K') \cap X_i| \leq 3$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 9. Καθώς το K' είναι προφανώς επίπεδο, κάθε κλίκα στο K' έχει μέγεθος το πολύ 4. Επιπλέον, το K' δεν περιέχει το K_4 σαν υπογράφημα.

Πράγματι, εάν ναι τότε ένα από τα τρίγωνα της κλίκας θα ήταν διαχωριστής του G . Συμβολίζουμε τις κορυφές αυτού του τριγώνου με z_1 , z_2 , και z_3 . Έστω τότε ότι η z είναι η κορυφή της κλίκας η οποία είναι διαφορετική των z_1 , z_2 , και z_3 , και ότι το S είναι το σύνολο των κορυφών που περιέχονται στο εσωτερικό του δίσκου που ορίζεται από το διαχωριστικό τρίγωνο, όπου $z \in S$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία κορυφή $j \in I'$ που περιέχει όλες τις κορυφές της κλίκας, δηλαδή, $\{z, z_1, z_2, z_3\} \subseteq X_j$. Πράγματι, προς

αντίφαση, ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια κορυφή. Τότε, μπορούμε να τροποποιήσουμε την $\mathcal{T}$ ώστε να κατασκευάσουμε μία μικρή δεντροαποσύνθεση $\mathcal{T}'$ με περισσότερες τσάντες από την $\mathcal{T}$ με τον ακόλουθο τρόπο.

Προσθέτουμε μία καινούρια κορυφή j_0 στο T , και μία νέα τσάντα X_{j_0} η οποία περιέχει όλες τις κορυφές τις κλίκας, τις κορυφές που περιέχονται στο εσωτερικό του διαχωριστικού τριγώνου της κλίκας, και όλες τις απόγειες κορυφές του X_{i_0} , δηλαδή, $X_{j_0} = \{z_1, z_2, z_3\} \cup S \cup A_{i_0}$. Αφαιρούμε τότε το S από την X_{i_0} . Τέλος, προσθέτουμε την ακμή $\{i_0, j_0\}$, αφαιρούμε όλες τις ακμές ανάμεσα στους γείτονες $i \in I'$ της i_0 στο T , των οποίων οι κοινές κορυφές με την X_{i_0} είναι είτε απόγειες είτε κορυφές του S και της κλίκας, και τις κάνουμε γειτονικές με την j_0 . Τυπικά, έστω $\mathcal{T}' = (\mathcal{Y}, T')$ με

$$V(T') = V(T) \cup \{j_0\}, \text{ όπου } j_0 \notin V(T),$$

$$E(T') = (E(T) \setminus \{\{i, i_0\} \mid i \in N_T(i_0)\})$$

$$\wedge (X_i \cap X_{i_0}) \subseteq S \cup \{z_1, z_2, z_3\} \cup A_{i_0}) \cup$$

$$\{\{i, j_0\} \mid i \in N_T(i_0)\}$$

$$\wedge (X_i \cap X_{i_0}) \subseteq S \cup \{z_1, z_2, z_3\} \cup A_{i_0}) \cup$$

$$\{i_0, j_0\}, \text{ και}$$

$$\mathcal{Y} = \{X_i \mid i \in V(T) \setminus \{i_0\}\} \cup \{Y_{i_0}, Y_{j_0}\},$$

όπου $Y_{i_0} = X_{i_0} \setminus S$ και $Y_{j_0} = \{z_1, z_2, z_3\} \cup S \cup A_{i_0}$. Ας παρατηρήσουμε ότι, αφού οι z_1, z_2 , και z_3 ενάγουν ένα διαχωριστικό τρίγωνο στο K' , δεν υπάρχει $i \in V(T)$ τέτοιο ώστε $X_i \cap \{z_1, z_2, z_3\} \neq \emptyset$ και $X_i \cap [V(K') \setminus (S \cup \{z_1, z_2, z_3\})] \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\mathcal{T}'$ είναι όντως δεντροαποσύνθεση. Είναι επίσης εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι η $\mathcal{T}'$ είναι μικρή. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ούτε $Y_{i_0} \subseteq Y_{j_0}$ ούτε $Y_{j_0} \subseteq Y_{i_0}$. Επιπλέον, για κάθε $i \in V(T) \setminus \{i_0\}$, ούτε $X_i \subseteq Y_{j_0}$ ούτε $X_i \subseteq Y_{i_0}$, καθώς αυτό θα σήμαινε ότι $X_i \subseteq X_{i_0}$, το οποίο είναι αντίφαση στο γεγονός ότι η $\mathcal{T}$ είναι

μικρή. Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι, εάν υπάρχει μία $i \in V(T) \setminus \{i_0\}$ τέτοια ώστε $Y_{j_0} \subseteq X_i$ τότε $\{z, z_1, z_2, z_3\} \subseteq Y_{j_0} \subseteq X_i$, αντίφαση στην υπόθεση καθώς τότε από τον ορισμό μιας δεντροαποσύνθεσης θα υπήρχε μία κορυφή $j \in I'$ τέτοια ώστε η X_j να περιέχει όλες τις κορυφές της κλίμας.

Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι για κάθε $i \in V(T) \setminus \{i_0\}$, $Y_{i_0} \not\subseteq X_i$. Άρα, η $\mathcal{T}'$ αντιφάσκει στην επιλογή της $\mathcal{T}$ (Συνθήκη (ii)). Συνεπώς, υπάρχει μία κορυφή $j \in I'$, έστω j_0 , τέτοια ώστε $\{z, z_1, z_2, z_3\} \subseteq X_{j_0}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $\mathcal{T}$ δεν ικανοποιεί την Συνθήκη (iii). Παρόμοια, όπως παραπάνω, μετατρέπουμε την $\mathcal{T}$ σε μία δεντροαποσύνθεση $\mathcal{T}''$ με τον ακόλουθο τρόπο. Αφαιρούμε το S από την X_{i_0} και το προσθέτουμε στην X_{j_0} . Τότε, αφαιρούμε όλες τις ακμές ανάμεσα στους γείτονες $i \in I' \setminus j_0$ της i_0 στο T , των οποίων οι κοινές κορυφές με την X_{i_0} είναι είτε απόγειες είτε κορυφές του S και της κλίμας, και τις κάνουμε γειτονικές με την j_0 .

Τυπικά, έστω ότι η $\mathcal{T}'' = (\mathcal{Z}, T'')$ είναι η δεντροαποσύνθεση του G με

$$V(T'') = V(T),$$

$$E(T'') = (E(T) \setminus \{\{i, i_0\} \mid i \in (N_T(i_0) \setminus \{j_0\})$$

$$\wedge (X_i \cap X_{i_0}) \subseteq S \cup \{z_1, z_2, z_3\} \cup A_{i_0}\} \cup$$

$$\{\{i, j_0\} \mid i \in N_T(i_0)$$

$$\wedge (X_i \cap X_{i_0}) \subseteq S \cup \{z_1, z_2, z_3\} \cup A_{i_0}\}, \text{ και}$$

$$\mathcal{Z} = \{X_i \mid i \in V(T) \setminus \{i_0, j_0\}\} \cup \{Z_{i_0}, Z_{j_0}\},$$

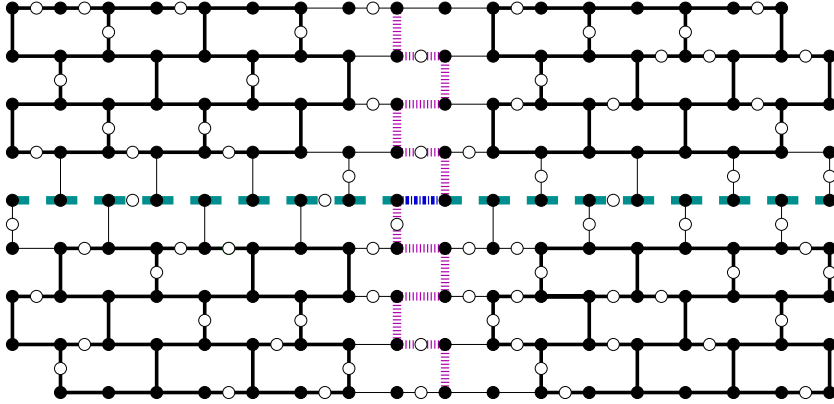
όπου $Z_{i_0} = X_{i_0} \setminus S$ και $Z_{j_0} = X_{j_0} \cup S$. Είναι πάλι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{T}''$ είναι μία μικρή δεντροαποσύνθεση του G . Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι οι $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}''$ έχουν το ίδιο πλήθος τσαντών. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sum_{\substack{D, D' \in \mathcal{Z} \\ D \neq D'}} |D \cap D'| < \sum_{\substack{L, L' \in \mathcal{X} \\ L \neq L'}} |L \cap L'|,$$

αντίφαση στην επιλογή της $\mathcal{T}$ (Συνθήκη (iii)). Συνεπώς, το K' δεν περιέχει καμμία κλίκαας μεγέθους 4.

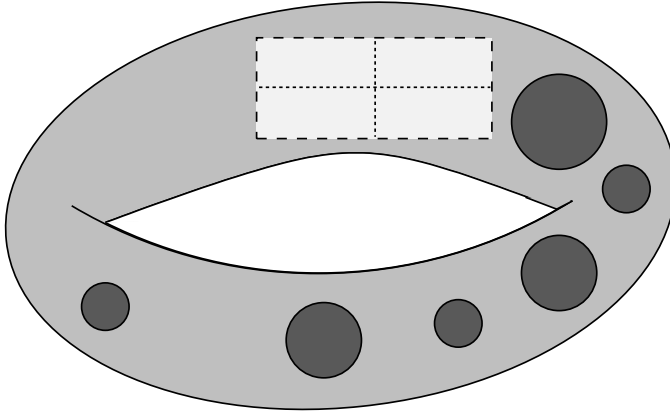
Τελικά, θυμόμαστε ότι, για κάθε $i \in \mathcal{I}'$, το $F[V(K') \cap X_i] \subseteq K'$ είναι κλίκα. Άρα, για κάθε $i \in \mathcal{I}'$, $|V(K') \cap X_i| \leq 3$. $\square$

Ας θυμηθούμε τώρα ότι η $\mathcal{T}_{i_0, I'}$ είναι μία συλλογή από συνεκτικές συνιστώσες του $\mathcal{T} \setminus i_0$ οι οποίες περιέχουν κορυφές του I' και ας θυμηθούμε επίσης ότι υπάρχει το πολύ ένα δέντρο στην $\mathcal{T}_{i_0, I'}$, έστω το T' , το οποίο περιέχει μία κορυφή i_1 με $w(i_1) > w(i_0)$. Έστω ότι η $\mathcal{W}' = \{W'_1, W'_2, W'_3, W'_4\}$ είναι η συλλογή των ξένων ως προς κορυφές υποτοιχών του W' ύψους $f_4(h) \cdot k$ που δεν συναντάνε τις κορυφές $P_{k \cdot f_4(h)+2}^{(h)}$ και $P_{k \cdot f_4(h)+2}^{[v]}$ (δείτε το Σχήμα 6.10).



Σχήμα 6.10: Τα μονοπάτια $P_{k \cdot f_4(h)+2}^{(h)}$ (κυανό - διακεκομμένο με παύλες) και $P_{k \cdot f_4(h)+2}^{[v]}$ (μοβ - διακεκομμένο με τελείες) και οι αντίστοιχοι τοίχοι για $k = 1$ και $f_4(h) = 3$.

Από τον Ισχυρισμό 9, η X_{i_1} έχει το πολύ 3 κοινές κορυφές με το K' , συνεπώς υπάρχει ένας υποτοιχος $\tilde{W} \in \mathcal{W}'$ ύψους $f_4(h) \cdot k$, με περιφέρεια $\tilde{K}$ στο F τέτοια ώστε $V(\tilde{K}) \cap V(G_{T'}) = \emptyset$. (Για την «γενική εικόνα», δείτε το Σχήμα 6.11.)



Σχήμα 6.11: Η περιφέρεια $\tilde{K}$ του τοίχου $\tilde{W}$ βρίσκεται εντός ενός εκ των τεσσάρων παραλληλογράμμων που ανήκουν στο εσωτερικό του διακεκομμένου παραλληλογράμμου.

Κατά συνέπεια, εάν θέσουμε

$$\tilde{I} = \{i \in N_T(i_0) \mid X_i \cap V(\tilde{K}) \neq \emptyset\}$$

έχουμε ότι $\tilde{I} \subseteq I' \setminus \{i_1\}$ και για κάθε δέντρο $\tilde{T} \in \mathcal{T}_{i_0, \tilde{I}} \subseteq \mathcal{T}_{i_0, I'} \setminus \{T'\}$ ισχύει ότι $\max\{w(i) \mid i \in V(\tilde{T})\} \leq f_3(h, k)$. Συνεπώς, για κάθε $\tilde{T} \in \mathcal{T}_{i_0, \tilde{I}}$, $\mathbf{tw}(\overline{G}_{\tilde{T}}) \leq f_3(h, k)$. Καθώς το $G_{\tilde{T}}$ είναι υπογράφημα του $\overline{G}_{\tilde{T}}$, έπεται ότι

$$\text{για κάθε } \tilde{T} \in \mathcal{T}_{i_0, \tilde{I}}, \quad \mathbf{tw}(G_{\tilde{T}}) \leq f_3(h, k). \quad (6.2)$$

Από τον Ισχυρισμό 9, έπεται ότι για κάθε $\tilde{T} \in \mathcal{T}_{i_0, \tilde{I}}$, οι κορυφές στο $V(G_{\tilde{T}}) \cap V(\tilde{K})$ ενάγουν κλίκα στο $\tilde{K}$ με το πολύ 3 κορυφές, όπου κάποιες από τις ακμές μπορεί να είναι εικονικές.

Έστω το $\tilde{V} = V(F) \setminus V(\tilde{K})$ και η $\mathcal{F}' = \{G_{\tilde{T}} \mid \tilde{T} \in \mathcal{T}_{i_0, \tilde{I}}\}$. Παρατηρούμε ότι $\tilde{K} = F \setminus \tilde{V}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}$ την κλάση $\mathcal{P}_{\mathcal{F}', \tilde{V}, F}$. Στόχος μας τώρα

είναι να χρησιμοποιήσουμε τα γραφήματα στην $\mathcal{F}$ ώστε να ορίσουμε την περιφέρεια του $\tilde{W}$ στο γράφημα $\bar{G} \setminus A_{i_0}$ και να κατασκευάσουμε μια περιφερειακή διαίρεση αυτής της περιφέρειας.

Ισχυρισμός 10. Για κάθε συνεκτική συνιστώσα Y του $T \setminus \{i_0\}$ η οποία περιέχει μία κορυφή i_Y του $\tilde{I}$, υπάρχει μία κορυφή στο $G_Y \setminus X_{i_0}$ συνδεδεμένη με το $V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)$ με $|V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)|$ ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια των οποίων οι εσωτερικές κορυφές ανήκουν στο $G_Y \setminus X_{i_0}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 10. Πρώτα, παρατηρούμε ότι, το G_Y έχει τουλάχιστον μία συνεκτική συνιστώσα G'_Y η οποία περιέχει τις κορυφές στο $V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)$ και τέτοια ώστε $V(G'_Y) \setminus X_{i_0} \neq \emptyset$. Διαφορετικά, ας παρατηρήσουμε ότι μπορούμε με ασφάλεια να αφαιρέσουμε τις κορυφές του $V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)$ από τις τσάντες X_i , $i \in V(Y)$, και να καταλήξουμε σε αντίφαση της επιλογής της $\mathcal{T}$ (Συνθήκη (iii)). Επιπλέον, η Συνθήκη (ii) συνεπάγεται ότι η X_{i_0} δεν είναι διαχωριστής του G'_Y . Ας παρατηρήσουμε τότε ότι κάθε κορυφή στο $V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)$ έχει έναν γείτονα στο $G'_Y \setminus X_{i_0}$, αφού εάν όχι, θα καταλήγαμε πάλι σε αντίφαση στην επιλογή της $\mathcal{T}$ (Συνθήκη (iii)). Καθώς το G'_Y είναι συνεκτικό υπάρχει μία κορυφή $v \in V(G'_Y) \setminus X_{i_0}$ και ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την v στις κορυφές του $V(\tilde{K}) \cap V(G_Y)$. $\square$

Καλούμε τις ακμές στο $\tilde{E} = E(\tilde{K}) \setminus E(G)$ *άχρηστες* (*useless*). Καλούμε επίσης όλες τις κορυφές στο $V(\mathbf{UF}) \setminus V(\tilde{K})$ *ιπτάμενες* (*flying*) κορυφές. Οι μη-ιπτάμενες κορυφές ενός γραφήματος R στην $\mathcal{F}$ είναι η βάση του R . Ας παρατηρήσουμε ότι, από τον ορισμό της $\mathcal{F}$, κάθε γράφημα R στην $\mathcal{F}$ είναι υπογράφημα της ένωσης κάποιων γραφημάτων του $\mathcal{F}'$. Από την Παρατήρηση 6.3 και την (6.2), έπεται ότι

(α) όλα τα γραφήματα στην $\mathcal{F}$ έχουν δεντροπλάτος το πολύ $f_3(h, k)$.

Από την Παρατήρηση 6.3 και τον Ισχυρισμό 9 αντλούμε ότι

- (β) οι κορυφές της βάσης κάθε R ενάγουν μια κλίκα μεγέθους 1, 2, ή 3 στο $\tilde{K}$.

Επίσης, από τον Ισχυρισμό 10 και το γεγονός ότι $\tilde{V} \cup A_{i_0} \subseteq X_{i_0}$, έχουμε ότι

- (γ) κάθε ζεύγος κορυφών κάποιου γραφήματος στην $\mathcal{F}$ συνδέονται στο G από ένα μονοπάτι του οποίου οι εσωτερικές κορυφές είναι ιπτάμενες.

Σημειώνουμε ότι κάθε κλίκα που αναφέρεται στο (β) μπορεί να περιέχει άχρηστες ακμές. Επιπλέον, από το (γ), όλες οι εικονικές ακμές του $\tilde{K}$ είναι ακμές μιας τέτοιας κλίκας. Έστω το $\tilde{G} = (V(G), \tilde{E} \cup E(G))$, δηλαδή, προσθέτουμε στο G όλες τις άχρηστες ακμές.

Έπεται τότε ότι το $\tilde{G} \setminus A_{i_0}$ περιέχει τον τοίχο $\tilde{W}$ σαν υπογράφημα και η περιφέρεια του $\tilde{W}$ στο $\tilde{G} \setminus A_{i_0}$ είναι η

$$\tilde{K}^+ = \tilde{K} \cup \bigcup_{R \in \mathcal{F}} R$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι ο τοίχος $\tilde{W}$ παραμένει ισόπεδος στο $\tilde{G}$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι τα Q_1 και Q_2 είναι δύο ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια ανάμεσα στις δύο αντιδιαμετρικές γωνίες του $\tilde{W}$ τέτοια ώστε το άθροισμα των μηκών τους είναι ελαχιστικό. Αφού δεν γίνεται αμφότερα τα Q_1 και Q_2 να υπάρχουν στο $\tilde{K}$, κάποιο από αυτά, έστω το Q_1 περιέχει κάποια ιπτάμενη κορυφή. Έστω ότι το R είναι το γράφημα στην $\mathcal{F}$ που περιέχει αυτή την κορυφή. Τότε υπάρχουν δύο κορυφές x και y στη βάση του R οι οποίες συναντώνται από το Q_1 . Από το (β), η $\{x, y\}$ είναι ακμή του $\tilde{K}^+$ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε το τμήμα του Q_1 που περιέχει ιπτάμενες κορυφές από την $\{x, y\}$, αντίφαση στην ελαχιστικότητα της επιλογής των Q_1 και Q_2 .

Έστω το $\tilde{E}^+ = E(\tilde{K}^+) \setminus E(\mathbf{U}\mathcal{F})$, δηλαδή, το $\tilde{E}^+$ είναι το σύνολο των ακμών του $\tilde{K}$ που δεν περιέχονται σε κανένα γράφημα R της $\mathcal{F}$. Έπεται ότι όλες οι άχρηστες ακμές περιέχονται στο $\tilde{E}^+$, δηλαδή,

$$\tilde{E} \subseteq \tilde{E}^+. \quad (6.3)$$

Για κάθε $e \in \tilde{E}^+$, συμβολίζουμε με $\tilde{G}_e$ το γράφημα που σχηματίζεται από την ακμή e (δηλαδή, το γράφημα $\tilde{G}[e]$) και έστω η $\mathcal{E} = \{\tilde{G}_e \mid e \in \tilde{E}^+\}$. Θέτουμε $\tilde{\mathcal{D}}^+ = \mathcal{F} \cup \mathcal{E}$. Ας προσέξουμε ότι,

$$\text{Για κάθε γράφημα } R \in \mathcal{F}, \quad \partial_{\tilde{K}^+} R \text{ είναι η βάση του } R. \quad (6.4)$$

$$\text{Για κάθε γράφημα } \tilde{G}_e \in \mathcal{E}, \quad \partial_{\tilde{K}^+} \tilde{G}_e = V(\tilde{G}_e). \quad (6.5)$$

Ισχυρισμός 11. Η $\tilde{\mathcal{D}}^+ = \mathcal{F} \cup \mathcal{E}$ είναι μία περιφερειακή διαίρεση του $\tilde{K}^+$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 11. Οι Ιδιότητες 1 και 2 έπονται από την κατασκευή των γραφημάτων στις $\mathcal{F}$ και $\mathcal{E}$. Επιπλέον, οι Ιδιότητες 3 και 4 έπονται από τα (γ) και (β) αντίστοιχα. Για την Ιδιότητα 5, ας θυμηθούμε ότι ο $\tilde{W}$ είναι υποτοίχος του W' του οποίου η περιφέρεια K' στο F μπορεί να εμβαπτιστεί σε έναν κλειστό δίσκο Δ τέτοιον ώστε η περίμετρος του W' να ταυτίζεται με το σύνορό του. Αυτό έπεται ότι η $\tilde{K}$ μπορεί να εμβαπτιστεί σε έναν κλειστό δίσκο $\tilde{\Delta} \subseteq \Delta$ έτσι ώστε οι γωνίες c_1, c_2, c_3 , και c_4 του $\tilde{W}$ να εμφανίζονται με αυτήν τη σειρά στο σύνορό του. Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο υπεργράφημα:

$$\tilde{H}^+ = (\mathbf{U}\{\partial_{\tilde{K}^+} D \mid D \in \tilde{\mathcal{D}}^+\}, \{\partial_{\tilde{K}^+} D \mid D \in \tilde{\mathcal{D}}^+\}).$$

Προσέχουμε ότι $V(\tilde{H}^+) = V(\tilde{K})$. Μπορούμε τότε να κατασκευάσουμε το $I(\tilde{H}^+)$ εφαρμόζοντας, για κάθε $D \in \tilde{\mathcal{D}}^+$, τους ακόλουθους μετασχηματισμούς στο επίπεδο γράφημα $\tilde{K}$.

- Εάν $|\partial_{\tilde{K}^+} D| = 1$, προσθέτουμε μία καινούρια κορυφή και μία ακμή που τη συνδέει με την μοναδική κορυφή του $\partial_{\tilde{K}^+} D$.

- Εάν $|\partial_{\tilde{K}^+} D| = 2$, υποδιαιρούμε την ακμή του $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} D]$ (ας θυμηθούμε ότι το $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} D]$ είναι ισομορφικό με το K_2).
- Εάν $|\partial_{\tilde{K}^+} D| = 3$, εφαρμόζουμε έναν ΔY -μετασχηματισμό στο $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} D]$ (ας θυμηθούμε ότι το $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} D]$ είναι ισομορφικό με το K_3).

Από την Παρατήρηση 6.2 και το Λήμμα 6.5, έπεται ότι το προκύπτον γράφημα παραμένει εμβαπτισμένο στον $\tilde{\Delta}$ (άρα, είναι επίσης επίπεδο). Παραμένει να αποδείξουμε ότι για κάθε $e \in E(\tilde{H}^+)$ υπάρχουν $|e|$ ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια ανάμεσα στα e και C στο $\tilde{K}^+$. Παρατηρούμε εδώ ότι για κάθε $e \in E(H^+)$ οι κορυφές της e ανήκουν στο $\tilde{K}$. Τέλος, υπάρχουν $|e|$ μονοπάτια ανάμεσα στα e και C , διαφορετικά θα είχαμε αντίφαση στην επιλογή της δέντροαποσύνθεσης. Για αυτό, ας παρατηρήσουμε ότι εάν δεν υπάρχουν $|e|$ ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια ανάμεσα στα e και C τότε υπάρχει ένας διαχωριστής των e και C μεγέθους αυστηρά μικρότερου από $|e|$. Τότε, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του Ισχυρισμού 9 και του Ισχυρισμού 10, καταλήγουμε σε αντίφαση της επιλογής της $\mathcal{T}$. Συνεπώς όλες οι συνθήκες που απαιτούνται για να αληθεύει ο Ισχυρισμός 11 ισχύουν. $\square$

Σκοπός μας τώρα είναι να βρούμε στο $G \setminus A_{i_0}$ έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο $\widehat{W}$ ύψους $f_4(h) \cdot k$. Από τα (β), (γ), και (6.4), όλες οι άχρηστες ακμές του $\tilde{K}$ ενάγονται από τα σύνολα $\partial_{\tilde{K}^+} R$, $R \in \mathcal{F}$, όπου τα $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} R]$ είναι ισομορφικά είτε με το K_2 είτε με το K_3 . Το επόμενο μας βήμα είναι να αποδείξουμε ότι, και στις δύο περιπτώσεις, μπορούμε να βρούμε έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο στο $G \setminus A_{i_0}$ ύψους $f_4(h) \cdot k$ ο οποίος δεν περιέχει καθόλου άχρηστες ακμές.

Περίπτωση 1. Το $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+} R]$ είναι ισομορφικό με το K_2 . Τότε, από το (γ), υπάρχει ένα μονοπάτι στο R του οποίου τα άκρα είναι οι κορυφές στο $\partial_{\tilde{K}^+} R$ και τέτοιο ώστε οι εσωτερικές του κορυφές είναι ιπτάμενες.

Περίπτωση 2. Το $\tilde{K}[\partial_{\tilde{K}^+}R]$ είναι ισομορφικό με το K_3 . Ο Ισχυρισμός 10, συνδυασμένος με τα γεγονότα ότι $\tilde{V} \cup A_{i_0} \subseteq X_{i_0}$ και ότι $\forall R \in \mathcal{F} \ \partial_{\tilde{K}^+}R \subseteq X_{i_0}$, συνεπάγονται ότι υπάρχει μία ιπτάμενη κορυφή v_R στο R και ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια ανάμεσα στην v_R και τις κορυφές του $\partial_{\tilde{K}^+}R$ των οποίων οι εσωτερικές κορυφές είναι επίσης ιπτάμενες.

Η παραπάνω ανάλυση περιπτώσεων συνεπάγεται ότι για κάθε $R \in \mathcal{F}$ η ακμή $\{x, y\}$ ή το τρίγωνο με κορυφές $\{x, y, z\}$, που ενάγεται από τα $\partial_{\tilde{K}^+}R$ μπορεί να αντικατασταθεί, χρησιμοποιώντας υποδιαίρεσεις ή ΔY -μετασχηματισμούς από ένα ιπτάμενο μονοπάτι ανάμεσα στις x και y ή από τρία ιπτάμενα μονοπάτια από μία ιπτάμενη κορυφή v_R στις x, y , και z αντίστοιχα. Καθώς όλες οι ακμές αυτών των μονοπατιών είναι ιπτάμενες, δεν μπορούν να είναι άχρηστες και συνεπώς υπάρχουν επίσης στο $G \setminus A_{i_0}$. Είμαστε τώρα σε θέση να εφαρμόσουμε την Παρατήρηση 6.2 και το Λήμμα 6.6 και να διασφαλίσουμε ότι το $\tilde{G} \setminus A_{i_0}$ περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο $\widehat{W}$ ύψους $f_4(h) \cdot k$ τέτοιον ώστε

(I) $E(\widehat{W}) \cap \tilde{E} = \emptyset$ (ας θυμηθούμε ότι το $\tilde{E}$ είναι το σύνολο όλων των άχρηστων ακμών) και

(II) ο $\widehat{W}$ είναι ισομορφικός με μια υποδιαίρεση του $\tilde{W}$.

Συνεπώς, από το (I), ο $\widehat{W}$ είναι ένας ισόπεδος υποδιαιρεμένος τοίχος ύψους $f_4(h) \cdot k$ στο $G \setminus A_{i_0}$.

Έστω ότι τα $\tilde{C}$ και $\hat{C}$ είναι τα σύνολα των γωνιών των $\tilde{W}$ και $\widehat{W}$ αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με σ την αντιστοιχία από το $\tilde{C}$ στο $\hat{C}$ που ενάγεται από τον ισομορφισμό στο (II). Επαυξάνουμε επίσης την σ ορίζοντας $\phi = \sigma \cup \{(x, x) \mid x \in V(\tilde{W}) \setminus C(\tilde{W})\}$.

Έστω ότι η $\hat{K}$ είναι η περιφέρεια του $\widehat{W}$ στο $G \setminus A_{i_0}$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$\hat{D} = \{D \cap \hat{K} \mid D \in \tilde{D}^+\}$$

είναι μία περιφερειακή διαίρεση της $\widehat{K}$. Αυτό είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί σε ότι αφορά τις Ιδιότητες (1–4). Η Ιδιότητα (5) έπεται από την παρατήρηση ότι η απεικόνιση ϕ , που ορίστηκε παραπάνω, είναι ένας ισομορφισμός ανάμεσα στα $H_{\widehat{K}^+}$ και $H_{\widehat{K}}$.

Μέχρι στιγμής, έχουμε βρει έναν ισόπεδο υποδιαμενόμενο τοίχο $\widehat{W}$ στο $G \setminus A_{i_0}$ και μία περιφερειακή διαίρεση της περιφέρειάς του $\widehat{K}$. Καθώς κάθε πτερύγιο στην $\widehat{D}$ είναι υπογράφημα ενός πτερυγίου στην $\widehat{D}^+$ συνεπάγεται ότι όλα τα πτερύγια στην $\widehat{D}$ έχουν δεντροπλάτος το πολύ $f_3(h, k)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.10 $|A_{i_0}| - \mathbf{an}(H) + 1$ φορές, έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $A \subseteq A_{i_0}$, τέτοιο ώστε $|A| \leq \mathbf{an}(H) - 1$ και το $G \setminus A$ περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαμενόμενο τοίχο W ύψους k τέτοιον ώστε $W \subseteq \widehat{W}$. Επιπλέον, $V(K) \cap A_{i_0} = \emptyset$, όπου K είναι η περιφέρεια του W στο $G \setminus A$. Όπως παραπάνω, η

$$\mathcal{D} = \{D \cap K \mid D \in \widehat{\mathcal{D}}\}$$

είναι μία περιφερειακή διαίρεση της K , όπου όλα τα πτερύγιά της έχουν δεντροπλάτος το πολύ $f_3(h, k)$. Το θεώρημα έπεται καθώς η f_3 είναι μια γραμμική συνάρτηση στο k . $\square$

Το ακόλουθο πόρισμα δίνει μία πιο ακριβή περιγραφή της δομής των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο απόγειο γράφημα σαν ελάσσον.

Πόρισμα 6.1. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε δύο γραφήματα H και G , όπου το H είναι ένα απόγειο γράφημα, και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. $\mathbf{tw}(G) \leq f(h) \cdot k$, όπου $h = \mathbf{n}(H)$.
2. Το H είναι ελάσσον του G .
3. Το G περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαμενόμενο τοίχο W όπου

- ο W έχει ύψος k και
- η περιφέρεια του W έχει μία περιφερειακή διαίρεση $\mathcal{D}$ τέτοια ώστε κάθε εσωτερικό περύγιο της $\mathcal{D}$ έχει δεντροπλάτος το πολύ $f(h) \cdot k$.

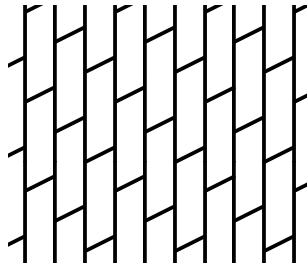
6.5 Πλακοστρώσεις του Επιπέδου

Σε αυτή την ενότητα αναφέρουμε τρία θεωρήματα που απορρέουν από το Θεώρημα 6.1. Δύο από αυτά είναι ήδη γνωστά και θα μας φανούν επίσης χρήσιμα στο μεθεπόμενο κεφάλαιο ενώ το τρίτο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να τα «δέσει» όλα μαζί μέσω πλακοστρώσεων.

Πριν προχωρήσουμε όμως στα θεωρήματα αυτά, ας ορίσουμε μερικές έννοιες από τις πλακοστρώσεις οι οποίες είναι απαραίτητες.

6.5.1 Κανονικές Πλακοστρώσεις του Επιπέδου

Μία *πλακόστρωση* (*tiling*) του επιπέδου $\mathcal{T}$ είναι μία αριθμήσιμη οικογένεια από κλειστά σύνολα $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ τα οποία καλύπτουν το επίπεδο χωρίς κενά ή επικαλύψεις. Ακριβέστερα, η ένωση των συνόλων $T_1, T_2, \dots$ είναι όλο το επίπεδο και τα εσωτερικά των συνόλων T_i είναι ανά δύο ξένα.



Σχήμα 6.12: Μία μονοεδρική πλακόστρωση του επιπέδου.

Τα πλακάκια που θεωρούμε σε αυτή την ενότητα είναι τοπολογικοί δίσκοι

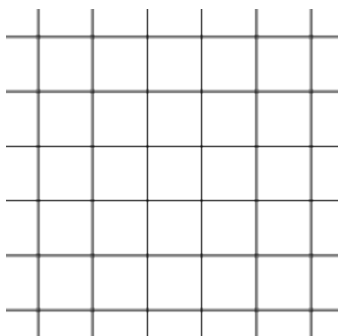
και μας αφορούν μόνο μονοεδρικές πλακοστρώσεις, όπου με τη λέξη *μονοεδρικές* (*monohedral*) εννοούμε ότι όλα τα πλακάκια στην πλακόστρωση T έχουν το ίδιο μέγεθος και σχήμα. Για παράδειγμα μίας μονοεδρικής πλακόστρωσης, δείτε το Σχήμα 6.12. Μία μονοεδρική πλακόστρωση του επιπέδου από ένα κανονικό πολύγωνο καλείται *κανονική πλακόστρωση* (*regular tiling*) του επιπέδου.

Στην επόμενη υποενότητα θα δούμε ότι τα τρία θεωρήματα που αναφέραμε ορίζουν από μία κανονική πλακόστρωση του επιπέδου όπου καμμία δεν είναι ίδια με την άλλη, η μία από αυτές είναι αυτοδυϊκή και οι άλλες δύο δυϊκές με την γραφοθεωρητική έννοια.

6.5.2 Τα Θεωρήματα και οι Πλακοστρώσεις

Ας ξεκινήσουμε τώρα την διατύπωση των θεωρημάτων.

Θεώρημα 6.2 (Θεώρημα Αποκλεισμένης Σχάρας για Ελάσσονα [53]). Υπάρχει μια υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε δύο γραφήματα H και G , και $k \in \mathbb{N}$, εάν $\text{tw}(G) \geq f(\mathbf{n}(H)) \cdot k$ και το G δεν περιέχει το H σαν ελάσσον τότε το G περιέχει την $(k \times k)$ -σχάρα ως ελάσσον.



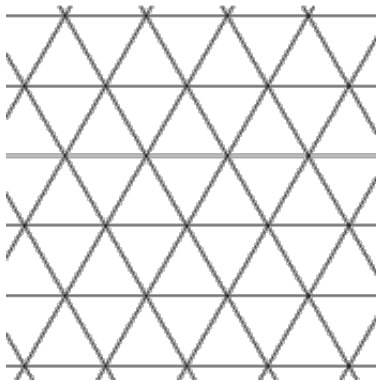
Σχήμα 6.13: Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου με τετράγωνα πλακάκια.

Αυτό είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι προκύπτει από το Θεώρημα 6.1 αφού κάθε $(k \times k)$ -σχάρα είναι ελάχιστον ενός τοίχου ύψους k . Προσέχουμε τώρα ότι η $(k \times k)$ -σχάρα μπορεί να ιδωθεί ως η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου με τετράγωνα πλακάκια. (Δείτε το Σχήμα 6.13.)

Ας προχωρήσουμε τώρα στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.3 (Θεώρημα Αποκλεισμένης Σχάρας για Συνθλίψεις [83]). Υπάρχει μια υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε δύο γραφήματα H και G , όπου το H είναι απόγειο και συνεκτικό, και $k \in \mathbb{N}$, εάν $\text{tw}(G) \geq f(\mathbf{n}(H)) \cdot k$ και το G δεν περιέχει το H σαν ελάχιστον τότε το G περιέχει το Γ_k σαν σύνθλιψη.

Αντίστοιχα με πριν είναι σχετικά εύκολο να δούμε ότι το Θεώρημα 6.3 μπορεί να προκύψει σαν πόρισμα του Πορίσματος 6.1. Ας προσέξουμε πάλι ότι η $(k \times k)$ -τριγωνοποιημένη σχάρα μπορεί να ιδωθεί ως η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από ισόπλευρα τρίγωνα πλακάκια. (Δείτε το Σχήμα 6.14.)

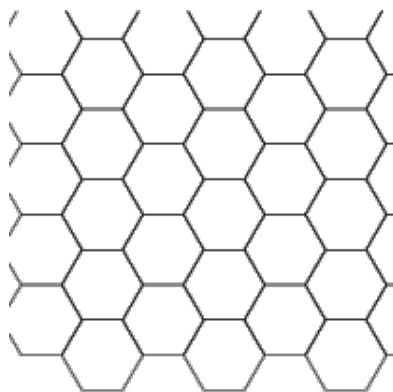


Σχήμα 6.14: Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από ισόπλευρα τρίγωνα πλακάκια.

Ας πάμε τώρα και στο τελευταίο θεώρημα αυτής της ενότητας το οποίο,

παρόμοια με πριν, εγγυάται την ύπαρξη ενός μεγάλου τοίχου ως τοπολογικό ελάσσον σε ένα γράφημα G αρκετά μεγάλου δεντροπλάτους που αποκλείει ένα γράφημα H σαν ελάσσον.

Θεώρημα 6.4 (Θεώρημα Αποκλεισμένης Σχάρας για Τοπολογικά Ελάσσονα). Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε δύο γραφήματα H και G , και $k \in \mathbb{N}$, εάν $\text{tw}(G) \geq f(\mathbf{n}(H)) \cdot k$ και το G δεν περιέχει το H σαν ελάσσον τότε το G περιέχει το W_k σαν τοπολογικό ελάσσον.



Σχήμα 6.15: Η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από κανονικά εξάγωνα πλακάκια.

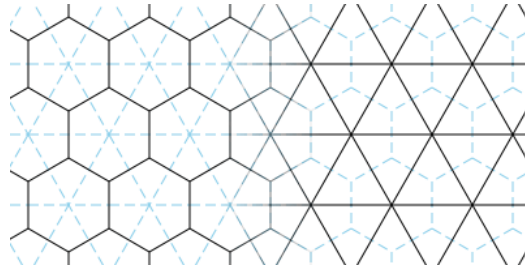
Είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι το προαναφερθέν θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 6.1. Προσέχουμε τώρα ότι, όπως πριν, ο τοίχος ύψους k μπορεί να ιδωθεί ως η κανονική πλακόστρωση του επιπέδου από κανονικά εξάγωνα πλακάκια, τα οποία ονομάζονται αλλιώς κερήθρες. (Δείτε το Σχήμα 6.15.)

Ας προσέξουμε επίσης ότι ενώ οι κερήθρες της πλακόστρωσης και τα τούβλα του τοίχου είναι ισοδύναμα με την τοπολογική έννοια, δεν είναι ισο-

δύναμα με την γεωμετρική έννοια.

Σχόλιο 3. Ας προσέξουμε εδώ ότι το Θεώρημα 6.3 διαφέρει από τα Θεωρήματα 6.2 και 6.4 με την εξής έννοια. Ενώ για τα τα Θεωρήματα 6.2 και 6.4 αρκεί ο αποκλεισμός ενός οποιουδήποτε γραφήματος H σαν ελάχιστον για την ύπαρξη της σχάρας και του τοίχου σαν ελάχιστον και τοπολογικό ελάχιστον αντίστοιχα, για την ύπαρξη της τριγωνοποιημένης σχάρας ως σύνθλιψη είναι αναγκαίος ο επιπλέον περιορισμός ότι το αποκλεισμένο γράφημα είναι απόγειο [83]. Θα θέλαμε εδώ να σχολιάσουμε επίσης ότι στο μεθεπόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.4 και μια παραλλαγή του για να ορίσουμε την έννοια της δισδιαστατότητας σε παραμέτρους που είναι κλειστές ως προς τοπολογικά ελάχιστα (απόστασης).

Είναι γνωστό ότι, στο επίπεδο, η πλακοστρώση με τετράγωνα πλακάκια είναι αυτοδυϊκή με την τοπολογική έννοια και οι πλακοστρώσεις με ισόπλευρα τρίγωνα και κερήθρες είναι δυϊκές. Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 6.16.



Σχήμα 6.16: Η δυϊκότητα των πλακοστρώσεων με ισόπλευρα τρίγωνα και κερήθρες.

Ας προσέξουμε τώρα την ακόλουθη.

Παρατήρηση 6.5. Η δυϊκότητα των πλακοστρώσεων με ισόπλευρα τρίγωνα και κερήθρες καθώς και η αυτοδυϊκότητα της πλακοστρώσης με τετράγωνα

μπορούν να επεκταθούν από το επίπεδο στον κόσμο των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο απόγειο γράφημα σαν ελάσσον και έχουν αρκετά μεγάλο δεντροπλάτος.

Απαγορεύοντας Εμβυθίσεις σε Γραφήματα Εμβαπτισμένα
σε Επιφάνειες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως μπορούμε, χρησιμοποιώντας το Ισχυρό Δομικό Θεώρημα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων, να αποδείξουμε μία βελτιστοποιημένη έκδοση του Ασθενούς Δομικού Θεωρήματος. Όπως έχουμε επανειλημμένα δει η σχέση του ελάσσονος έχει μελετηθεί εκτενώς (δείτε, για παράδειγμα, τις [14, 25, 69, 105, 139, 193, 195, 197, 213, 219]).

Ωστόσο, η σχέση της εμβύθισης μόλις πρόσφατα έγινε αντικείμενο εντονότερης μελέτης [1, 17, 58, 101, 109, 119]. Στην [58], οι DeVos και άλλοι απέδειξαν ότι για κάθε θετικό ακέραιο t , κάθε απλό γράφημα με ελάχιστο βαθμό τουλάχιστον $200t$ περιέχει το πλήρες γράφημα με t κορυφές σαν (ισχυρή) εμβύθιση και στην [81] οι Ferrara και άλλοι, δοσμένου ενός γραφήματος H , παρέχουν ένα κάτω φράγμα στον ελάχιστο βαθμό οποιουδήποτε γραφήματος G έτσι ώστε να διασφαλίσουν ότι ένα γράφημα H περιέχεται στο G σαν εμ-

βύθιση. Πιο πρόσφατα, στην [216], οι Seymour και Wollan απέδειξαν ένα δομικό θεώρημα για τα γραφήματα που αποκλείουν πλήρη γραφήματα σαν εμβυθίσεις.

Στο πλαίσιο των χρωματισμών γραφημάτων, οι Abu-Khazam και Langston στην [1] έδωσαν στοιχεία που υποστηρίζουν το ανάλογο της εικασίας του Hadwiger για την σχέση των εμβυθίσεων, δηλαδή την εικασία που ισχυρίζεται ότι εάν ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G είναι τουλάχιστον t , τότε το G περιέχει το πλήρες γράφημα σε t κορυφές σαν εμβύθιση, και την απέδειξαν για $t \leq 4$. Η εικασία αυτή έχει επίσης αποδειχθεί για $t = 5, 6$ και $t \leq 7$ από τους Lescure και Meyniel στην [146] και από τους DeVos και άλλους στην [59] ανεξάρτητα. Το πιο πρόσφατο αποτέλεσμα σε χρωματισμούς είναι μία προσέγγιση του χρωματικού αριθμού λίστας (list coloring number) σε γραφήματα που αποκλείουν το πλήρες γράφημα σαν εμβύθιση [119].

Τέλος, σε αλγοριθμικά πλαίσια, στην [109], οι Grohe και άλλοι, έδωσαν έναν κυβικού χρόνου αλγόριθμο που αποφασίζει εάν ένα συγκεκριμενοποιημένο γράφημα H περιέχεται σε ένα εισαγόμενο γράφημα G σαν εμβύθιση.

Σε αυτό το κεφάλαιο, εμπνευσμένοι από το Ασθενές Δομικό Θεώρημα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων, αποδεικνύουμε έναν δομικό χαρακτηρισμό για τα γραφήματα που εμβαπτίζονται σε κάποια επιφάνεια φραγμένου γένους. Για την ακρίβεια, δείχνουμε ότι εάν το G είναι ένα γράφημα που εμβαπτίζεται σε μία επιφάνεια γένους Euler γ και το H είναι ένα συγκεκριμενοποιημένο γράφημα τότε συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα: Είτε το G έχει φραγμένο δεντροπλάτος (από μία υπολογίσιμη συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το γ και το H) είτε το G έχει «μικρή» ακμοσυνεκτικότητα (όπου το φράγμα εξαρτάται μόνο από το H), είτε το G περιέχει το H σαν εμβύθιση.

Ας προχωρήσουμε τώρα στις ακόλουθες έννοιες που είναι απαραίτητες για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος.

7.1 Απαραίτητες έννοιες

Τοίχων συνέχεια. Έστω ότι W είναι ένας τοίχος ύψους k . Συμβολίζουμε με L_i το i -οστό στρώμα του W , $i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil]$. Συμβολίζουμε επίσης με A_i τον δακτύλιο που ορίζεται από τους κύκλους L_i και L_{i+1} , δηλαδή, από το i -οστό και $(i+1)$ -οστό στρώμα, $i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1]$. Δοσμένου ενός δακτυλίου A που ορίζεται από δύο κύκλους C_1 και C_2 , συμβολίζουμε με A° το εσωτερικό του A , δηλαδή, το $A \setminus (C_1 \cup C_2)$.

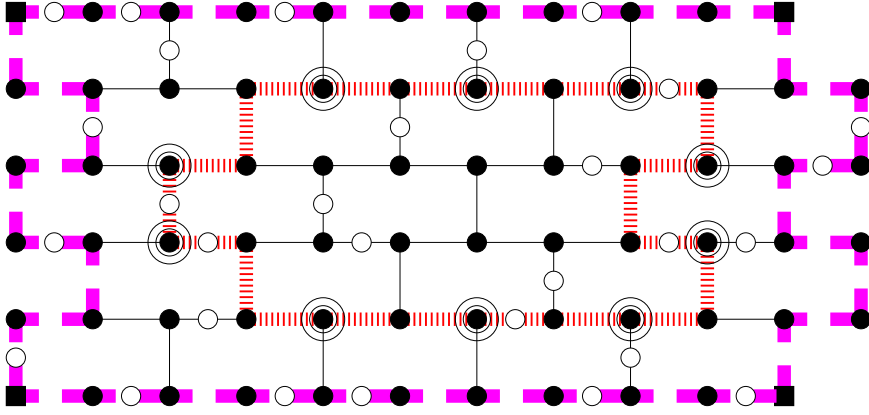
Ένας υποδιαιρεμένος τοίχος ύψους k καλείται *σφικτός* (*tight*) εάν

1. ο κλειστός δίσκος που ορίζεται από το πλέον εσωτερικό ($\lceil \frac{k}{2} \rceil$ -οστό) στρώμα του W είναι μεγιστικός ως προς ακμές (για λόγους ομοιομορφίας θα συμβολίζουμε αυτόν τον δίσκο με $A_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$),
2. για κάθε $i \in [\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1]$ ο δακτύλιος A_i είναι μεγιστικός ως προς ακμές υπό την συνθήκη ότι ο A_{i+1} είναι μεγιστικός ως προς ακμές.

Δοσμένου ενός τοίχου W και ενός στρώματος L του W , που είναι διαφορετικό από την περίμετρο του W , έστω ότι ο W' είναι ο υποτοίχος του W με περίμετρο L . Ο W' καλείται επίσης *υποτοίχος του W που ορίζεται από το L* . Καλούμε τις ακόλουθες κορυφές, *σημαντικές* (*important*) κορυφές του L : Τις πρωταρχικές κορυφές του W που ανήκουν στο L και έχουν βαθμό 2 στον υποβόσχοντα μη-υποδιαιρεμένο τοίχο του W' αλλά δεν είναι γωνίες του W' (όπου υποθέτουμε ότι ο W' μοιράζεται τις πρωταρχικές κορυφές του W). Δείτε το Σχήμα 7.1.

Παρατήρηση 7.1. Ένα στρώμα L ενός τοίχου W το οποίο είναι διαφορετικό από την περίμετρό του και ορίζει έναν υποτοίχο W' του W ύψους k περιέχει ακριβώς $4k - 2$ σημαντικές κορυφές.

Από το Λήμμα 6 στην [83] και το Λήμμα 6.3 προκύπτει το ακόλουθο.



Σχήμα 7.1: Οι σημαντικές κορυφές του δεύτερου στρώματος ενός τοίχου ύψους 5.

Λήμμα 7.1. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους Euler γ . Εάν $\text{tw}(G) \geq 48 \cdot (\gamma + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot (k + 5)$ τότε το G περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιακετεμένο τοίχο ύψους k , του οποίου η περιφέρεια στο G είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο Δ .

Ορθόγωνιοι Σχεδιασμοί Ένας ορθογώνιος σχεδιασμός (*orthogonal drawing*) ενός γραφήματος G σε μία σχάρα Γ είναι μία απεικόνιση που απεικονίζει

- τις κορυφές $v \in V(G)$ σε υποσχάρες $\Gamma(v)$, οι οποίες καλούνται *κουτιά* (*boxes*), έτσι ώστε για κάθε $u_1, u_2 \in V(G)$ με $u_1 \neq u_2$, $\Gamma(u_1) \cap \Gamma(u_2) = \emptyset$, και
- τις ακμές $\{u_1, u_2\} \in E(G)$ σε (u'_1, u'_2) -μονοπάτια των οποίων οι εσωτερικές κορυφές ανήκουν στο $\Gamma - \bigcup_{v \in V(G)} \Gamma(v)$, τα άκρα τους u'_i (που καλούνται *συνδετικές* (*joining*) κορυφές των $\Gamma(u_i)$) ανήκουν στην πε-

ρίμετρο της $\Gamma(u_i)$, $i \in [2]$, και για κάθε δύο ξένες ακμές $e_i \in E(G)$, $i \in [2]$, τα αντίστοιχα μονοπάτια είναι ξένα ως προς ακμές.

Είναι γνωστό ότι:

Λήμμα 7.2 ([19]). *Εάν το G είναι ένα απλό γράφημα τότε επιδέχεται έναν ορθογώνιο σχεδιασμό σε μία $(\frac{m+n}{2} \times \frac{m+n}{2})$ -σχάρα. Επιπροσθέτως, το μέγεθος του κουτιού κάθε κορυφής v είναι $\frac{\deg(v)+1}{2} \times \frac{\deg(v)+1}{2}$.*

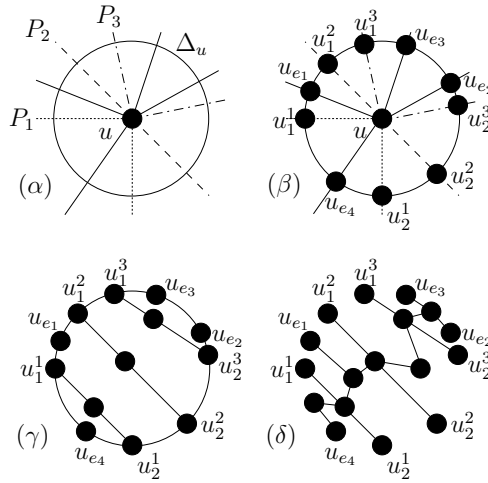
7.2 Προκαταρκτικά Συνδυαστικά Λήμματα

Δέντρο αποκόλλησης της $\mathcal{P}$ στην u Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα εμβαπτισμένο σε έναν κλειστό δίσκο Δ , οι $v, v_1, v_2, \dots, v_k$ είναι διακεκριμένες κορυφές του G και η $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in [k]\}$ είναι μία οικογένεια από k σύρροα και ξένα ως προς ακμές μονοπάτια τέτοια ώστε το P_i είναι ένα μονοπάτι από την v στην v_i , $i \in [k]$. Έστω ότι η $u \in V(G) \setminus \{v, v_i \mid i \in [k]\}$ ανήκει σε περισσότερα από ένα μονοπάτια στην $\mathcal{P}$. Ας υποθέσουμε ότι η $\mathcal{P}_u = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}\}$ είναι η οικογένεια των μονοπατιών στην $\mathcal{P}$ που περνούν την u . Έστω ότι ο Δ_u είναι ένας κλειστός δίσκος γύρω από την u . Συμβολίζουμε με $e_{i_r}^1$ και $e_{i_r}^2$ τις ακμές τους P_{i_r} που είναι προσπίπτουσες στην u , $j \in [r]$. Δοσμένης μιας οποιασδήποτε ακμής e με $u \in e$, συμβολίζουμε με u_e το κοινό της σημείο με το σύνορο του Δ_u . Κατασκευάζουμε ένα δέντρο T_u με τον ακόλουθο τρόπο και το καλούμε, *δέντρο αποκόλλησης της $\mathcal{P}$ στην u* (*detachment tree of $\mathcal{P}$ in u*).

Θεωρούμε το εξωεπίπεδο¹ γράφημα που προκύπτει από το σύνορο του Δ_u προσθέτοντας τις ακμές $\{u_{e_{i_j}^1}, u_{e_{i_j}^2}\}$, $j \in [r]$. Υποδιαιρούμε τις ακμές $\{u_{e_{i_j}^1}, u_{e_{i_j}^2}\}$, $j \in [r]$, καταλλήγοντας σε ένα επίπεδο γράφημα. Για κάθε

¹Καλούμε ένα γράφημα εξωεπίπεδο εάν είναι επίπεδο γράφημα και όλες οι κορυφές του βρίσκονται στην εξωτερική όψη.

φραγμένη όψη f του γραφήματος, έστω ότι το $V(f)$ συμβολίζει το σύνολο των κορυφών που ανήκουν στην f . Προσθέτουμε μία νέα κορυφή v_f στο εσωτερικό της και την κάνουμε γειτονική με τις κορυφές του $(V(f) \cap \{u_e \mid e \in u\}) \setminus \{u_{e_{i_j}}^1, u_{e_{i_j}}^2 \mid j \in [r]\}$. Τέλος, αφαιρούμε τις ακμές των οποίων και τα δύο άκρα βρίσκονται στο σύνορο του Δ_u . Συμβολίζουμε αυτό το δέντρο με T_u . Ας προσέξουμε ότι για κάθε e με $u \in e$, η κορυφή u_e είναι φύλλο του T_u . (Δείτε το Σχήμα 7.2.)



Σχήμα 7.2: Παράδειγμα της κατασκευής ενός δέντρου αποκόλλησης.

Αντικαθιστούμε την u με το T_u σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα υποδιαίρουμε κάθε ακμή $e \in G$ προσπίπτουσα στην u , και συμβολίζουμε με u_e τη κορυφή που προστέθηκε μετά την υποδιαίρεση της ακμής e . Συμβολίζουμε με G_s το προκύπτον γράφημα. Θεωρούμε τώρα το γράφημα $G^r = (G^s \setminus u) \cup T_u$ (όπου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $V(G \setminus u) \cap V(T_u) = \{u_e \mid u \in e\}$). Το γράφημα G^r καλείται το γράφημα που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας την u με το δέντρο αποκόλλησης της $\mathcal{P}$ στην u .

Δοσμένης μιας οικογένειας μονοπατιών $\mathcal{P}$, συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(\mathcal{P})$ το σύνολο των κορυφών της $\mathcal{P}$ που ανήκουν σε περισσότερα από ένα μονοπάτια.

Παρατήρηση 7.2. Έστω ότι οι k και h είναι θετικοί ακέραιοι και το G είναι ένα πολυγράφημα που περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαμεμένο τοίχο W ύψους h , του οποίου η περιφέρεια C είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο Δ . Επιπλέον, έστω ότι οι $v, v_i, i \in [k]$, είναι κορυφές του W τέτοιες ώστε, υπάρχει μία σύρροη οικογένεια $\mathcal{P}$ από k ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις κορυφές $v_i, i \in [k]$. Τέλος, έστω ότι η $u \in V(C) \setminus \{v, v_i \mid i \in [k]\}$ ανήκει σε περισσότερα από ένα μονοπάτια της $\mathcal{P}$. Το γράφημα G^r που προκύπτει από το G αντικαθιστώντας την u με το δέντρο αποκόλλησης της $\mathcal{P}$ στην u , T_u , περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαμεμένο τοίχο W' ύψους h , του οποίου η περιφέρεια είναι εμβαπτισμένη στον Δ και υπάρχει μία οικογένεια $\mathcal{P}'$ από k σύρροα ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις $v_i, i \in [k]$, στον W' τέτοια ώστε $\mathcal{O}(\mathcal{P}') \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{P}) \setminus \{u\}$.

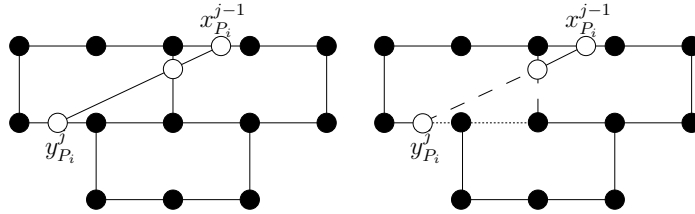
Απόδειξη. Ας προσέξουμε πρώτα ότι είναι αρκετό να αποδείξουμε την παρατήρηση για την περίπτωση όπου $u \in V(W)$. Έστω ότι οι e_1, e_2 (και e_3) είναι οι ακμές του W οι οποίες είναι προσπίπτουσες στην u . Παρατηρούμε τώρα ότι οι κορυφές u_{e_1}, u_{e_2} (και u_{e_3}) είναι φύλλα του T_u . Άρα, από ένα κλασικό αποτέλεσμα, υπάρχει μία κορυφή $u' \in V(T_u)$ τέτοια ώστε υπάρχουν 2 (ή 3) εσωτερικά ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την u' στις u_{e_1} και u_{e_2} (και u_{e_3}). $\square$

Διατυπώνουμε τώρα τους ακόλουθους βοηθητικούς ορισμούς. Έστω ότι το G είναι ένα πολυγράφημα που περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαμεμένο τοίχο ύψους k του οποίου η περιφέρεια είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο. Έστω $v \in A_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$, δηλαδή, έστω ότι η v είναι μία κορυφή η οποία περιέχεται στον κλειστό δίσκο που ορίζεται από το πλέον εσωτερικό στρώμα του W . Έστω επίσης ότι το $\mathcal{P}$ είναι ένα μονοπάτι από την v στην περίμετρο

του W . Για κάθε στρώμα j του τοίχου, $2 \leq j \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$, συμβολίζουμε με x_P^j την πρώτη κορυφή του P (ξεκινώντας από την v) η οποία ανήκει επίσης στο L_j και την καλούμε εισερχόμενη (*incoming*) κορυφή του P στο L_j .

Συμβολίζουμε με P^j το μεγιστικό υπομονοπάτι του P που περιέχει την v και περιέχεται εξ ολοκλήρου στον τοίχο που ορίζεται από το L_j . Συμβολίζουμε με y_P^j το άκρο του στο L_j και το καλούμε εξερχόμενη (*outgoing*) κορυφή του P στο L_j . Σημειώνουμε εδώ ότι οι x_P^j και y_P^j δεν είναι κατ' ανάγκη διακεκριμένες κορυφές.

Λήμμα 7.3. Έστω ότι οι l και k είναι θετικοί ακέραιοι, το G είναι ένα γράφημα, ο W είναι ένας σφικτός υποδιαμενόμενος τοίχος ύψους k , ο οποίος είναι υπογράφημα του G και του οποίου η περιφέρεια είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο Δ , και η v είναι μία κορυφή τέτοια ώστε $v \in A_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$. Εάν υπάρχουν l ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια P_i , $i \in [l]$, από την v στις κορυφές τις περιμέτρου τότε υπάρχει ένα τούβλο B του W με $B \cap A_{j-1}^\circ \neq \emptyset$ που περιέχει αμφοτέρως τις $y_{P_i}^j$ και $x_{P_i}^{j-1}$.



Σχήμα 7.3: Αντικαθιστούμε τη διακεκομμένη με τελείες γραμμή του τοίχου με την διακεκομμένη με παύλες.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν δακτύλιο A'_j τέτοιον ώστε $A_j \subsetneq A'_j$ και

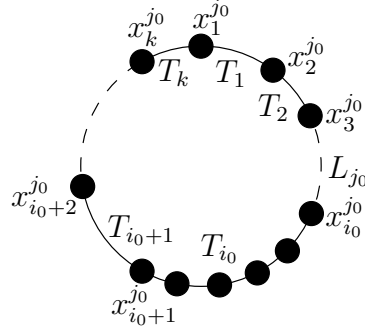
$|E(A_j)| < |E(A'_j)|$, μία αντίφαση στην σφικτότητα του τοίχου. (Δείτε το Σχήμα 7.3.) $\square$

Λήμμα 7.4. Έστω ότι ο k είναι ένας θετικός ακέραιος και το G είναι ένα πολυγράφημα που περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαιρεμένο τοίχο W ύψους τουλάχιστον $4 \cdot k^2 + 1$, του οποίου η περιφέρεια K είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο Δ . Έστω επίσης ότι το V είναι ένα σύνολο από k κορυφές που βρίσκονται στην περίμετρο P του W , των οποίων η απόσταση ανά δύο στον υποβόσκοντα μη-υποδιαιρεμένο τοίχο είναι τουλάχιστον 2. Εάν υπάρχουν μία κορυφή $v \in A_{2, k^2+1}$ και k εσωτερικά ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την v σε κορυφές της P , τότε υπάρχουν k εσωτερικά ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την v στις κορυφές του V στο K .

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο τοίχος W είναι σφικτός. Έστω ότι τα $P_1, P_2, \dots, P_k$ είναι τα μονοπάτια από την v στην P και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι η $[P_1, P_2, \dots, P_k, P_1]$ είναι η κυκλική διάταξη σύμφωνα με την οποία εμφανίζονται στον W δεξιόστροφα. Ο στόχος μας είναι να αναδρομολογήσουμε τα μονοπάτια $P_i, i \in [k]$, έτσι ώστε να καταλήξουν στις κορυφές του V . Έστω ότι το P'_i είναι το υπομονοπάτι του P_i που ξεκινάει από την v και σταματάει την πρώτη φορά που το P_i συναντάει το $(k+1)$ -οστό στρώμα του W , δηλαδή, έστω ότι $P'_i = P_i[v, x_{P_i}^{k+1}]$, $i \in [k]$.

Θέτουμε $j_0 = k^2 + 1$. Θεωρούμε το στρώμα L_{j_0} και για κάθε $i \in [k]$, έστω ότι το T_i συμβολίζει το μονοπάτι του L_{j_0} που ξεκινάει από την $x_i^{j_0}$ και καταλήγει στην $x_{i+1}^{j_0}$ (θεωρούμενο δεξιόστροφα), όπου στην περίπτωση $i = k$ κάνουμε κατάχρηση του συμβολισμού και θεωρούμε ότι $x_{k+1}^{j_0} = x_1^{j_0}$ (δείτε το Σχήμα 7.4). Έστω επίσης ότι $i_0 \in [k]$ είναι ο δείκτης για τον οποίο το T_{i_0} περιέχει το μέγιστο πλήθος σημαντικών κορυφών ανάμεσα σε όλα τα T_i . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_0 = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Από την Παρατήρηση 7.1, αφού το L_{j_0} ορίζει έναν υποτοίχο W' του W ύψους

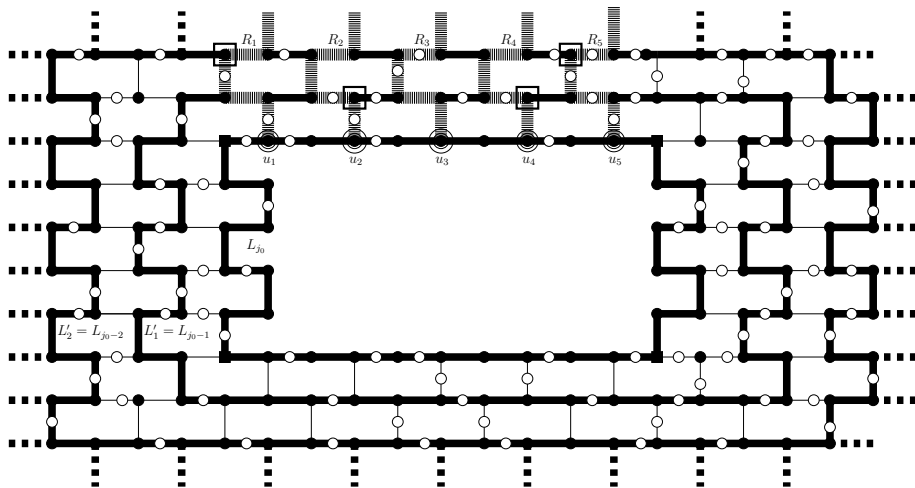
$2 \cdot k^2 + 1$, το L_{j_0} περιέχει ακριβώς $8 \cdot k^2 + 2$ σημαντικές κορυφές. Άρα, στο εσωτερικό του T_{i_0} περιέχονται τουλάχιστον $7k$ σημαντικές κορυφές. Έστω ότι το $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ είναι ένα σύνολο διαδοχικών σημαντικών κορυφών στο T_{i_0} οι οποίες εμφανίζονται με αυτή τη σειρά, ξεκινώντας από την $x_{i_0}^{j_0}$ προς την $x_{i_0+1}^{j_0}$, τέτοιες ώστε τα μονοπάτια $T_{i_0}[x_{i_0}^{j_0}, u_1]$ και $T_{i_0}[u_k, x_{i_0+1}^{j_0}]$ να περιέχουν εσωτερικά τουλάχιστον $3k$ σημαντικές κορυφές.



Σχήμα 7.4: Τα μονοπάτια T_i , $i \in [k]$.

Ας παρατηρήσουμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κορυφές u_i , $i \in [k]$, ανήκουν στο βορειότερο μονοπάτι του W' . Θυμόμαστε εδώ ότι κάθε πρωταρχική κορυφή w του $W' \subseteq W \setminus P$ περιέχεται σε ακριβώς ένα κάθετο μονοπάτι $P_w^{[v]}$ του W . Για κάθε $i \in [k]$ αντιστοιχούμε ένα μονοπάτι R_i στην κορυφή u_i με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω ότι το R_i είναι το μεγιστικό υπομονοπάτι του $P_{u_i}^{[v]}$ που έχει την u_i σαν άκρο και δεν περιέχει καμμία από τις κορυφές που ανήκουν στο εσωτερικό του δίσκου που ορίζεται από το L_{j_0} στην περιφέρεια του W . Ας προσέξουμε εδώ ότι, από τον τρόπο που ορίστηκαν, τα μονοπάτια R_i , $i \in [k]$, είναι ξένα ως προς τις κορυφές τους. (Δείτε το Σχήμα 7.5)

Για κάθε $i \in [k]$, συμβολίζουμε με u_i^f την σημαντική κορυφή του L_{k+1} που ανήκει επίσης στο R_i . Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι στον δακτύλιο που



Σχήμα 7.5: Οι σημαντικές κορυφές του L_{j_0} , τα στρώματα L'_1 και L'_2 , και τα μονοπάτια R_i .

ορίζεται από τα L_{k+1} και L_1 υπάρχουν k ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από τις u_i^f , $i \in [k]$, στις κορυφές του V . Στο υπόλοιπο της απόδειξης, χρησιμοποιώντας υπομονοπάτια των μονοπατιών R_i , $i \in [k]$, και των $\lceil \frac{k-2}{2} \rceil$ διαδοχικών στρώματων του W που προηγούνται του L_{j_0} αναδρομολογούμε τα μονοπάτια P'_i , $i \in [k]$, έτσι ώστε να καταλήγουν στις κορυφές u_i^f , $i \in [k]$. Ας προσέξουμε εδώ ότι μία τέτοια κατασκευή θα ολοκληρώσει την απόδειξη του λήμματος.

Πρώτα, ας παρατηρήσουμε ότι για k περιττό (αντίστοιχα, άρτιο), το L_{j_0} περιέχει ένα (αντίστοιχα, δύο ξένα ως προς κορυφές) μονοπάτι F_1 (αντίστοιχα, μονοπάτια F_1 και F_2) από την $x_{i_0}^{j_0}$ στην u_{i_0} (αντίστοιχα, από την $x_{i_0}^{j_0}$ στην u_{i_0} και από την $x_{i_0+1}^{j_0}$ στην u_{i_0+1}).

Θεωρούμε τώρα τα $\lceil \frac{k-2}{2} \rceil$ διαδοχικά στρώματα του W που προηγούνται του L_{j_0} , δηλαδή, τα στρώματα $L'_j = L_{j_0-j}$, $j \in [\lceil \frac{k-2}{2} \rceil]$. Για κάθε

$j \in [\lceil \frac{k-2}{2} \rceil]$, έστω ότι η $u_{i_0-j}^j$ είναι η πρώτη κορυφή στην οποία το R_{i_0-j} συναντά το L'_j ξεκινώντας από την u_{i_0-j} . Επιπλέον, στην περίπτωση όπου ο k είναι περιττός (αντίστοιχα, άρτιος), για κάθε $j \in [\lceil \frac{k-2}{2} \rceil]$, έστω ότι η $u_{i_0+j}^j$ (αντίστοιχα, $u_{i_0+1+j}^j$) είναι η πρώτη κορυφή στην οποία το μονοπάτι R_{i_0+j} (αντίστοιχα, R_{i_0+1+j}) συναντάει το L'_j ξεκινώντας από την u_{i_0+j} (αντίστοιχα, u_{i_0+1+j}). (Δείτε, για παράδειγμα, τις κορυφές μέσα στα τετράγωνα στο Σχήμα 7.5.)

Οδεύοντας προς τον απώτερό μας στόχο, χρειαζόμαστε τώρα να αποδείξουμε τον ακόλουθο.

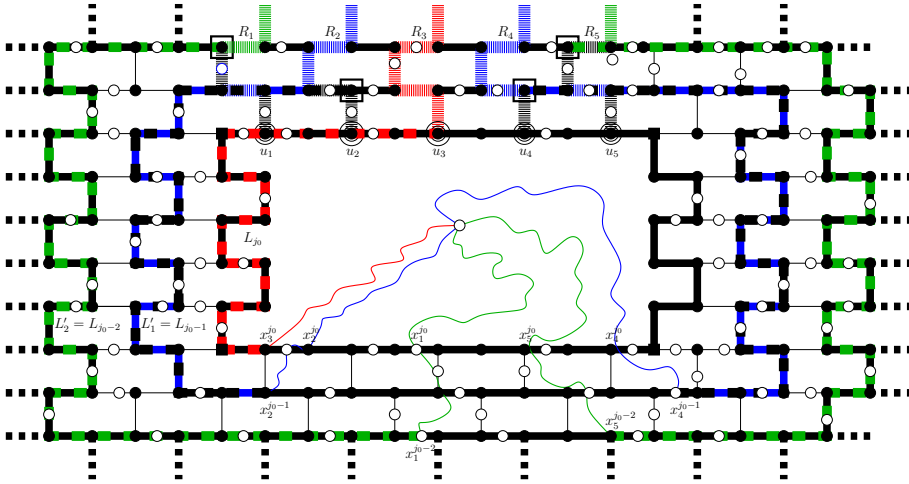
Ισχυρισμός 12. Έστω ότι ο k είναι ένας περιττός (αντίστοιχα, άρτιος) ακέραιος. Για κάθε $j \in [\lceil \frac{k-2}{2} \rceil]$, υπάρχουν δύο ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια F_j^1 και F_j^2 ανάμεσα στα ζεύγη κορυφών $(x_{i_0-j}^{j_0-j}, u_{i_0-j}^j)$ και $(x_{i_0+j}^{j_0-j}, u_{i_0+j}^j)$ (αντίστοιχα, $(x_{i_0+1+j}^{j_0-j}, u_{i_0+1+j}^j)$) τα οποία δεν τέμνουν τα μονοπάτια $\{R_l \mid i_0-j < l < i_0+j\}$ (αντίστοιχα, $\{R_l \mid i_0-j < l < i_0+1+j\}$).

Απόδειξη του Ισχυρισμού 12. Πράγματι, αυτό ισχύει εφαρμόζοντας επαγωγικά τον συνδυασμό του Λήμματος 7.3 με τον ισχυρισμό ότι για κάθε $j \leq 2 \cdot k^2 + 1$ και κάθε p, q με $1 < p < q < k$, οι εξερχόμενες κορυφές των P_{p-1} και P_{q+1} και οι εισερχόμενες κορυφές των P_p και P_q στο στρώμα L_j , y_{p-1}^j , y_{q+1}^j , x_p^j , και x_q^j αντίστοιχα εμφανίζονται στο L_j σύμφωνα με την παρακάτω δεξιόστροφη διάταξη

$$[y_{p-1}^j, x_p^j, x_q^j, y_{q+1}^j]$$

στον σφικτό τοίχο W . □

Κατασκευάζουμε αναδρομικά μία οικογένεια μονοπατιών $\tilde{P} = \{\tilde{P}_i \mid i \in [k]\}$ από την v στις $\{u_i^f \mid i \in [k]\}$ με τον ακόλουθο τρόπο.



Σχήμα 7.6: Τμήμα των αναδρομολογημένων μονοπατιών.

Θέτουμε πρώτα,

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{i_0} &= P_{i_0} [v, x_{i_0}^{j_0}] \cup F_1 \cup R_{i_0} [u_{i_0}, u_{i_0}^f] \\ \tilde{P}_{i_0+1} &= P_{i_0+1} [v, x_{i_0+1}^{j_0}] \cup F_2 \cup R_{i_0+1} [u_{i_0+1}, u_{i_0+1}^f]\end{aligned}$$

όπου το $\tilde{P}_{i_0+1}$ το θεωρούμε μόνο όταν ο k είναι άρτιος. Έπειτα, για κάθε $j \leq \lceil \frac{k-2}{2} \rceil$, θέτουμε

$$\tilde{P}_{i_0-j} = P_{i_0-j} [v, x_{i_0-j}^{j_0-j}] \cup F_j^1 \cup R_{i_0-j} [u_{i_0-j}, u_{i_0-j}^f]$$

Επιπλέον, για κάθε $j \leq \lceil \frac{k-2}{2} \rceil$, θέτουμε

$$\tilde{P}_{i_0+j} = P_{i_0+j} [v, x_{i_0+j}^{j_0-j}] \cup F_j^2 \cup R_{i_0+j} [u_{i_0+j}^j, u_{i_0+j}^f]$$

στην περίπτωση που ο k είναι περιττός, και

$$\tilde{P}_{i_0+1+j} = P_{i_0+1+j} [v, x_{i_0+1+j}^{j_0-j}] \cup F_j^2 \cup R_{i_0+1+j} [u_{i_0+1+j}^j, u_{i_0+1+j}^f]$$

στην περίπτωση που ο k είναι άρτιος.

Ο Ισχυρισμός 12 συνεπάγεται ότι τα μονοπάτια στην $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{P}_i \mid i \in [k]\}$ είναι ξένα ως προς κορυφές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. Για μια γενική προσέγγιση της θέσης των μονοπατιών στον τοίχο δείτε το Σχήμα 7.6. $\square$

Αποδεικνύουμε τώρα το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Λήμμα 7.5. Έστω ότι ο k είναι ένας θετικός ακέραιος και το G είναι ένα k -ακμοσυνεκτικό πολυγράφημα εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους *Euler* γ που περιέχει έναν υποδιαμεμένο τοίχο W ύψους τουλάχιστον $4 \cdot k^2 + 1$ σαν υπογράφημα, του οποίου η περιφέρεια C είναι εμβαπτισμένη μέσα σε έναν κλειστό δίσκο Δ . Έστω επίσης ότι το S είναι ένα σύνολο κορυφών στην περίμετρο του W των οποίων η απόσταση ανά δύο στον υποβόσκοντα μη-υποδιαμεμένο τοίχο είναι τουλάχιστον 2. Εάν $|S| \leq k$ τότε υπάρχουν μία κορυφή v στον W και $|S|$ ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στις κορυφές του S .

Απόδειξη. Έστω ότι οι $v \in A_{2k^2+1}$ και $u \in L_1$ είναι κορυφές οι οποίες ανήκουν στον κλειστό δίσκο που ορίζεται από το στρώμα $L_{2 \cdot k^2+1}$ και στην περίμετρο του τοίχου αντίστοιχα. Καθώς το G είναι k -ακμοσυνεκτικό, υπάρχουν k ξένα ως προς ακμές μονοπάτια $P_1, P_2, \dots, P_k$ τα οποία συνδέουν τις v και u . Από την Πρόταση 3.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα μονοπάτια είναι σύρροα. Έστω ότι η $\mathcal{P}' = \{P'_i \mid i \in [k]\}$ είναι η οικογένεια των μονοπατιών $P'_i = P_i[v, x_i^1]$, $i \in [k]$.

Έστω επίσης ότι το V είναι το σύνολο των κορυφών στο $V(C) \setminus (V(L_1) \cup \{v\})$ που περιέχονται σε περισσότερα από ένα μονοπάτια της $\mathcal{P}'$. Θεωρούμε το γράφημα $\hat{G}$ που προκύπτει επαγωγικά αντικαθιστώντας κάθε κορυφή $z \in V$ με το δέντρο αποκόλλησης της $\mathcal{P}'$ στην z . Από την Παρατήρηση 7.2, το

$\hat{G}$ περιέχει σαν υπογράφημα έναν τοίχο $\hat{W}$ ύψους $4 \cdot k^2 + 1$ του οποίου η περιφέρεια είναι εμβαπτισμένη στον Δ . Ας προσέξουμε επίσης ότι, καθώς δεν έχουν συμβεί αλλαγές στις περιμέτρο του W , οι W και $\hat{W}$ μοιράζονται την ίδια περίμετρο. Επιπροσθέτως, ο $\hat{W}$ περιέχει k εσωτερικά ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την v στην περίμετρο του $\hat{W}$. Άρα, από το Λήμμα 7.4, ο $\hat{W}$ περιέχει k ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια από την v στο S . Είναι τώρα εύκολο να δούμε, συνθλιβοντας τα δέντρα T_z , $z \in V(C) \setminus (V(L_1) \cup \{v\})$, ότι ο W περιέχει k ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την v στο S . $\square$

7.3 Κεντρικό Θεώρημα

Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε το κεντρικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 7.1. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε γράφημα G εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους *Euler* γ και κάθε γράφημα H ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. $\text{tw}(G) \leq f(\gamma) \cdot \lambda \cdot k$, όπου $\lambda = \Delta(H)$ και $k = \mathbf{m}(H)$.
2. Το G δεν είναι λ -ακμοσυνεκτικό.
3. $H \leq_{im} G$.

Απόδειξη. Έστω η

$$f(\gamma, \lambda, k) = 48 \cdot (\gamma + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{4(4\lambda + 1)k}{2} + 5 \right),$$

και ας υποθέσουμε ότι $\text{tw}(G) \geq f(\gamma, \lambda, k)$ και ότι το G είναι λ -ακμοσυνεκτικό. Από το Λήμμα 7.1, προκύπτει ότι το G περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαιρεμένο τοίχο W ύψους $2 \cdot (2\lambda + 1)k$ του οποίου η περιφέρεια είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο.

Σε ότι ακολουθεί θα κατασκευάσουμε, χρησιμοποιώντας τον τοίχο, ένα μοντέλο του H στην περιφέρεια του τοίχου. Από το Λήμμα 7.2, το H επιδέχεται έναν ορθογώνιο σχεδιασμό ψ σε μία

$$\left(\frac{\mathbf{m}(H) + \mathbf{n}(H)}{2} \times \frac{\mathbf{m}(H) + \mathbf{n}(H)}{2} \right)\text{-σχάρα},$$

όπου το μέγεθος του κουτιού κάθε κορυφής $v \in V(H)$ είναι

$$\frac{\deg(v) + 1}{2} \times \frac{\deg(v) + 1}{2}.$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι η ψ μπορεί να μεταμορφωθεί σε έναν ορθογώνιο σχεδιασμό ϕ στην σχάρα Γ μεγέθους

$$\left(\frac{2(4\lambda + 1)(\mathbf{m}(H) + \mathbf{n}(H))}{2} + 1 \right) \times 2 \left(\frac{2(4\lambda + 1)(\mathbf{m}(H) + \mathbf{n}(H)) + 2}{2} + 1 \right),$$

όπου το μέγεθος του κουτιού κάθε κορυφής είναι

$$(4(\deg(v))^2 + 2) \times 2(4(\deg(v))^2 + 2),$$

οι συνδετικές κορυφές κάθε κουτιού έχουν ανά δύο απόσταση τουλάχιστον δύο στην περίμετρο του κουτιού και καμμία συνδετική κορυφή δεν είναι γωνία του κουτιού.

Επιπλέον, για κάθε κορυφή $u \in \mathbf{Im}(\phi) \setminus \bigcup_{v \in V(H)} \Gamma(v)$ βαθμού 4, δηλαδή, για κάθε κορυφή στην εικόνα της ϕ που βρίσκεται στην τομή δύο μονοπατιών, υπάρχει ένα κουτί στη σχάρα μεγέθους $(4\deg(u)^2 + 2) \times 2(4\deg(u)^2 + 2)$, το οποίο συμβολίζουμε με $Q(u)$, και περιέχει μόνο αυτή την κορυφή και κορυφές των μονοπατιών στα οποία ανήκει. Συμβολίζουμε με u^i , $i \in [4]$, τις κορυφές της $\mathbf{Im}(\phi)$ που ανήκουν στο σύνορο του $Q(u)$ και, για ομοιομορφία, τις καλούμε κι αυτές *συνδετικές κορυφές του $Q(u)$* .

Προς τον εντοπισμό ενός μοντέλου του H στην περιφέρεια του τοίχου ας προσέξουμε ότι η σχάρα Γ περιέχει σαν υπογράφημα έναν τοίχο ύψους

$$(4\lambda + 1)(\mathbf{m}(H) + \mathbf{n}(H))$$

τέτοιον ώστε κάθε ένα από τα κουτιά, είτε κάποιο $\Gamma(v)$, $v \in V(H)$, είτε κάποιο $Q(v)$, όπου η v είναι η κοινή κορυφή δύο μονοπατιών στην εικόνα της ϕ περιέχει έναν τοίχο $W(v)$ ύψους $4 \deg(v)^2 + 1$ και οι συνδετικές κορυφές της $\Gamma(v)$ (οι κορυφές v^i , $i \in [4]$, αντίστοιχα) ανήκουν στην περίμετρο του τοίχου και έχουν απόσταση τουλάχιστον δύο σε αυτήν.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση του H στον W όπου τα κουτιά $\Gamma(v)$ και $Q(v)$ απεικονίζονται σε υποτοίχους $W(v)$ του W ύψους $4 \deg(v)^2 + 1$ και συνδέονται από ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια όπως αυτά ενάγονται από τον ορθογώνιο σχεδιασμό ϕ . Από το Λήμμα 7.5, καθώς κάθε $W(v)$ έχει ύψος $4 \deg(v)^2 + 1$ και η περιφέρεια του είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο, υπάρχουν μία κορυφή $z_v \in V(W(v))$ και $\deg(v)$ ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την z_v στις συνδετικές κορυφές του $W(v)$. Είναι τώρα εύκολο να δούμε ότι η περιφέρεια του W , και άρα το G , περιέχει ένα μοντέλο του H . $\square$

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 7.1 είναι ότι.

Πόρισμα 7.1. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε γράφημα G εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους $E\ddot{u}ler$ γ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. $\text{tw}(G) \leq f(\gamma) \cdot k^3$.
2. Το G δεν είναι k -ακμοσυνεκτικό.
3. $K_{k+1} \leq_{im} G$.

Ας προσέξουμε επίσης ότι για την περίπτωση όπου το γράφημα H είναι η $(k \times k)$ -σχάρα τότε από το Θεώρημα 7.1 έπεται ότι.

Πόρισμα 7.2. Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε γράφημα G εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους $E\ddot{u}ler$ γ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

1. $\mathbf{tw}(G) \leq f(\gamma) \cdot k^2$.
2. Το G δεν είναι k -ακμοσυνεκτικό.
3. Η $(k \times k)$ -σχάρα είναι εμβύθιση του G .

Ωστόσο, ένας ευθύς ισχυρισμός δείχνει ότι.

Θεώρημα 7.2 (Θεώρημα Αποκλεισμένης Σχάρας για Εμβυθίσεις). Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε γράφημα G εμβαπτισμένο σε μία επιφάνεια γένους $E\ddot{u}ler$ γ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. $\mathbf{tw}(G) \leq f(\gamma) \cdot k$.
2. Το G δεν είναι 4-ακμοσυνεκτικό.
3. Η $(k \times k)$ -σχάρα είναι εμβύθιση του G .

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση

$$f(\gamma, k) = 48 \cdot (\gamma + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot ((4^3 + 3) \cdot k + 5).$$

Έστω ότι το G είναι 4-ακμοσυνεκτικό και ότι $\mathbf{tw}(G) \geq f(\gamma, k)$. Από το Λήμμα 7.1, αφού $\mathbf{tw}(G) \geq f(\gamma, k)$, έπεται ότι το G περιέχει σαν υπογράφημα έναν υποδιαιρεμένο τοίχο W ύψους $(4^3 + 3)k$, του οποίου η περιφέρεια στο G είναι εμβαπτισμένη σε έναν κλειστό δίσκο Δ .

Ας θεωρήσουμε τους k^2 υποτοίχους του W ύψους $(4^3 + 1)$ που προκύπτουν μετά την αφαίρεση από τον τοίχο των μονοπατιών, $P_{(4^3+3)j}^{[v]}$, $P_{(4^3+3)j}^{[h]}$, $i, j \in [k]$. Για κάθε $i, j \in [k]$, ας συμβολίσουμε με $W_{(i,j)}$ τον υποτοίχο που περιέχεται εντός του δίσκου που ορίζεται από τα μονοπάτια $P_{(4^3+3)(i-1)}^{(h)}$, $P_{(4^3+3)i}^{(h)}$, $P_{(4^3+3)(j-1)}^{[v]}$, και $P_{(4^3+3)j}^{[v]}$. Στην περίπτωση όπου $j = 1$ και $i = 1$,

θεωρούμε καταχρηστικά ως $P_{(4^3+3)(j-1)}^{(h)}$ και $P_{(4^3+3)(j-1)}^{[v]}$ τα μονοπάτια $P_1^{(h)}$ και $P_1^{[v]}$, αντίστοιχα.

Από το Λήμμα 7.5 και την υπόθεση ότι το G είναι 4-ακμοσυνεκτικό, για $k = 4$, προκύπτει ότι στην περιφέρεια κάθε ενός από αυτούς τους υποτοίχους $\{W_{(i,j)} \mid i, j \in [k]\}$ υπάρχει μία κορυφή $v_{(i,j)}$ και τέσσερα ξένα ως προς ακμές μονοπάτια από την $v_{(i,j)}$ στις κορυφές $v_{(i,j)}^n, v_{(i,j)}^s, v_{(i,j)}^w$, και $v_{(i,j)}^e$, οι οποίες βρίσκονται στο βορειότερο, το νοτιότερο, το δυτικότερο, και το ανατολικότερο μονοπάτι του τοίχου, αντίστοιχα.

Τέλος, θεωρούμε την απεικόνιση $g((i, j)) = v_{(i,j)}$ που απεικονίζει την (i, j) κορυφή της $(k \times k)$ -σχάρας στην κορυφή $v_{(i,j)}$ του τοίχου $W_{(i,j)}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι ένα μοντέλο εμβύθισης της $k \times k$ -σχάρας στην περιφέρεια του τοίχου W και το θεώρημα έπεται καθώς η f είναι γραμμική στο k . $\square$

Το Θεώρημα 7.2 επιβεβαιώνει ότι ένα γράφημα το οποίο είναι εμβαπτίσιμο σε μία επιφάνεια γένους Euler γ και το οποίο έχει αρκετά μεγάλο δεντροπλάτος και αρκετά μεγάλη ακμοσυνεκτικότητα περιέχει μία αρκετά μεγάλη σχάρα σαν εμβύθιση. Θεωρήματα τα οποία διασφαλίζουν την ύπαρξη μεγάλων σχαρών μέσα σε γραφήματα ονομάζονται θεωρήματα αποκλεισμένων σχαρών (excluded grid theorem) και όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην Θεωρία Δισδιαστατότητας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Παραμετρική Πολυπλοκότητα και η Θεωρία Δισδιαστατότητας

8.1 Εισαγωγή στην Παραμετρική Πολυπλο- κότητα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 5, ο μετά-αλγόριθμος που προκύπτει από τα αποτελέσματα των P. Seymour και N. Robertson και αναγνωρίζει, σε κυβικό χρόνο, τις κλάσεις γραφημάτων οι οποίες είναι κλειστές ως προς ελάσσονα είχε ως συνέπεια την παρατήρηση ότι τα NP-πλήρη προβλήματα παρουσιάζουν «διαφορετικά επίπεδα δυσκολίας».

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τα προβλήματα k -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ και k -ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ.

k -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ (k -VERTEX COVER)*Είσοδος:* Ένα γράφημα G και ένας ακέραιος k .*Παράμετρος:* k .*Ερώτηση:* Υπάρχει $S \subseteq V(G)$ με $|S| \leq k$ τέτοιο ώστε το γράφημα $G \setminus S$ να μην περιέχει ακμές; **k -ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ (k -COLORING)***Είσοδος:* Ένα γράφημα G και ένας ακέραιος k .*Παράμετρος:* k .*Ερώτηση:* Υπάρχει έγκυρος χρωματισμός των κορυφών του G με k χρώματα;

Καθώς η κλάση των γραφημάτων που έχουν κάλυμμα κορυφών μεγέθους k είναι κλειστή ως προς ελάσσονα υπάρχει ένας κυβικού χρόνου αλγόριθμος που την αναγνωρίζει (και οι κρυμμένες σταθερές του οποίου εξαρτώνται μόνο από την κλάση, δηλαδή από τον ακέραιο k).

Σε αντίθεση με το k -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ, ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το πρόβλημα του k -ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΥ δεν είναι αναμενόμενος όταν το k είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 3 αφού είναι γνωστό ότι ο 3-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ είναι NP-πλήρες πρόβλημα και ένα τέτοιο αποτέλεσμα θα σήμαινε πως $P = NP$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι, η εξάρτηση της πολυπλοκότητας των δύο προβλημάτων από τον ακέραιο k διαφέρει αισθητά. Ο στόχος της παραμετρικής πολυπλοκότητας είναι η εύρεση τρόπων επίλυσης των NP-δύσκολων προβλημάτων με μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα από την τετριμμένη τεχνική της «ωμής βίας» (brute force). Πιο συγκεκριμένα, σκοπός της είναι να περιοριστεί η εκθετική έκρηξη σε μία παράμετρο η οποία ελπίζουμε ότι είναι αρκετά μικρότερη από το μέγεθος της εισόδου.

Τυπικά, δεδομένου ενός αλφαβήτου Σ , καλούμε *παραμετροποίηση* (pa-

rameterization) του Σ^* κάθε συνάρτηση $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$. Στη συνέχεια, για κάθε πρόβλημα $L \subseteq \Sigma^*$, το ζεύγος (L, κ) , όπου κ είναι μια παραμετροποίηση του Σ^* , καλείται *παραμετροποιημένο πρόβλημα* (*parameterized problem*).

Για να διακρίνουμε τα παραμετροποιημένα προβλήματα από τα κλασικά θα χρησιμοποιούμε το πρόθεμα p -, έτσι, για παράδειγμα, το πρόβλημα ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ στην παραμετροποιημένη του μορφή θα γράφεται p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ.

Ας προσέξουμε εδώ ότι η παραμετροποίηση κ ενός προβλήματος μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση. Η κατανόηση της εξάρτησης της πολυπλοκότητας ενός παραμετροποιημένου προβλήματος από την παραμετροποίηση του αποτελεί ένα από τα σπουδαιότερα αντικείμενα μελέτης της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας. (Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την παραμετροποίηση ενός προβλήματος, δείτε την [77].)

Η τυπική παραμετροποίηση (*natural parameterization*) είναι αυτή στην οποία η παραμετροποίηση κ απεικονίζει το Σ^* στο ζητούμενο μέγεθος μιας λύσης. Για παράδειγμα, η τυπική παραμετροποίηση για το p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ είναι το μέγεθος του.

Όπως είναι γνωστό, στην Κλασική Πολυπλοκότητα υπάρχει μια σειρά από διαδοχικούς εγκλεισμούς κλάσεων πολυπλοκότητας. Σημαντικότεροι από αυτούς είναι οι:

$$L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME.$$

Αρκετές κλάσεις πολυπλοκότητας, προσεγγισμένες από τη σκοπιά της Θεωρίας Παραμετρικής Πολυπλοκότητας, και οι εγκλεισμοί τους απεικονίζονται παρακάτω:

$$FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots \subseteq W[P] \subseteq XP.$$

Εικάζεται δε ότι οι εγκλεισμοί αυτοί είναι αυστηροί. Έστω ότι το (I, k) είναι η είσοδος ενός παραμετροποιημένου προβλήματος. Λέμε ότι το πρόβλημα αυτό

ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας FPT, ή αλλιώς είναι *παραμετρικά βατό* (*fixed parameter tractable*), εάν υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος επιλύει το πρόβλημα σε χρόνο $f(k) \cdot |I|^{O(1)}$, όπου $|I|$ είναι το μέγεθος της εισόδου και η f είναι μια τυχαία υπολογίσιμη συνάρτηση η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από το k .

Παραδείγματος χάριν, από τον μετά-αλγόριθμο των N. Robertson και P. Seymour, μπορούμε να συνάγουμε ότι το πρόβλημα p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ ανήκει στην κλάση FPT. Ο παρακάτω απλός αναδρομικός αλγόριθμος επιλύει το p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ (παραμετροποιημένο ως προς το ζητούμενο μέγεθος της λύσης) σε χρόνο $2^k \cdot n$.

1. Εάν $|E(G)| = 0$, τότε επίστρεψε NAI.
2. Εάν $k = 0$, τότε επίστρεψε OXI.
3. Διάλεξε μία ακμή του γραφήματος $e = \{u, v\}$.
4. Κάλεσε αναδρομικά τον αλγόριθμο με εισόδους $(G - u, k - 1)$ και $(G - v, k - 1)$ και επίστρεψε NAI αν τουλάχιστον μία από τις εισόδους επιστρέψει NAI.

Η τεχνική που χρησιμοποιείται σε αυτό τον αλγόριθμο ονομάζεται *τεχνική φραγμένου δέντρου αναζήτησης* (*depth-bounded search tree*). Για περισσότερα σε αυτή την τεχνική, δείτε, για παράδειγμα, στις [15, 30, 32, 80, 84, 107, 173–175]. Για περισσότερα σε αλγοριθμικές τεχνικές, δείτε στις [11, 34, 47, 89, 108, 128, 148, 184, 215].

Στο πλαίσιο της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας, η κλάση των παραμετρικά βατών προβλημάτων είναι αντίστοιχη της κλάσης των πολυωνυμικά επιλύσιμων προβλημάτων στην Κλασική Πολυπλοκότητα.

Παρόμοια με τις πολυωνυμικού χρόνου και λογαριθμικού χώρου αναγωγές στην Κλασική Πολυπλοκότητα, ορίζονται στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα

οι FPT αναγωγές. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε δύο παραμετροποιημένα προβλήματα (L, κ) και (L', κ') πάνω στα αλφάβητα Σ και Σ' αντίστοιχα. Μια συνάρτηση $R : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ καλείται **FPT αναγωγή** (FPT reduction) του προβλήματος (L, κ) στο πρόβλημα (L', κ') εάν ισχύουν τα εξής:

1. Για κάθε $x \in \Sigma^*$, το x ανήκει στην L εάν και μόνο εάν $R(x)$ ανήκει στην L' ,
2. Το πρόβλημα υπολογισμού της R ανήκει στο FPT με παράμετρο $\kappa(x)$, δηλαδή υπολογίζεται σε χρόνο $f(\kappa(x)) \cdot |x|^{O(1)}$, όπου η f είναι μία υπολογίσιμη συνάρτηση, και
3. Υπάρχει υπολογίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Sigma^*$, $\kappa'(R(x)) \leq g(\kappa(x))$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η κλάση πολυπλοκότητας FPT είναι κλειστή ως προς FPT αναγωγές. Οι ορισμοί των δύσκολων και πλήρων προβλημάτων στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα είναι αντίστοιχοι με τους ορισμούς της Κλασικής Πολυπλοκότητας αν, αντί για πολυωνυμικού χρόνου αναγωγές, θεωρήσουμε FPT αναγωγές.

Όπως η NP-δυσκολία ενός προβλήματος αποτελεί ένδειξη ότι ένα πρόβλημα δεν είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο σε όρους της Κλασικής Πολυπλοκότητας, έτσι και η απόδειξη ότι ένα πρόβλημα είναι δύσκολο για κάποια από τις κλάσεις πολυπλοκότητας $W[1]$, $W[2]$, $\dots$, $W[P]$, και XP αποτελεί ένδειξη ότι ένα πρόβλημα δεν είναι παραμετρικά βατό.

Οι κύριες κλάσεις σε αυτή την ιεραρχία είναι οι: Το βασικό ανάλογο της κλάσης πολυπλοκότητας NP είναι η $W[1]$, η οποία είναι ένα ισχυρό ανάλογο, καθώς ένα θεμελιώδες πρόβλημα το οποίο είναι πλήρες στην $W[1]$ είναι το πρόβλημα του ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ k -ΒΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΗ-ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ TURING (k -STEP HALTING PROBLEM FOR NONDETERMINISTIC TURING MACHINES) (με απεριόριστα μη-ντετερμινισμό και μέγεθος αλφάβητου)

— αυτό το αποτέλεσμα πληρότητας παρέχει ένα ανάλογο του Θεωρήματος του Cook της Κλασικής Πολυπλοκότητας. Για την ακρίβεια, αυτό σημαίνει ότι ένας FPT αλγόριθμος για οποιοδήποτε $W[1]$ -δύσκολο πρόβλημα θα έδινε έναν αλγόριθμο χρόνου $O(f(k)n^c)$ για το πρόβλημα του ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ k -ΒΗΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΗ-ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ TURING. Μία πηγή για αναγωγές $W[1]$ -δυσκολίας παρέχεται από το αποτέλεσμα ότι το πρόβλημα k -ΚΛΙΚΑ (k -CLIQUE) είναι πλήρες για την $W[1]$. Το k -ΣΥΝΟΛΟ ΚΥΤΡΙΑΡΧΙΑΣ είναι πλήρες στην $W[2]$ και η XP είναι η κλάση όλων των προβλημάτων που επιλύονται σε χρόνο $O(n^{g(k)})$. Θα θέλαμε επίσης εδώ να σημειώσουμε την ύπαρξη της κλάσης para-NP η οποία αποτελείται από όλα τα προβλήματα τα οποία επιλύονται σε χρόνο FPT από μία μη-ντετερμινιστική μηχανή Turing. Για εκτεταμένη εισαγωγή στην Παραμετρική Πολυπλοκότητα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [66, 82, 172].

8.2 Τοπολογικά Ελάσσονα Απόστασης

8.2.1 Παράγοντες σε Γραφήματα

Στην [67], οι F. Dragan, F. Fomin, και P. Golovach απέδειξαν ότι το πρόβλημα k -ΔΕΝΤΡΟΠΛΑΤΟΣ t -ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ (k -TREE-WIDTH t -SPANNER) είναι παραμετρικά βατό όταν περιοριστούμε στην κλάση των γραφημάτων που αποκλείουν κάποιο απόγειο γράφημα H σαν ελάσσον.

Για την απόδειξη αυτή έδειξαν πρώτα ότι:

Θεώρημα 8.1 ([67]). Έστω ότι το G είναι ένα επίπεδο γράφημα και το S είναι ένας t -παράγοντας του G . Εάν το δέντροπλάτος του G είναι k τότε το δέντροπλάτος του S είναι $\Omega\left(\frac{k}{t}\right)$.

Κατόπιν χρησιμοποίησαν τις ιδέες της απόδειξής του για να δείξουν το εξής γενικότερο ενδιάμεσο συνδυαστικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.2 ([67]). Έστω H ένα απόγειο γράφημα. Για κάθε t -παράγοντα S ενός γραφήματος G , το οποίο δεν περιέχει το H σαν ελάσσον, το δεντροπλάτος του S είναι $\Omega(\mathbf{tw}(G))$ (όπου οι κρυμμένες σταθερές στο Ω εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του H και το t).

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στο Θεώρημα των E. Demaine και M. Hajiaghayi το οποίο εγγυάται την ύπαρξη μιας αρκετά μεγάλης σχάρας σε ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει κάποιο γράφημα H σαν ελάσσον και έχει αρκετά μεγάλο δεντροπλάτος (δείτε το Θεώρημα 6.2).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 8.2, ωστόσο, καταλαμβάνει αρκετές σελίδες και χρειάζεται να εμβαθύνει ιδιαίτερα στην Θεωρία Ελασσόνων Γραφημάτων. Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε πως μπορούμε να επεκτείνουμε το Θεώρημα 6.1 έτσι ώστε να αποδείξουμε το Θεώρημα 8.2 με έναν απλούστερο τρόπο. Ας ξεκινήσουμε όμως με τον ορισμό του t -παράγοντα.

Έστω t ένας θετικός ακέραιος, G ένα γράφημα, και S ένα παραγόμενο υπογράφημα του G . Λέμε ότι το S είναι ένας (πολλαπλασιαστικός) t -παράγοντας ((multiplicative) t -spanner) του G εάν για κάθε $u, v \in V(G)$, $\mathbf{dist}_S(u, v) \leq t \cdot \mathbf{dist}_G(u, v)$. Το t ονομάζεται συντελεστής έκτασης (stretch factor) του S .

Λέμε επίσης ότι ένα γράφημα H είναι τοπολογικό ελάσσον απόστασης (distance topological minor) ενός γραφήματος G εάν $H \leq_{tm} G$ και για κάθε $u, v \in V(H)$, ισχύει ότι $\mathbf{dist}_H(u, v) \leq \mathbf{dist}_G(u, v)$.

Θα αποδείξουμε τώρα δύο λήμματα τα οποία, σε συνδυασμό με το Πρόσμα 6.1, μας επιτρέπουν να βρούμε τον τοίχο ύψους k σαν τοπολογικό ελάσσον απόστασης σε ένα γράφημα G το οποίο δεν περιέχει ένα συγκεκριμένο απόγειο γράφημα H σαν ελάσσον και έχει αρκετά μεγάλο δεντροπλάτος.

Λήμμα 8.1. Έστω ότι οι k και d θετικοί ακέραιοι, το G είναι ένα γράφημα το οποίο περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαμεμένο τοίχο W ύψους k σαν υπογράφημα,

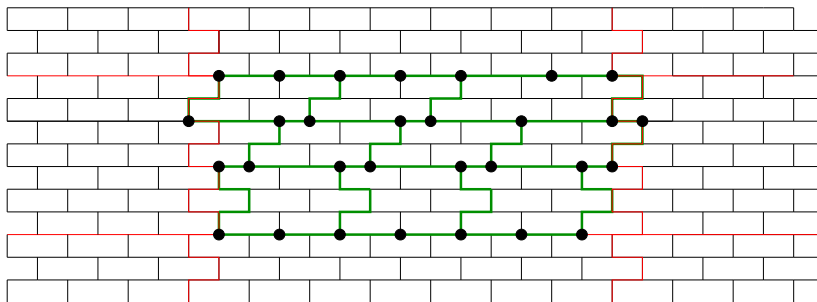
και $x, y \in V(W)$. Εάν υπάρχουν d ξένοι ως προς κορυφές κύκλοι $C_i, i \in [d]$, στην περιφέρεια του W οι οποίοι διαχωρίζουν τις x και y και τέτοιοι ώστε $C_i \neq P, i \in [d]$, όπου P είναι η περίμετρος του W , τότε $\mathbf{dist}_G(x, y) > d$.

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε πρώτα ότι, συμβολίζουμε με $c_i, i \in [4]$, τις γωνίες του τοίχου σύμφωνα με τη σειρά που εμφανίζονται στην περίμετρό του P , δηλαδή, τα ζεύγη $\{c_1, c_3\}$ και $\{c_2, c_4\}$ είναι τα ζεύγη των αντιδιαμετρικών γωνιών.

Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχουν d ξένοι κύκλοι $C_i, i \in [d]$, στην περιφέρεια του W που διαχωρίζουν τις κορυφές x και y αλλά $\mathbf{dist}_W(x, y) \leq d$. Έστω ότι το Q είναι ένα συντομότερο μονοπάτι με άκρα τις x και y . Αφού η απόσταση μεταξύ των x και y είναι το πολύ d και το Q είναι ένα συντομότερο δυνατό μονοπάτι, τότε το Q περιέχει το πολύ $d-2$ εσωτερικές κορυφές. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in [d]$ τέτοιο ώστε ο κύκλος C_i και το μονοπάτι Q να είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή, $V(C_i) \cap V(Q) = \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να βρούμε δύο ξένα ως προς κορυφές μονοπάτια με άκρα c_1, c_3 και c_2, c_4 . Αυτό όμως αντιφάσκει στο γεγονός ότι ο τοίχος είναι ισόπεδος. Άτοπο, άρα το λήμμα ισχύει. $\square$

Λήμμα 8.2. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Εάν το G είναι ένα γράφημα το οποίο περιέχει έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο W ύψους $6 \cdot k + 1$ σαν υπογράφημα, τότε το G περιέχει τον W_k σαν τοπολογικό ελάσσον απόσταση.

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε ότι ο W έχει $6k+1$ κάθετα και $6k+1$ οριζόντια μονοπάτια, $P_1^{[v]}, P_2^{[v]}, \dots, P_{6k+2}^{[v]}$ και $P_1^{(h)}, P_2^{(h)}, \dots, P_{6k+2}^{(h)}$. Ας θεωρήσουμε τον υποτοίχο του W του οποίου η περίμετρος είναι ο κύκλος που ορίζεται από τα μονοπάτια $P_{k+1}^{[v]}, P_{5k+1}^{[v]}, P_{k+1}^{(h)}, P_{5k}^{(h)}$. Αυτός είναι ένας τοίχος ύψους $2k+1$. Είναι εύκολο τώρα να δούμε, από το Λήμμα 8.1, ότι μέσα σε αυτόν τον τοίχο μπορούμε να βρούμε τον τοίχο ύψους k σαν τοπολογικό ελάσσον απόσταση. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 8.1.) $\square$



Σχήμα 8.1: Ο τοίχος W_3 ως τοπολογικό ελάχιστον απόστασης ενός ισόπεδου τοίχου ύψους 13.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.3 (Θεώρημα Αποκλεισμένης Σχάρας για Τοπολογικά Ελάχιστα Απόστασης). Υπάρχει μία υπολογίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε δύο γραφήματα H και G , όπου το H είναι απόγειο, και $k \in \mathbb{N}$, εάν $\text{tw}(G) \geq f(\mathbf{n}(H)) \cdot k$ και το G δεν περιέχει το H σαν ελάχιστον, τότε το G περιέχει το W_k σαν τοπολογικό ελάχιστον απόστασης.

Απόδειξη. Έστω ότι το G δεν περιέχει το H ως ελάχιστον και έστω ότι $\text{tw}(G) \geq f(\mathbf{n}(H)) \cdot (6k + 1)$, όπου f είναι η συνάρτηση του Πορίσματος 6.1. Τότε, από το Πόρισμα 6.1, το G περιέχει σαν υπογράφημα έναν ισόπεδο υποδιαιρεμένο τοίχο ύψους $6 \cdot k + 1$. Άρα, από το Λήμμα 8.2, το G περιέχει τον τοίχο ύψους k σαν τοπολογικό ελάχιστον απόστασης. $\square$

Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 8.1 στην [67] και εφαρμόζοντας αυτό το γενικότερο θεώρημα, είναι εύκολο να δούμε ότι, προκύπτει το Θεώρημα 8.2.

8.2.2 Πλαχοστρώσεων Συμπλήρωμα ...

Όπως παρατηρήσαμε στο Σχόλιο 3, τα Θεωρήματα 6.3 και 6.4 επεκτείνουν την δυϊκότητα των κανονικών πλαχοστρώσεων με τρίγωνα και εξάγωνα στον κόσμο των γραφημάτων που αποκλείουν ένα απόγειο γράφημα σαν ελάχιστον και έχουν αρκετά μεγάλο δεντροπλάτος. Θα θέλαμε εδώ να παρατηρήσουμε επίσης το παρακάτω.

Σχόλιο 4. Οι σχέσεις της σύνθλιψης και του τοπολογικού ελάχιστου απόστασης είναι δυϊκές.

8.3 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας και οι Υποεκθετικοί Αλγόριθμοι

8.3.1 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας για Συνθλίψεις και Ελάσσονα

Όπως συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, σκοπός της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας είναι η βαθύτερη κατανόηση της εξάρτησης της πολυπλοκότητας των «δύσκολων προβλημάτων» από την παράμετρο k . Σε αυτή την ενότητα ασχολούμαστε αποκλειστικά με προβλήματα τα οποία είναι παραμετρικά βατά, δηλαδή, επιλύονται σε χρόνο $f(k) \cdot n^{O(1)}$, όπου η $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ είναι μια υπολογίσιμη συνάρτηση, και πιο συγκεκριμένα με τη συνάρτηση f .

Από τα αποτελέσματα στις [28, 82, 126] υπάρχουν ενδείξεις σύμφωνα με τις οποίες όταν η είσοδος ενός παραμετροποιημένου προβλήματος, με παράμετρο k , είναι ένα οποιοδήποτε γράφημα τότε η κατασκευή ενός FPT αλγόριθμου για το πρόβλημα τέτοιου ώστε $f(k) = 2^{o(k)}$ δεν είναι αναμενόμενη. Παρ' όλα αυτά όμως, μετά από μια σειρά αποτελεσμάτων, άρχισε να γίνεται εμφανές ότι για αρκετά προβλήματα, εάν η είσοδος του αλγόριθμου περιοριστεί σε ειδικές κλάσεις γραφημάτων, όπως για παράδειγμα στην κλάση των επίπεδων γραφημάτων, τότε αυτά επιλύονται από έναν FPT αλγόριθμο με $f(k) = 2^{o(k)}$

(δείτε, για παράδειγμα, στις [6, 7, 48–50, 52–55, 64, 87, 92]). Ένας τέτοιος FPT αλγόριθμος ονομάζεται *υποεκθετικός*.

Η Θεωρία Δισδιαστατότητας (Bidimensionality Theory) παρουσιάζει μια γενικότερη τεχνική από την οποία απορρέει η ύπαρξη υποεκθετικών αλγορίθμων όταν ικανοποιούνται δύο συγκεκριμένες προϋποθέσεις, μια μαθηματική και μία αλγοριθμική, όπως θα δούμε παρακάτω. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον μάλιστα της Θεωρίας Δισδιαστατότητας έγκειται στο γεγονός ότι, παρότι τα αποτελέσματα της είναι κυρίως αλγοριθμικά, βασίζεται σε θεμελιώδη μαθηματικά θεωρήματα της Θεωρίας Ελασσόνων Γραφημάτων.

Μία εξειδικευμένη μορφή του θεωρήματος που αποτελεί το θεμελιώδη μαθηματικό λίθο της Θεωρίας Δισδιαστατότητας είναι η εξής:

Θεώρημα 8.4 ([197]). Έστω $k \in \mathbb{N}$. Εάν το G είναι ένα επίπεδο γράφημα το οποίο δεν περιέχει την $(k \times k)$ -σχάρα ως ελάσσον τότε $\text{tw}(G) \leq 6k - 5$.

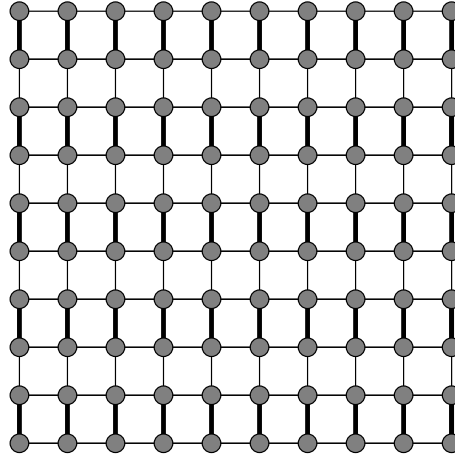
Ονομάζουμε μία παράμετρο P *δισδιάστατη* ως προς ελάσσονα με πυκνότητα δ εάν

1. Η P είναι κλειστή ως προς ελάσσονα και
2. Εάν R είναι η $(r \times r)$ -σχάρα τότε $P(R) = (\delta r)^2 + o((\delta r)^2)$.

Για παράδειγμα στο Σχήμα 8.2 μπορεί κανείς να δει ότι η παράμετρος του καλύμματος κορυφών είναι δισδιάστατη με πυκνότητα $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Παρόμοια ονομάζουμε μία παράμετρο P *δισδιάστατη* ως προς συνθλίψεις με πυκνότητα δ εάν

1. Η P είναι κλειστή ως προς συνθλίψεις και
2. Εάν Γ_k είναι η $(r \times r)$ -τριγωνοποιημένη σχάρα τότε $P(\Gamma_k) = (\delta r)^2 + o((\delta r)^2)$.



Σχήμα 8.2: Η δισδιαστατότητα του καλύμματος κορυφών.

Η Θεωρία Δισδιαστατότητας έχει καθιερωθεί σε παραμέτρους οι οποίες είναι κλειστές ως προς ελάσσονα ή συνθλίψεις και για τις οποίες, το παραμετροποιημένο πρόβλημα υπολογισμού της παραμέτρου, με παράμετρο το δέντροπλάτος του εισαγόμενου γραφήματος, επιλύεται από έναν FPT αλγόριθμο που τερματίζει μετά από $2^{O(\text{tw}(G))}n^{O(1)}$ βήματα. (Δείτε, το Σχήμα 8.3.)

Έστω, για παράδειγμα, η παρακάτω παραμετροποίηση του p -ΚΑΛΥΜΜΑΤΟΣ ΚΟΡΥΦΩΝ.

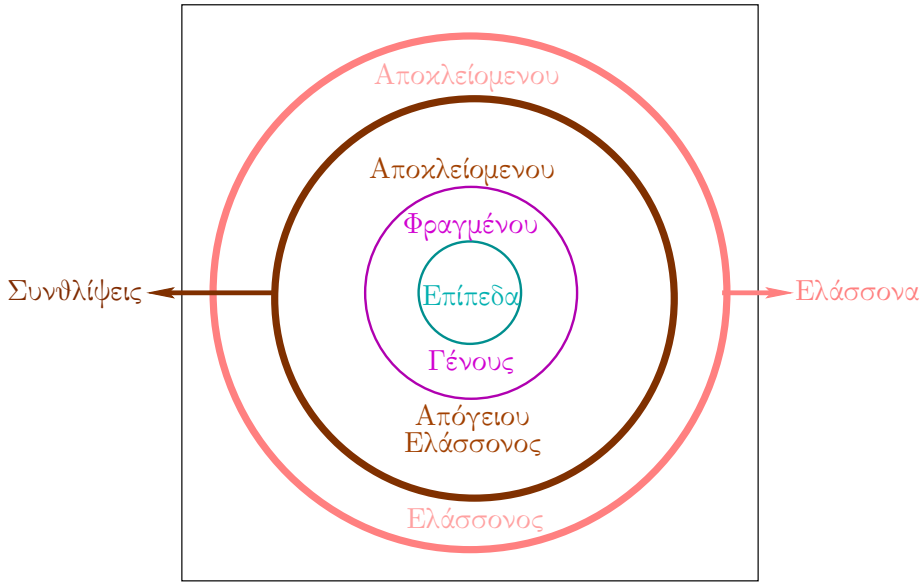
p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ

Είσοδος: Ένα γράφημα G και ένας ακέραιος k .

Παράμετρος: $\text{tw}(G)$.

Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq V(G)$ με $|S| \leq k$ τέτοιο ώστε το γράφημα $G \setminus S$ να μην περιέχει ακμές;

Σύμφωνα με αποτελέσματα του F. Dorn στην [65] υπάρχει ένας αλγόριθμος που επιλύει το πρόβλημα σε χρόνο $2^{O(\text{tw}(G))}n^{O(1)}$. Ας προσέξουμε όμως



Σχήμα 8.3: Η Θεωρία Δισδιαστατότητας σε ελάσσονα και συνθλίψεις.

ότι από το γεγονός ότι το κάλυμμα κορυφών είναι δισδιάστατο ως προς ελάσσονα συνεπάγεται το ακόλουθο. Εάν το δεντροπλάτος του γραφήματος είναι $\Omega(\sqrt{k})$ τότε το γράφημα περιέχει την σχάρα μεγέθους $(2\sqrt{k} \times 2\sqrt{k})$, η οποία δεν περιέχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους k . Τότε, μπορούμε αμέσως να απαντήσουμε ότι ούτε το G έχει κάλυμμα κορυφών μεγέθους k . Εν συντομία, ένας υποεκθετικός αλγόριθμος για το p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ, όπου η είσοδος είναι κάποιο γράφημα G το οποίο δεν περιέχει κάποιο γράφημα H σαν ελάσσον, ακολουθεί τα παρακάτω βήματα.

1. Εκτελείται ο αλγόριθμος του Amir που υπολογίζει προσεγγιστικά το δεντροπλάτος, με σταθερό συντελεστή. [12]
2. Εάν $\text{tw}(G) = \Omega(f(\mathbf{n}(H)))\sqrt{k}$ τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει ΟΧΙ, διαφορετικά $\text{tw}(G) = O(f(\mathbf{n}(H)))\sqrt{k}$.

3. Εκτελείται ο αλγόριθμος που υπολογίζει το κάλυμμα κορυφών σε χρόνο $2^{O(\text{tw}(G))}n^{O(1)}$.

Αφού $\text{tw}(G) = O(f(\mathbf{n}(H)))\sqrt{k}$ καταλήγουμε ότι το p -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΤ-ΦΩΝ μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $2^{O(\sqrt{k})}n^{O(1)}$.

8.3.2 Η Θεωρία Δισδιαστατότητας για Τοπολογικά Ελάσσονα

Αν και μέχρι στιγμής η δισδιαστατότητας των παραμέτρων έχει οριστεί μόνο σε παραμέτρους κλειστές ως προς ελάσσονα ή συνθλίψεις, αντίστοιχα με πριν, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της δισδιαστατότητας για παραμέτρους οι οποίες είναι κλειστές ως προς τοπολογικά ελάσσονα ή τοπολογικά ελάσσονα απόστασης.

Ονομάζουμε μία παράμετρο P *δισδιάστατη ως προς τοπολογικά ελάσσονα με πυκνότητα δ εάν*

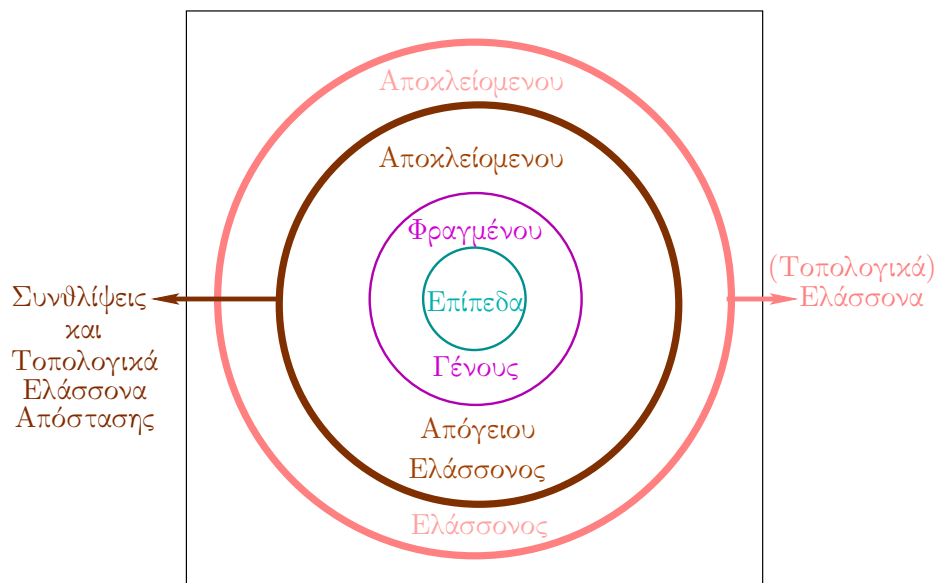
1. Η P είναι κλειστή ως προς τοπολογικά ελάσσονα και
2. Εάν W_k είναι ο τοίχος ύψους k τότε $P(W_k) = (\delta k)^2 + o((\delta k)^2)$.

Παρόμοια, ονομάζουμε μία παράμετρο P *δισδιάστατη ως προς τοπολογικά ελάσσονα απόστασης με πυκνότητα δ εάν*

1. Η P είναι κλειστή ως προς τοπολογικά ελάσσονα απόστασης και
2. Εάν W_k είναι ο τοίχος ύψους k τότε $P(W_k) = (\delta k)^2 + o((\delta k)^2)$.

Όμοια με πριν, αν υπάρχει ένας FPT αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει την παράμετρο σε χρόνο απλά εκθετικό στο δέντροπλάτος, τότε τα Θεωρήματα 6.4 και 8.3 μας εγγυώνται την ύπαρξη ενός υποεκθετικού αλγόριθμου για την παράμετρο αυτή στην περίπτωση που η είσοδός μας είναι ένα γράφημα που αποκλείει κάποιο γράφημα H ως ελάσσον. Σημειώνουμε εδώ ότι στην περίπτωση που η παράμετρος είναι κλειστή ως προς τοπολογικά ελάσσονα

απόστασης τότε απαιτείται επιπλέον το γράφημα H να είναι απόγειο. (Δείτε, το Σχήμα 8.4.)



Σχήμα 8.4: Η πλήρης Θεωρία Δισδιαστατότητας.

8.4 Εφαρμογή στην Κυριαρχία Κύκλων και το Σύνολο Σκεδασμένων Κύκλων

8.4.1 Εισαγωγή στην Ιδιότητα Erdős-Pósa

Το 1965, οι P. Erdős και L. Pósa απέδειξαν ότι υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, δοσμένου οποιουδήποτε $k \in \mathbb{N}$, κάθε γράφημα περιέχει είτε k ξένους ως προς κορυφές κύκλους είτε ένα σύνολο από το

πολύ

$$f(k) = \begin{cases} 4k \log k + 4k \log \log k + 17k - 1 & \text{εάν } k \geq 2 \\ 1 & \text{εάν } k = 1 \end{cases} \quad (8.1)$$

κορυφές που συναντάνε όλους τους κύκλους του, δείτε την [76].

Γενικότερα, έστω ότι η $\mathcal{H}$ είναι μία (όχι κατ' ανάγκη πεπερασμένη) οικογένεια γραφημάτων. Μία συσκευασία (*packing*) της $\mathcal{H}$ στο G είναι ένα σύνολο από ξένα ως προς κορυφές υπογραφήματα του G ισομορφικά με κάποιο γράφημα στην $\mathcal{H}$. Το μέγεθος της συσκευασίας είναι ίσο με το πλήθος των ξένων ως προς κορυφές υπογραφημάτων. Ο αριθμός συσκευασίας (*packing number*) της $\mathcal{H}$ στο G , ο οποίος συμβολίζεται με $\nu_{\mathcal{H}}(G)$, είναι ίσος με το μέγιστο μέγεθος μίας συσκευασίας στο G . Η δυϊκή έννοια της συσκευασίας γραφημάτων είναι η έννοια του καλύμματος. Ένα κάλυμμα (*covering*) της $\mathcal{H}$ στο G είναι ένα σύνολο κορυφών S στο G τέτοιο ώστε το γράφημα $G \setminus S$ δεν περιέχει οποιοδήποτε γράφημα που είναι ισομορφικό με κάποιο γράφημα στην $\mathcal{H}$. Το μέγεθος ενός καλύμματος S ισούται με το $|S|$. Ο αριθμός καλύμματος (*covering number*) της $\mathcal{H}$ στο G , ο οποίος συμβολίζεται με $\tau_{\mathcal{H}}(G)$, είναι ίσος με το ελάχιστο μέγεθος ενός καλύμματος στο G .

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε το ακόλουθο.

Παρατήρηση 8.1. Έστω ότι η $\mathcal{H}$ είναι μία οικογένεια γραφημάτων και το G είναι ένα γράφημα. Εάν $\nu_{\mathcal{H}}(G) \geq k$ τότε $\tau_{\mathcal{H}}(G) \geq k$.

Έστω ότι η $\mathcal{H}$ είναι η οικογένεια όλων των κύκλων. (Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο S για το οποίο $|S| = \tau_{\mathcal{H}}(G)$ καλείται επίσης σύνολο ανάδρασης κορυφών (*feedback vertex set*) του G .) Τότε το θεώρημα των Erdős και Pósa μπορεί να επαναδιατυπωθεί όπως παρακάτω.

Θεώρημα 8.5. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα και $k \in \mathbb{N}$. Εάν $\nu_{\mathcal{H}}(G) < k$ τότε $\tau_{\mathcal{H}}(G) \leq f(k)$, όπου η f είναι η συνάρτηση (8.1) και η $\mathcal{H}$ είναι η οικογένεια όλων των κύκλων.

Η ιδιότητα Erdős-Pósa μιας κλάσης γραφημάτων $\mathcal{H}$. Λέμε ότι μία οικογένεια γραφημάτων $\mathcal{H}$ έχει την ιδιότητα Erdős-Pósa (*Erdős-Pósa property*) εάν υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\nu_{\mathcal{H}}(G) \leq \tau_{\mathcal{H}}(G) \leq f(\nu_{\mathcal{H}}(G)).$$

Δείχθηκε από τον R. Diestel στην [60] ότι εάν η $\mathcal{H}$ είναι η κλάση όλων των γραφημάτων που μπορούν να συνθλιβούν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο γράφημα H , τότε η $\mathcal{H}$ έχει την ιδιότητα Erdős-Pósa για μια εκθετική συνάρτηση f . Το φράγμα στην f έγινε αργότερα γραμμικό από τους F. Fomin, S. Saurabh, και D. M. Thilikos για την περίπτωση όπου το G ανήκει σε μία συγκεκριμένη μη-τετριμμένη κλάση γραφημάτων $\mathcal{G}$ η οποία είναι κλειστή ως προς ελάσσονα [91].

Στην περίπτωση όπου η $\mathcal{H}$ είναι η οικογένεια που αποτελείται από όλους τους διατεταγμένους κύκλους και το G είναι ένα διατεταγμένο γράφημα, η ιδιότητα Erdős-Pósa είχε εικασθεί από τον T. Gallai [74] το 1968 και για όλα τα διατεταγμένα γραφήματα από τον D. Younger το 1973 [222]. Η περίπτωση όπου $k = 2$, αποδείχθηκε στην [155] από τον W. McCuaig. Η επίπεδη περίπτωση επιλύθηκε από τους B. Reed και F. Shepherd στην [183]. Τέλος, η γενική περίπτωση επιλύθηκε από τους B. Reed, N. Robertson, P. Seymour, και R. Thomas [182]. Ακριβέστερα,

Θεώρημα 8.6 ([182]). Υπάρχει μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, δοσμένων ενός δηγραφήματος G και $k \in \mathbb{N}$, το G έχει είτε k ξένους ως προς κορυφές διατεταγμένους κύκλους είτε ένα σύνολο S από κορυφές, με $|S| \leq f(k)$, που συναντάνε όλους τους διατεταγμένους κύκλους του.

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε την επέκταση της ιδιότητας Erdős-Pósa σε δύο παραμέτρους γραφημάτων διαφορετικές από τον αριθμό συσκευασίας και τον αριθμό καλύμματος. Συγκεκριμένα, έστω ότι η $\mathcal{H}$ είναι μία οικογένεια

γραφημάτων και το G είναι ένα γράφημα. Ο αριθμός r -σκέδασης (r -scattering number) της $\mathcal{H}$ στο G , είναι το μέγιστο πλήθος ξένων ως προς κορυφές αντιγράφων των γραφημάτων της $\mathcal{H}$ στο G των οποίων οι κλειστές γειτονιές σε απόσταση r είναι ανά δύο ξένες. Ορίζουμε επίσης τον αριθμό r -κυριαρχίας (r -dominating number) της $\mathcal{H}$ στο G , ως το ελάχιστο μέγεθος ενός συνόλου κορυφών S στο G τέτοιο ώστε για κάθε αντίγραφο κάποιου γραφήματος $H \in \mathcal{H}$, $S \cap N_G^r[V(H)] \neq \emptyset$.

Πολύ πρόσφατα, ο Z. Dvořák απέδειξε ότι εάν η $\mathcal{H}$ αποτελείται από το γράφημα με μία κορυφή, τότε ο αριθμός r -σκέδασης και ο αριθμός r -κυριαρχίας έχουν την ιδιότητα Erdős-Pósa [68] για όλα τα γραφήματα $G \in \mathcal{F}$, όπου η $\mathcal{F}$ είναι μία κλάση γραφημάτων φραγμένης επέκτασης.

Στην επόμενη υποενότητα, εμπνευσμένοι από την απόδειξη της [91], αποδεικνύουμε ότι εάν η $\mathcal{H}$ είναι η οικογένεια όλων των κύκλων και $r = 1$, τότε ο αριθμός 1-σκέδασης της $\mathcal{H}$ στο G και ο αριθμός 1-κυριαρχίας της $\mathcal{H}$ στο G έχουν την ιδιότητα Erdős-Pósa όταν το G είναι ένα γράφημα που αποκλείει ένα συγκεκριμένο απόγειο γράφημα σαν ελάσσον.

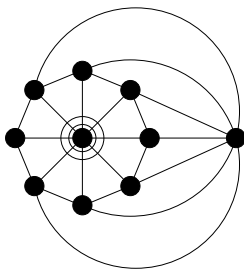
8.4.2 Η Απόδειξη

Έστω ότι η $\mathcal{F}_c$ είναι η οικογένεια όλων των κύκλων. Ορίζουμε τον αριθμό κυριαρχίας κύκλων στο G (*cycle dominating number*) ως

$$\mathbf{cdom}(G) = \min\{k \mid \exists D \subseteq V(G) : (|D| \leq k) \text{ και} \\ (\forall G' \subseteq G)(G' \in \mathcal{F}_c \implies \exists v \in D(N(v) \cap V(G') \neq \emptyset))\},$$

δηλαδή, $\mathbf{cdom}(G) \leq k$ εάν υπάρχει ένα σύνολο D πληθυκότητας το πολύ k τέτοιο ώστε για κάθε κύκλο C στο G υπάρχει μία κορυφή $v \in D$ με $\mathbf{dist}(v, C) \leq 1$. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 8.5.)

Για κάθε γράφημα G , ο αριθμός σκεδασμένων κύκλων (*scattered cycle*



Σχήμα 8.5: Ένα γράφημα με αριθμό κυριαρχίας κύκλων 1.

number) του G ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \text{scs}(G) = \max\{k \mid \exists V_1, V_2, \dots, V_k \text{ υποσύνολα του } V(G) \text{ τέτοια ώστε} \\ \forall i, j \in [k] \text{ με } i \neq j, N[V_i] \cap N[V_j] = \emptyset \text{ και} \\ \forall i \in [k] \exists C \in \mathcal{F}_c : C \subseteq G[V_i]\}. \end{aligned}$$

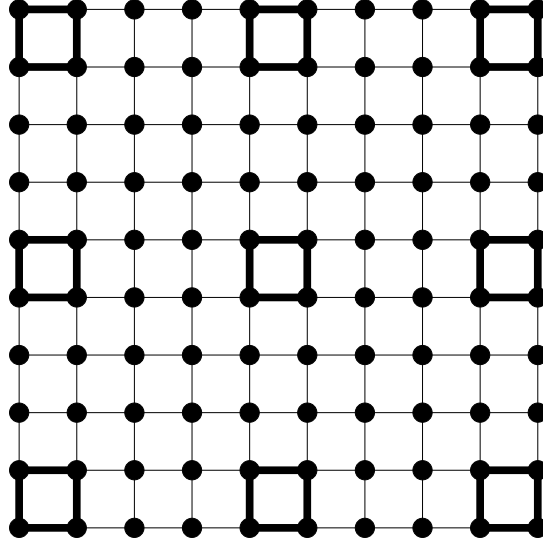
Με άλλα λόγια, $\text{scs}(G) \geq k$ εάν το G περιέχει k κύκλους $C_1, C_2, \dots, C_k$ των οποίων οι γειτονιές είναι ανά δύο ξένες. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 8.6.)

Παρατήρηση 8.2. Για κάθε γράφημα G , $\text{scs}(G) \leq \text{cdom}(G)$.

Παρατήρηση 8.3. Εάν τα H και G είναι γραφήματα τέτοια ώστε το H να είναι σύνθλιψη του G τότε $\text{scs}(H) \leq \text{scs}(G)$.

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε ότι ο αριθμός κυριαρχίας κύκλων και ο αριθμός σχεδασμένων κύκλων ικανοποιούν την ιδιότητα Erdős-Pósa στις κλάσεις των γραφημάτων που εξαιρούν ένα συγκεκριμένο απόγειο γράφημα ως ελάχιστον.

Θεώρημα 8.7. Έστω ότι η $\mathcal{G}$ είναι μία κλάση γραφημάτων που αποκλείουν ένα συγκεκριμένο απόγειο γράφημα σαν ελάχιστον. Υπάρχει μία



Σχήμα 8.6: Ένα γράφημα με αριθμό σχεδασμένων κύκλων ίσο με 9.

σταθερά $c_{\mathcal{G}}$ (η οποία εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{G}$) τέτοια ώστε για κάθε γράφημα $G \in \mathcal{G}$, ισχύει ότι

$$\text{scs}(G) \leq \text{cdom}(G) \leq c_{\mathcal{G}} \cdot \text{scs}(G).$$

Ας θυμηθούμε εδώ ότι το Θεώρημα 6.3 μας εγγυάται την ύπαρξη της τριγωνοποιημένης σχάρας Γ_k σαν σύνθλιψη σε ένα συνεκτικό γράφημα αρκετά μεγάλου δεντροπλάτους το οποίο δεν περιέχει ένα συγκεκριμενοποιημένο απόγειο γράφημα H σαν ελάσσον.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.3 προκύπτει το ακόλουθο απλό λήμμα το οποίο είναι αποφασιστικής σημασίας στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.7.

Λήμμα 8.3. *Εάν η $\mathcal{G}$ είναι μία κλάση γραφημάτων που εξαιρεί ένα συγκεκριμενοποιημένο απόγειο γράφημα H σαν ελάσσον τότε υπάρχει μία σταθερά $\sigma_{\mathcal{G}}$*

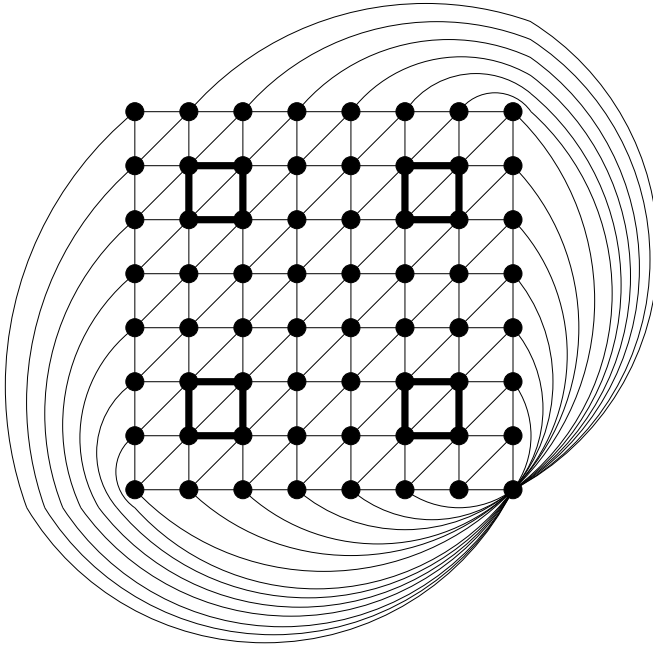
που εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{G}$ τέτοια ώστε για οποιοδήποτε γράφημα $G \in \mathcal{G}$, $\mathbf{tw}(G) \leq \sigma_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{scs}(G)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{scs}(G) \leq k$. Εάν $m = \lceil k^{1/2} \rceil + 1$, τότε

$$\mathbf{scs}(\Gamma_{4m}) > k.$$

Καθώς το Γ_{4m} περιέχει ένα σύνολο σχεδασμένων κύκλων μεγέθους k , η Παρατήρηση 8.3 συνεπάγεται ότι το G δεν περιέχει το Γ_{4m} σαν σύνθλιψη.

Τότε, από το Θεώρημα 6.3, υπάρχει μία σταθερά $\sigma_{\mathcal{G}}$ που εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{G}$ τέτοια ώστε $\mathbf{tw}(G) \leq \sigma_{\mathcal{G}} \cdot m$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. (Δείτε, για παράδειγμα, το Σχήμα 8.7) $\square$



Σχήμα 8.7: Ένα σύνολο σχεδασμένων κύκλων μεγέθους 4 στο Γ_8 .

Για τους σκοπούς μας, ενισχύουμε τον ορισμό μιας δέντροαποσύνθεσης $(\mathcal{X}, T)$ ως εξής: το T είναι ένα δέντρο με ρίζα κάποια κορυφή r όπου $X_r = \emptyset$ και κάθε μία από τις κορυφές του έχει το πολύ δύο παιδιά που είναι ένα από τα παρακάτω είδη.

1. *Κορυφή Εισαγωγής (Introduction Node)*: Μία κορυφή t που έχει μόνο ένα παιδί t' όπου $X_t \supset X_{t'}$ και $|X_t| = |X_{t'}| + 1$.
2. *Κορυφή Λήθης (Forget Node)*: Μία κορυφή t που έχει μόνο ένα παιδί t' όπου $X_t \subset X_{t'}$ και $|X_t| = |X_{t'}| - 1$.
3. *Κορυφή Σύνδεσης (Join Node)*: Μία κορυφή t που έχει ακριβώς δύο παιδιά t_1 και t_2 τέτοια ώστε $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$.
4. *Κορυφή Βάσης (Base Node)*: Μία κορυφή t που είναι φύλλο του T , είναι διαφορετική από τη ρίζα, και $X_t = \emptyset$.

Μια δέντροαποσύνθεση που ικανοποιεί τις προαναφερθείσες ιδιότητες καλείται *καλή δέντροαποσύνθεση*. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε δέντροαποσύνθεση μπορεί να μετατραπεί σε μία καλή δέντροαποσύνθεση διατηρώντας το ίδιο πλάτος, για παράδειγμα δείτε στην [26]). Σε αυτή την ενότητα, όταν αναφερόμαστε σε μία δέντροαποσύνθεση $\mathcal{T} = (\mathcal{X}, T)$ προϋποθέτουμε ότι είναι καλή.

Δοσμένης μιας δέντροαποσύνθεσης $\mathcal{T} = (\mathcal{X}, T)$ και κάποιας κορυφής t του T ορίζουμε ως T_t το υποδέντρο που έχει ρίζα την t . Εμφανώς, εάν η r είναι η ρίζα του δέντρου, $T_r = T$. Ορίζουμε επίσης το $G_t = G[\bigcup_{s \in V(T_t)} X_s]$. Για κάθε $t \in V(T)$, συμβολίζουμε με $p(t)$ τον γονέα της στο T και με $a(t)$ το παιδί της (στην περίπτωση όπου η t είναι μία κορυφή σύνδεσης διαλέγουμε τυχαία ένα από τα παιδιά της).

Επιπλέον, ορίζουμε το σύνολο $\mathbf{crt}(G, \mathcal{T})$, το οποίο καλούμε *σύνολο των κρίσιμων (critical) κορυφών του T* , με τον ακόλουθο αναδρομικό τρόπο:

Εάν η t είναι φύλλο τότε $t \notin \mathbf{crt}(G, \mathcal{T})$, δηλαδή, η t δεν είναι κρίσιμη κορυφή του T . Διαφορετικά, η t είναι κρίσιμη εάν και μόνο εάν το $X_t \cup \bigcup_{s \in \mathbf{crt}(G_t, \mathcal{T})} X_{a(s)}$ δεν κυριαρχεί σε όλους τους κύκλους του G_t αλλά το $X_{a(t)} \cup \bigcup_{s \in \mathbf{crt}(G_t, \mathcal{T})} X_{a(s)}$ κυριαρχεί. Ας προσέξουμε ότι εάν $t \in V(T)$ είναι κρίσιμη, τότε η t είναι επίσης κορυφή λήθης. Για οποιοδήποτε γράφημα G , έστω ότι

$$\mathbf{crt}(G) = \min\{\mathbf{crt}(G, \mathcal{T}) \mid \text{Η } \mathcal{T} \text{ είναι δεντροαποσύνθεση του } G\}.$$

Παρατήρηση 8.4. Έστω k ένας μη-αρνητικός ακέραιος. Εάν το G είναι ένα γράφημα με $\mathbf{crt}(G) > k$ τότε $\mathbf{scs}(G) > k$.

Δοσμένου ενός γραφήματος G , λέμε ότι μία τριάδα (V_1, S, V_2) είναι d -διαχωριστική τριάδα (d -separation triple) του G εάν $|S| \leq d$ και το $\{V_1, S, V_2\}$ είναι μία διαμέριση του $V(G)$ τέτοια ώστε δεν υπάρχει ακμή του G με μία κορυφή στο V_1 και μία κορυφή στο V_2 .

Λήμμα 8.4. Έστω ότι η $\mathcal{G}$ είναι μία κλάση γραφημάτων που εξαιρεί ένα συγκεκριμένο απόγειο γράφημα H σαν ελάχιστον και έστω $G \in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{scs}(G) = k \geq 1$. Υπάρχει μία $\sigma_G \cdot \sqrt{k}$ -διαχωριστική τριάδα (V_1, X, V_2) του G , με $\frac{k}{3} \leq \mathbf{crt}(G[V_1]) \leq 2\frac{k}{3}$ και $\mathbf{crt}(G[V_1]) + \mathbf{crt}(G[V_2]) \leq k$, όπου η σ_G είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{G}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 8.3, υπάρχει μία δεντροαποσύνθεση $\mathcal{T} = (\mathcal{X}, T)$ του G πλάτους το πολύ $\sigma_G \sqrt{k}$, όπου σ_G είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{G}$. Έστω η $q : V(T) \rightarrow \mathbb{N}$ με $q(t) = \mathbf{crt}(G_t, \mathcal{T})$. Παρατηρούμε ότι:

- (i.) Εάν η t είναι φύλλο, τότε $q(t) = 0$ από τον ορισμό.
- (ii.) Εάν η t είναι κορυφή εισαγωγής τότε $q(t) = q(\alpha(t))$ αφού $X_t \subseteq X_{\alpha(t)}$.
- (iii.) Εάν η t είναι κορυφή λήθης, $q(t) - q(\alpha(t)) \in \{0, 1\}$. Αυτό ισχύει επειδή η t μπορεί είτε να είναι είτε να μην είναι κρίσιμη κορυφή.

(iv.) Εάν η t είναι κορυφή σύνδεσης, τότε $q(t) = q(t_1) + q(t_2)$, όπου t_1 και t_2 είναι τα παιδιά της στο T καθώς η $q(t)$ δεν μπορεί να είναι κρίσιμη κορυφή.

(v.) $q(r) = \mathbf{crt}(G, \mathcal{T})$ εάν η r είναι η ρίζα, καθώς $G_r = G$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι υπάρχει μία μοναδική κορυφή $t \in V(T)$ τέτοια ώστε $q(t) > 2\frac{k}{3}$ και εάν η t' είναι παιδί της t , τότε $q(t') \leq 2\frac{k}{3}$. Παρατηρούμε ότι η t είναι είτε κορυφή λήθης είτε κορυφή σύνδεσης.

Στην περίπτωση όπου η t είναι κορυφή λήθης, έστω ότι $V_1 = V(G_t) \setminus X_t$, $V_2 = V(G) \setminus (V_1 \cup X_t)$, και $X = X_t$, και ας προσέξουμε ότι $\mathbf{crt}(G[V_1]) \leq \left\lfloor 2\frac{k}{3} \right\rfloor$ και $\mathbf{crt}(G[V_2]) \leq \left\lfloor 2\frac{k}{3} \right\rfloor$.

Στην περίπτωση όπου η t είναι κορυφή σύνδεσης, τότε $q(t_1) \leq 2\frac{k}{3}$ και $q(t_2) \leq 2\frac{k}{3}$ αλλά $q(t_1) + q(t_2) = q(t) > 2\frac{k}{3}$, όπου t_1 και t_2 είναι τα παιδιά της t . Αυτό συνεπάγεται ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $q(t_1) \leq \frac{k}{3}$. Έστω τα $V_1 = V(G_{t_1}) \setminus X_{t_1}$, $V_2 = V(G) \setminus (V_1 \cup X_{t_1})$, και $X = X_{t_1}$. Συμπεραίνουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις $\frac{k}{3} \leq \mathbf{crt}(G[V_1]) \leq 2\frac{k}{3}$ και $\mathbf{crt}(G[V_1]) + \mathbf{crt}(G[V_2]) \leq k$. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το κυρίως θεώρημα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.7. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα στην $\mathcal{G}$. Ας παρατηρήσουμε ότι είναι αρκετό να αποδείξουμε την δεύτερη ανισότητα. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο $\mathbf{scs}(G)$ θα αποδείξουμε ότι

$$\mathbf{cdom}(G) \leq \beta \cdot \sigma_{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{crt}(G) - \gamma \cdot \sigma_{\mathcal{G}} \cdot \sqrt{\mathbf{crt}(G)}.$$

Όταν $\mathbf{scs}(G) = 0$, ο ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathbf{scs}(G) = k$, όπου $k \geq 1$. Από το Λήμμα 8.4, το G περιέχει μία $\sigma_{\mathcal{G}} \cdot \sqrt{k}$ -διαχωριστική τριάδα, όπου $\frac{k}{3} \leq \mathbf{crt}(G[V_1]) \leq 2\frac{k}{3}$ και $\mathbf{crt}(G[V_1]) +$

$\text{crt}(G[V_2]) \leq k$. Παρατηρούμε ότι $\text{cdom}(G) \leq \text{cdom}(G_1) + \text{cdom}(G_2) + |X|$.

Η επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι για κάποιο $\delta \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$,

$$\begin{aligned} \text{cdom}(G) &\leq \beta \cdot \sigma_G \cdot \delta \cdot k - \gamma \cdot \sigma_G \sqrt{\delta \cdot k} + \\ &\quad \beta \cdot \sigma_G \cdot (1 - \delta) \cdot k - \gamma \cdot \sigma_G \sqrt{(1 - \delta) \cdot k} + \sigma_G \cdot \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Αυτό είναι άνω φραγμένο από $\beta = 3.54$ και $\gamma = 2.54$. Άρα, το θεώρημα έπεται από την Παρατήρηση 8.4 για $c_G = 3.54 \cdot \sigma_G$. $\square$

8.5 Πυρηνοποίηση

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε άλλη μία έννοια της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο, την έννοια της πυρηνοποίησης.

Στην πυρηνοποίηση σκοπός μας είναι να προ-επεξεργαστούμε την είσοδο ενός δύσκολου προβλήματος έτσι ώστε να αποκτήσουμε μία νέα ισοδύναμη είσοδο μικρότερου μεγέθους. Τότε, αφού η είσοδος του προβλήματος μας έχει μικρύνει αρκετά μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο «ωμής βίας» για την επίλυσή του. Ας προσέξουμε εδώ ότι θα θέλαμε η προ-επεξεργασία να γίνεται σε αποδοτικό χρόνο (για την ακρίβεια, σε πολυωνυμικό).

Τυπικά, ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα Π λέγεται ότι έχει έναν $g(k)$ πυρήνα (*kernel*) εάν υπάρχει ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος ο οποίος μετατρέπει κάθε είσοδο (x, k) σε μια ισοδύναμη είσοδο (x', k') τέτοια ώστε $|x'| \leq g(k)$ και $k' \leq g(k)$. Εάν $g(k) = k^{O(1)}$ ή $g(k) = O(k)$ λέμε ότι το Π έχει έναν πολυωνυμικό πυρήνα (*polynomial kernel*) και γραμμικό πυρήνα (*linear kernel*) αντίστοιχα.

Η πυρηνοποίηση (*kernelization*) ενός παραμετροποιημένου προβλήματος γίνεται συνήθως με τη βοήθεια κανόνων αναγωγής. Ένας κανόνας αναγωγής

(*reduction rule*) είναι ένα αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος παίρνει μια είσοδο (I, k) ενός προβλήματος Π και εξάγει μία ισοδύναμη είσοδο (I', k') του Π . Χρησιμοποιούμε τους κανόνες αυτούς ώστε να κατασκευάσουμε τον πυρήνα του προβλήματος Π .

Η έννοια της πυρηνοποίησης είναι πολύ σημαντική στην Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας καθώς είναι ισοδύναμη με την έννοια της παραμετρικής βατότητας.

Θεώρημα 8.8 ([171]). *Για κάθε παραμετροποιημένο πρόβλημα (Π, κ) , τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το πρόβλημα (Π, κ) είναι παραμετρικά βατό.*
2. *Το πρόβλημα Π είναι αποφάνσιμο και το (Π, κ) έχει πυρήνα.*

Θα θέλαμε εδώ να αναφέρουμε ότι πολλές φορές το θεώρημα εμφανίζεται λανθασμένα χωρίς την συνθήκη ότι το Π είναι αποφάνσιμο.

Για παράδειγμα, ας δούμε πως μπορεί να προκύψει ένας τετραγωνικός πυρήνας για το πρόβλημα του k -ΚΑΛΥΜΜΑΤΟΣ ΚΟΡΥΦΩΝ.

Παρατήρηση 8.5. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα για το οποίο αναζητάμε ένα κάλυμμα κορυφών μεγέθους το πολύ k . Εάν υπάρχει μία κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε $\deg_G(v) > k$, τότε η v ανήκει σε όλα τα καλύμματα κορυφών του G μεγέθους το πολύ k .

Πράγματι, ας προσέξουμε ότι εάν η v δεν ανήκει σε ένα κάλυμμα κορυφών V του G μεγέθους το πολύ k , τότε όλοι οι γείτονες της ανήκουν στο V . Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η v έχει παραπάνω από k γείτονες.

Παρατήρηση 8.6. Εάν το G είναι ένα γράφημα με $\Delta(G) \leq k$ και έχει ένα κάλυμμα κορυφών μεγέθους k , τότε το G έχει το πολύ k^2 ακμές.

Τότε ένας τετραγωνικός πυρήνας για το k -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ είναι ο παρακάτω.

Αρχικά ελέγχουμε εάν $k = 0$. Σε αυτή την περίπτωση αν το G δεν έχει ακμές εξάγουμε μία είσοδο για το πρόβλημα που είναι τετριμμένα θετική αλλιώς εξάγουμε μία τετριμμένα αρνητική.

Διαφορετικά, εάν $k > 0$ τότε εάν το G έχει κορυφή v με $\deg_G(v) > k$, τότε τρέχουμε αναδρομικά τον αλγόριθμο με είσοδο $(G - v, k - 1)$. Αλλιώς, ελέγχουμε εάν το G έχει το πολύ k^2 ακμές. Εάν ναι, τότε εξάγουμε την είσοδο (G, k) , αλλιώς εξάγουμε μία τετριμμένα αρνητική είσοδο.

Θα θέλαμε εδώ να αναφέρουμε ότι η παραπάνω πυρηνοποίηση, αποδίδεται στον Buss και καλείται πυρηνοποίηση του Buss [66] (Buss Kernelization).

Αυτό είναι ένα μικρό δείγμα μιας τεχνικής πυρηνοποίησης. Υπάρχουν πολλές τέτοιες τεχνικές είτε για μεμονωμένα προβλήματα (δείτε, για παράδειγμα, τις [9, 47, 90]) είτε για κλάσεις προβλημάτων (δείτε, για παράδειγμα, τις [24, 135]). Η περαιτέρω όμως αναφορά σε αυτές είναι πέρα από τους σκοπούς αυτής της ενότητας.

Τέλος, θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι υπάρχουν αρκετές αποδείξεις αναμενόμενων κάτω φραγμάτων στο μέγεθος της πυρηνοποίησης ενός παραμετρικά βατού προβλήματος. Το κάτω φράγμα προκύπτει υπό την προϋπόθεση ότι αν υπάρχει κάποιος πυρήνας μικρότερου μεγέθους τότε κάποια ανεπίλυτη ειχασία της Θεωρίας Πολυπλοκότητας καταρρίπτεται. Για παράδειγμα, στην Κλασική Πολυπλοκότητα, είναι γνωστό ότι το πρόβλημα 3-ΙΑΤ (3-SAT) δεν είναι πολυωνυμικά επιλύσιμο εκτός και αν $P = NP$. Η πιο διαδεδομένη από αυτές τις υποθέσεις όταν εργαζόμαστε σε κάτω φράγματα πυρήνων είναι η *Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου* που διατυπώθηκε από τους R. Impagliazzo, R. Paturi, και R. Zane [126].

Ορισμός 8.1 (Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου (Exponential Time Hypothesis)). Έστω ότι η ϕ είναι μία είσοδος για το 3-ΙΑΤ με n μεταβλητές και m

συζευκτικούς όρους. Δεν υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει σε χρόνο $2^{o(m)}$ εάν υπάρχει μία αποτίμηση των μεταβλητών της ϕ που την ικανοποιεί.

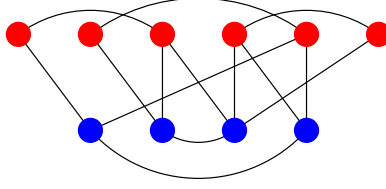
Στο επόμενο κεφάλαιο μελετάμε μία παραμετροποίηση του προβλήματος του ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Αλγόριθμοι και Πυρήνες σε Γενικά Γραφήματα

9.1 Εισαγωγή στις Διδιαμερίσεις (Υπερ)γραφημάτων

Ένα πολύ γνωστό κλασικό πρόβλημα είναι η ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΟΜΗ (MAX CUT). Σε αυτό, η είσοδος είναι ένα γράφημα G και ένας θετικός ακέραιος k και ο σκοπός είναι να ελέγξουμε αν υπάρχει μία τομή μεγέθους τουλάχιστον k . Μια *τομή* (*cut*) σε ένα γράφημα είναι μία διαμέριση των κορυφών του γραφήματος σε δύο ξένα υποσύνολα (διδιαμέριση). Δείτε, για παράδειγμα, την διδιαμέριση που ενάγεται από τα σύνολα των κορυφών ίδιου χρώματος στο Σχήμα 9.1.

Το μέγεθος της τομής είναι το πλήθος των ακμών των οποίων τα άκρα βρίσκονται σε διαφορετικά υποσύνολα της διδιαμέρισης. Η ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΟΜΗ είναι NP-δύσκολη και έχει υπάρξει αντικείμενο μελέτης, τόσο από την αλγοριθμική άποψη στην Πληροφορική όσο και από την άποψη της Ακραιάς



Σχήμα 9.1: Μία τομή σε ένα γράφημα.

Γραφοθεωρίας. Σε αυτό το κεφάλαιο, εστιάζουμε σε μία γενίκευση της ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΟΜΗΣ σε υπεργραφήματα και μελετάμε αυτή τη γενίκευση ως προς την Ακραία Γραφοθεωρία και την Παραμετρική Πολυπλοκότητα.

Ας θυμηθούμε ότι ένα υπεργράφημα H αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών $V(H)$ και ένα σύνολο $E(H)$ υποσυνόλων του $\mathcal{P}(V(H))$, που καλούνται υπερακμές. Μία υπερακμή $e \in E(H)$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου κορυφών $V(H)$. Με $V(e)$ συμβολίζουμε το υποσύνολο των κορυφών που περιέχονται στην υπερακμή e . Ένα υπεργράφημα καλείται r -υπεργράφημα εάν το μέγεθος κάθε υπερακμής είναι άνω φραγμένο από r . Δοσμένου ενός 2-χρωματισμού ενός υπεργραφήματος, έστω $\phi : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$, λέμε ότι χωρίζει μία υπερακμή e εάν το $V(e)$ έχει μία κορυφή χρώματος 1 καθώς και μία κορυφή χρώματος -1 υπό την ϕ . Στον ΜΕΓΙΣΤΟ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ (MAX r -SET SPLITTING), μία γενίκευση της ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΟΜΗΣ, μας δίνεται ένα υπεργράφημα H και ένας θετικός ακέραιος k και ο σκοπός μας είναι να ελέγξουμε εάν υπάρχει ένας χρωματισμός $\phi : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ τέτοιος ώστε τουλάχιστον k υπερακμές να χωρίζονται. Το πρόβλημα αυτό είναι το κυρίως θέμα αυτού του κεφαλαίου.

Για ένα γράφημα G , έστω ότι $\zeta(G)$ είναι το μέγεθος μιας μέγιστης τομής. Ο Erdős [75] παρατήρησε ότι $\zeta(G) \geq m/2$ για γραφήματα με m ακμές. Για να το δούμε αυτό, ας παρατηρήσουμε ότι μία τυχαία διδιαμέριση των κορυφών ενός γραφήματος G με m ακμές δίνει μία τομή μεγέθους τουλάχιστον $m/2$.

Μία αναμενόμενη ερώτηση ήταν εάν το φράγμα στο ζ θα μπορούσε να βελτιωθεί. Απαντώντας σε μία ερώτηση του Erdős [75], ο Edwards [70] απέδειξε ότι για οποιοδήποτε γράφημα G με m ακμές $\zeta(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m}{8} + \frac{1}{64}} - \frac{1}{16} \right\rceil$. Στην ίδια εργασία ο Edwards έδειξε επίσης ότι για κάθε συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές και m ακμές, $\zeta(G) \geq \frac{m}{2} + \frac{n-1}{4}$. Τα φράγματα αυτά είναι γνωστό ότι είναι σφικτά (δείτε την [27] για μία επισκόπηση της περιοχής). Το πρώτο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου γενικεύει το κλασικό αυτό αποτέλεσμα. Για ένα r -υπεργράφημα H , έστω ότι το $\zeta(H)$ είναι το μέγιστο πλήθος υπερακμών που μπορούν να χωριστούν από έναν 2-χρωματισμό ενός υπεργραφήματος. Έστω ότι το H είναι ένα υπεργράφημα με σύνολο κορυφών $V(H)$ και σύνολο ακμών $E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Ας προσέξουμε ότι ένας τυχαίος 2-χρωματισμός που αναθέτει σε κάθε κορυφή του υπεργραφήματος H το χρώμα 1 ή -1 με ίση πιθανότητα πάντοτε χωρίζει τουλάχιστον $\mu_H = \sum_{i=1}^m (1 - 2/2^{|e_i|}) = \sum_{i=1}^m (1 - 2^{1-|e_i|})$ το πλήθος υπερακμές. Πράγματι, για να το δούμε αυτό, ας παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν $2^{|e_i|}$ πιθανοί 2-χρωματισμοί των κορυφών του και μόνο δύο από αυτούς δεν χωρίζουν την e_i (αυτοί στους οποίους όλες οι κορυφές ανατίθενται χρώμα είτε 1 είτε -1). Από την γραμμικότητα του μέσου όρου αντλείται η παραπάνω ισότητα.

Δείχνουμε ότι εάν ένα r -υπεργράφημα H είναι «συνεκτικό ως προς διαμερίσεις» τότε $\zeta(H) \geq \mu_H + \frac{n-1}{r2^{r-1}}$.

Θεώρημα 9.1. Έστω ότι το H είναι ένα συνεκτικό ως προς διαμερίσεις r -υπεργράφημα με σύνολο κορυφών $V(H)$ μεγέθους n και σύνολο ακμών $E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Τότε $\zeta(H) \geq \mu_H + \frac{n-1}{r2^{r-1}}$, όπου $\mu_H = \sum_{i=1}^m (1 - 2^{1-|e_i|})$.

Καθώς ο ορισμός της συνεκτικότητας ως προς διαμερίσεις συμπίπτει με τον ορισμό της συνεκτικότητας σε γράφηματα, για συνεκτικά ως προς διαμερίσεις ομοιόμορφα 2-υπεργραφήματα (κάθε υπερακμή έχει μέγεθος ακριβώς 2), $\zeta(H) \geq \frac{m}{2} + \frac{n-1}{4}$. Η έννοια των ομοιόμορφων 2-υπεργραφημάτων είναι

η ίδια με την έννοια των γραφημάτων, άρα, για $r = 2$, αντλούμε το παλιό αποτέλεσμα του Edwards. Η απόδειξη του Θεωρήματος 9.1 μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως γενίκευση μίας παρόμοιας απόδειξης που προκύπτει στην [38] για απλά γραφήματα.

Χρησιμοποιούμε το συνδυαστικό μας αποτέλεσμα για να μελετήσουμε μία άνω της εγγύησης παραλλαγή του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΤΥΝΟΛΩΝ στην περιοχή της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας. Τα προβλήματα που είναι παραμετροποιημένα άνω των εγγυημένων συνδυαστικών φραγμάτων είναι αντικείμενο έντονης μελέτης αυτήν την εποχή. Ένα απλό παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος είναι το πρόβλημα απόφασης στο οποίο η είσοδος είναι ένα επίπεδο γράφημα με n κορυφές και ένας θετικός ακέραιος k , η παράμετρος είναι k , και η ερώτηση είναι εάν το γράφημα περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $\frac{n}{4} + k$. Ένα ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον $n/4$ είναι εγγυημένο από το Θεώρημα Τεσσάρων Χρωμάτων (Four Color Theorem). Θα μπορούσε αυτό το πρόβλημα να επιλυθεί σε χρόνο $O(n^{g(k)})$, για κάποια συνάρτηση g ; Υπάρχει κάποιος FPT αλγόριθμος; Κανείς δεν γνωρίζει. Το πρόβλημα αυτό, ωστόσο, αποτελεί ένα ωραίο και απλό παράδειγμα αυτού του μοτίβου έρευνας, το οποίο ξεκίνησε από τους Mahajan και Raman [151] και όπως παρουσιάζουμε στη συνέχεια έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα.

Οι Mahajan και Raman έδειξαν ότι αρκετές άνω της εγγύησης παραλλαγές της ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΟΜΗΣ και της ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΙΑΤ (MAX SAT) είναι παραμετρικά βατές. Αργότερα, οι Mahajan και άλλοι [152] δημοσίευσαν μια εργασία με αρκετά νέα αποτελέσματα και ανοικτά προβλήματα γύρω από παραμετροποιήσεις πέρα από εγγυημένα άνω και κάτω φράγματα. Σε μία εργασία, οι Gutin και άλλοι [112] ανέπτυξαν μία πιθανοτική προσέγγιση σε προβλήματα παραμετροποιημένα πέρα από άνω ή κάτω ισχυρά φράγματα. Οι Alon και άλλοι [8] συνδύασαν αυτήν την προσέγγιση με μεθόδους από την Αλγεβρική Συνδυαστική και την Ανάλυση Fourier ώστε να αποκτήσουν έναν FPT

αλγόριθμο για την παραμετροποιημένη ΜΕΓΙΣΤΗ r -IAT (MAX r -SAT) πέρα από το εγγυημένο κάτω φράγμα. Άλλα σημαντικά αποτελέσματα σε αυτή την κατεύθυνση περιλαμβάνουν τετραγωνικούς πυρήνες για προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών σε τριαδικές μεταθέσεις παραμετροποιημένα πάνω από μέσους όρους (quadratic kernels for ternary permutation constraint satisfaction problems parameterized above average) και αποτελέσματα γύρω από συστήματα γραμμικών εξισώσεων πάνω στο σώμα με δύο στοιχεία (systems of linear equations over field with two elements) [38, 39, 113, 136].

Μία εύλογη παραμετροποιημένη παραλλαγή του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ ορίζεται ρωτώντας εάν υπάρχει ένας 2-χρωματισμός υπεργραφημάτων που χωρίζει τουλάχιστον k υπερακμές. Αυτή η παραλλαγή του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ, η οποία καλείται p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΩΝ (p -SET SPLITTING), έχει μελετηθεί εκτενώς στο πλαίσιο των παραμετρικών αλγόριθμων. Στον p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ δεν περιορίζουμε το μέγεθος των υπερακμών σε το πολύ r όπως στην περίπτωση του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ. Οι Dehne, Fellows, και Rosamond [46] εκκίνησαν την μελέτη του p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ και έδωσαν έναν αλγόριθμο που έτρεχε σε χρόνο $O^*(72^k)$. Παρείχαν επίσης έναν πυρήνα για το πρόβλημα με το πολύ $2k$ υπερακμές. Αργότερα οι Dehne, Fellows, Rossmann, και Shaw [47] βρήκαν έναν αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O^*(8^k)$. Συνεχίζοντας αυτή την αλυσίδα βελτιώσεων οι Lokshтанov και Sloper [150] έδωσαν έναν αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O^*(2.65^k)$ και βρήκαν έναν πυρήνα όπου και το πλήθος των κορυφών και το πλήθος των υπερακμών είναι το πολύ $2k$. Αργότερα, οι Chen και Lu [33] παρείχαν έναν τυχαιοποιημένο αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O^*(2^k)$ για μία παραλλαγή του προβλήματος με βάρη. Το 2009, οι Lokshтанov και Saurabh [149] έδωσαν έναν αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O^*(1.96^k)$ και έναν πυρήνα με το πολύ $2k$ υπερακμές και το πολύ k κορυφές. Ο τρέχων ταχύτερος αλγόριθμος δόθηκε από τους Nederlof και van Rooij [159] και τρέχει

Η ιστορία του p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ		
Dehne, Fellows, και Rosamond	WG 2003	$O^*(72^k)$
Dehne, Fellows, Rosamond, και Shaw	IWPEC 2004	$O^*(8^k)$
Lokshtanov και Sloper	ACiD 2005	$O^*(2.6499^k)$
Chen και Lu	COCOON 2007	$O^*(2^k)$
Lokshtanov και Saurabh	IWPEC 2009	$O^*(1.96^k)$
Nederlof και van Rooij	IPEC 2010	$O^*(1.8213^k)$

Πίνακας 9.1: Λίστα των γνωστών αποτελεσμάτων για τον p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ με χρονολογική σειρά. Ο συμβολισμός $O^*(\cdot)$ αποκρύπτει και τον πολυωνυμικό παράγοντα.

σε χρόνο $O^*(1.8213^k)$. Παραπέμπουμε στον Πίνακα 9.1 για μία γρήγορη αναφορά στην ιστορία του προβλήματος του p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε μόνο r -υπεργραφήματα. Εάν έχουμε μία υπερακμή μεγέθους ένα τότε δεν μπορεί ποτέ να χωριστεί και ως εκ τούτου μπορούμε να την αγνοήσουμε. Άρα, υποθέτουμε ότι κάθε υπερακμή είναι μεγέθους τουλάχιστον 2 και το πολύ r . Έστω ότι το H είναι ένα υπεργράφημα με σύνολο κορυφών $V(H)$ και σύνολο ακμών $E(H) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Αφού κάθε υπερακμή έχει μέγεθος το πολύ 2, έχουμε ότι $\mu_H \geq m/2$. Άρα, η τυπική παραμετροποίηση του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ είναι τετριμμένα παραμετρικά βατή λόγω του ακόλουθου επιχειρήματος: Εάν $k \leq m/2$ τότε η απάντηση είναι ναι, αλλιώς έχουμε ότι $m \leq 2k$ και ως εκ τούτου $n \leq 2kr$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να απαριθμήσουμε όλους τους $\{1, -1\}$ -χρωματισμούς του $V(H)$ και να ελέγξουμε εάν κάποιος από αυτούς χωρίζει τουλάχιστον k υπερακμές και να απαντήσουμε ανάλογα. Άρα, δοσμένου ενός r -υπεργραφήματος H , η πιο σημαντική ερώτηση είναι εάν υπάρχει ένας $\{1, -1\}$ -χρωματισμός του $V(H)$ ο οποίος χωρίζει τουλάχιστον

$\mu_H + k$ υπερακμές. Με άλλα λόγια, ενδιαφερόμαστε για την ακόλουθη άνω του μέσου όρου παραλλαγή του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ.

ΑΝΩ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΩΝ (AM- r -ΔΣ)

(ABOVE AVERAGE r -SET SPLITTING (AA- r -SS))

Είσοδος: Ένα r -υπεργράφημα H και ένας μη-αρνητικός ακέραιος k .

Παράμετρος: k .

Ερώτηση: Υπάρχει ένας 2-χρωματισμός του $V(H)$ που να χωρίζει τουλάχιστον $\mu_H + k$ υπερακμές;

Είναι γνωστό, από τα αποτελέσματα στην [136], ότι ο AM- r -ΔΣ είναι παραμετρικά βατός για σταθερά r ($r = O(1)$). Από την αλγοριθμική σκοπιά, μια εύλογη ερώτηση είναι εάν ο AM- r -ΔΣ είναι παραμετρικά βατός όταν το μέγεθος των υπερακμών είναι το πολύ $r(n)$ για κάποια συνάρτηση του n . Εάν ναι, πόσο μακριά μπορούμε να ωθήσουμε την συνάρτηση $r(n)$; Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.1 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9.2. *Για κάθε σταθερά $\alpha < 1$, ο AM- $\alpha \log n$ -ΔΣ είναι παραμετρικά βατός.*

Συμπληρώνουμε το αλγοριθμικό αποτέλεσμα από ένα αποτέλεσμα αντίστοιχου κάτω φράγματος το οποίο διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 9.3. *Εκτός και αν $NP \subseteq DTIME(n^{\log \log n})$, ο AM- $\lceil \log n \rceil$ -ΔΣ δεν ανήκει στο XP.*

Τα Θεωρήματα 9.2 και 9.3 είναι σε αντιδιαστολή με μία παρόμοια ερώτηση για την AM-ΜΕΓΙΣΤΗ- r -ΙΑΤ (AA-MAX- r -SAT). Έστω ότι ο F είναι ένας τύπος σε Κανονική Συζευκτική Μορφή (Conjunctive Normal Form) με n μεταβλητές και m συζευκτικούς όρους και έστω ότι $r_1, \dots, r_m$ είναι το πλήθος των εγγραμάτων στους συζευκτικούς όρους του F . Τότε το

$\text{asat}(F) = \sum_{i=1}^m (1 - 2^{-r_i})$ είναι το αναμενόμενο πλήθος όρων που ικανοποιούνται από μία τυχαία αποτίμηση αλήθειας (οι τιμές αλήθειας είναι κατανεμημένες στις μεταβλητές ομοιόμορφα και ανεξάρτητα). Στην AM-MΕΓΙΣΤΗ- r -ΙΑΤ μας δίνονται ένας r -τύπος σε Κανονική Συζευκτική Μορφή F (όλοι οι συζευκτικοί όροι έχουν μέγεθος το πολύ r) και ένας θετικός ακέραιος k , και η ερώτηση είναι εάν υπάρχει μία αποτίμηση που ικανοποιεί τουλάχιστον $\text{asat}(F) + k$ συζευκτικούς όρους, όπου k είναι η παράμετρος. Στην [40], αποδεικνύεται ότι η AM-MΕΓΙΣΤΗ- $r(n)$ -ΙΑΤ δεν είναι παραμετρικά βατή εκτός εάν καταρρίπτεται η Υπόθεση Εκθετικού Χρόνου [126] (δείτε επίσης τον Ορισμό 8.1), όπου $r(n) \geq \log \log n + \phi(n)$ και η $\phi(n)$ είναι μία μη-φραγμένη γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Ωστόσο, δείχνουν επίσης ότι η AM-MΕΓΙΣΤΗ- $r(n)$ -ΙΑΤ είναι παραμετρικά βατή για οποιαδήποτε $r(n) \leq \log \log n - \log \log \log n - \phi(n)$, όπου η $\phi(n)$ είναι μια οποιαδήποτε μη-φραγμένη γνήσια αύξουσα συνάρτηση.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 9.2 δείχνει επίσης ότι ο AM- r -ΔΣ επιδέχεται έναν πυρήνα με $O(k)$ κορυφές για $r = O(1)$. Νωρίτερα, μόνο ένας γραμμικός «διπυρήνας» (bikernel) ήταν γνωστός [136]. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 9.1 και 9.2 συνδυάζουν τις ιδιότητες των συντελεστών Fourier των ψευδό-συναρτήσεων Boole, που παρατηρήθηκαν από τους Crowston και άλλους [38], με αποτελέσματα σε ένα συγκεκριμένο είδος συνεκτικότητας υπεργραφημάτων. Η απόδειξη του Θεωρήματος 9.3 είναι εμπνευσμένη από μία παρόμοια απόδειξη που δίνεται στην [40].

9.2 Νέο Κάτω Φράγμα στην $\zeta(H)$ και η Απόδειξη του Θεωρήματος 9.1

Σε αυτή την ενότητα, βρίσκουμε το νέο κάτω φράγμα στην $\zeta(H)$, δηλαδή, στο μέγιστο πλήθος των υπερακμών που μπορούν να χωριστούν σε ένα r -υπεργράφημα H από έναν 2-χρωματισμό υπεργραφημάτων. Προς αυτήν την κατεύθυνση ορίζουμε πρώτα την έννοια της συνεκτικότητας υπεργραφημάτων και του δεντροπαράγοντα υπεργραφημάτων.

Συνεκτικότητα Υπεργραφημάτων και Δεντροπαράγοντας Υπεργραφημάτων. Σε κάθε υπεργράφημα H μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ακόλουθο γράφημα: Το πρωτογενές (*primal*) γράφημα, το οποίο καλείται επίσης γράφημα του Gaifman, $P(H)$ έχει τις ίδιες κορυφές $V(H)$ με το H και δύο κορυφές $u, v \in V(H)$ είναι συνδεδεμένες από μία ακμή στο $P(H)$ εάν υπάρχει μία υπερακμή $e \in E(H)$, τέτοια ώστε $\{u, v\} \subseteq V(e)$. Λέμε ότι το H είναι *συνεκτικό* (*connected*) ή έχει r συνιστώσες εάν το αντίστοιχο πρωτογενές γράφημα $P(H)$ είναι συνεκτικό ή έχει r συνιστώσες. Ορίζουμε τώρα τις έννοιες των ισχυρών διαχωριστών και των δασών σε υπεργραφήματα.

Ορισμός 9.1 (Ισχυρός Διαχωριστής και Συνεκτικότητα κατά Διαμερίσεις). Ένα υποσύνολο $X \subseteq E(H)$ καλείται *ισχυρός διαχωριστής* (*strong cut-set*) εάν το υπεργράφημα $H' = (V, E(H) \setminus X)$ έχει τουλάχιστον $|X| + 2$ συνεκτικές συνιστώσες. Ένα υπεργράφημα H είναι *συνεκτικό ως προς διαμερίσεις* (*partition-connected*) εάν δεν έχει ισχυρό διαχωριστή.

Ορισμός 9.2 (Δάσος Υπεργραφήματος). Ένα δάσος (*forest*) $\mathcal{F}$ σε ένα υπεργράφημα H είναι ένα ζεύγος (F, g) όπου το F είναι δάσος, με τη συνήθη γραφοθεωρητική έννοια, με σύνολο κορυφών $V(H)$ και σύνολο ακμών $E(F)$, και $g : E(F) \rightarrow E(H)$ είναι μία ένα προς ένα απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε

$\{u, v\} \in E(F)$ έχουμε ότι $\{u, v\} \subseteq V(g(\{u, v\}))$. Το πλήθος των ακμών στο $\mathcal{F}$ είναι $|E(F)|$.

Ας παρατηρήσουμε ότι εάν ένα δάσος $\mathcal{F}$ έχει $|V(H)| - 1$ ακμές τότε το F είναι δεντροπαράγοντας στο $V(H)$. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ένα υπερδέντρο (*hypertree*) του H . Οι Frank, Király, και Kriesell απέδειξαν το ακόλουθο δυϊκό αποτέλεσμα το οποίο σχετίζει τους δεντροπαράγοντες και τους ισχυρούς διαχωριστές σε υπεργραφήματα [93, Πόρισμα 2.6].

Πρόταση 9.1 ([93]). Ένα υπεργράφημα H περιέχει έναν δεντροπαράγοντα εάν και μόνο εάν το H δεν έχει ισχυρό διαχωριστή.

Ένας 2-χρωματισμός ενός υπεργραφήματος H είναι μία συνάρτηση $c : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$. Λέμε ότι μία υπερακμή e του H είναι *χωρισμένη* (*split*) από τον c εάν κάποια κορυφή του $V(e)$ έχει χρώμα 1 και κάποια κορυφή έχει -1 . Συμβολίζουμε με $\mathbf{split}(c, H)$ το σύνολο των υπερακμών που χωρίζονται από τον c . (Μπορεί να παραλείψουμε το υπεργράφημα εάν είναι εμφανές από το περιεχόμενο.) Το μέγιστο πλήθος των υπερακμών που χωρίζονται πάνω από όλους τους 2-χρωματισμούς συμβολίζεται με $\mathbf{split}(H)$.

Παρατήρηση 9.1. Έστω ότι το H είναι ένα υπεργράφημα, η e είναι μία υπερακμή του H , και η $v \in V(e)$ είναι μία κορυφή του H . Εάν ο c είναι ένας 2-χρωματισμός του H τότε η e δεν είναι χωρισμένη εάν και μόνο εάν $c(v) \cdot c(u) = 1$ για κάθε $u \in V(e) \setminus \{v\}$.

Για κάθε $i \geq 2$, έστω ότι το m_i είναι το πλήθος των υπερακμών του H που έχουν μέγεθος i . Για κάθε r -υπεργράφημα H , ξαναγράφουμε το μ_H όπως ακολούθως, $\mu_H = \sum_{i=2}^r (1 - 2^{-(i-1)})m_i$.

Έστω ότι το H είναι ένα υπεργράφημα το οποίο δεν έχει ισχυρό διαχωριστή. Θα δείξουμε ότι για αυτά τα υπεργραφήματα, υπάρχει ένας 2-χρωματισμός ο οποίος χωρίζει αρκετές υπερακμές παραπάνω από τον μέσο

όρο. Αυτό είναι κρίσιμο και για το αποτέλεσμα πυρηνοποίησης (Θεώρημα 9.7) αλλά και για το αλγοριθμικό (Θεώρημα 9.2). Για αυτό, θα χρειαστούμε επίσης ένα αποτέλεσμα από τις συναρτήσεις Boole.

Αποτελέσματα από τις συναρτήσεις Boole. Μία συνάρτηση f η οποία απεικονίζει το $\{-1, 1\}^n$ στο $\mathbb{R}$ καλείται *ψευδό-συνάρτηση Boole* (*pseudo-Boolean function*). Είναι αρκετά γνωστό ότι κάθε ψευδό-συνάρτηση Boole f μπορεί να γραφεί μοναδικά ως

$$f(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}(\emptyset) + \sum_{I \in 2^{[n]} \setminus \emptyset} \hat{f}(I) \prod_{i \in I} x_i,$$

όπου κάθε $\hat{f}(I)$ είναι ένας πραγματικός. Αυτός ο τύπος καλείται *ανάπτυγμα Fourier* της f και οι $\hat{f}(I)$ είναι οι *συντελεστές Fourier* της f . Δείτε στην [177] για περισσότερες λεπτομέρειες. Με $\bar{x}$ αναπαριστούμε το $(x_1, \dots, x_n)$.

Θεώρημα 9.4 ([38]). Έστω ότι η $f(\bar{x}) = \hat{f}(\emptyset) + \sum_{I \in \mathcal{F}} \hat{f}(I) \prod_{i \in I} x_i$ είναι μία ψευδό-συνάρτηση Boole βαθμού $r > 0$, όπου η $\mathcal{F}$ είναι μία οικογένεια μη-κενών υποσυνόλων του $[n]$ τέτοια ώστε $I \in \mathcal{F}$ εάν και μόνο εάν $\hat{f}(I) \neq 0$, και ο $\hat{f}(\emptyset)$ είναι ο σταθερός όρος της f . Τότε

$$\max_{\bar{x} \in \{-1, 1\}^n} f(\bar{x}) \geq \hat{f}(\emptyset) + \left\lfloor \frac{\text{rank} A - 1 + r}{r} \right\rfloor \cdot \min\{|\hat{f}(I)| \mid I \in \mathcal{F}\},$$

όπου ο A είναι ένας $(0, 1)$ -πίνακας με στοιχεία α_{ij} τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = 1$ εάν και μόνο εάν ο όρος j του αθροίσματος περιέχει το x_i .

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.1. Έστω ότι το H είναι ένα r -υπεργράφημα και η $1, \dots, n$ είναι μία τυχαία διάταξη των κορυφών στο $V(H)$. Έστω ότι οι

$x_1, \dots, x_n$ είναι οι n μεταβλητές που αντιστοιχούν στις $1, \dots, n$ αντίστοιχα. Σε κάθε υπερακμή $e \in E(H)$ αντιστοιχούμε ένα πολυώνυμο $f_e(\bar{x})$. Για μία δοσμένη $e \in E(H)$, έστω ότι το j είναι ο μεγαλύτερος δείκτης μέσα στο $V(e)$. Τότε

$$f_e(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{2^{|e|-1}} \prod_{i \in V(e) \setminus \{j\}} (1 + x_i x_j).$$

Ας προσέξουμε ότι για κάθε $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \{-1, 1\}^n$, μπορούμε να ορίσουμε έναν 2-χρωματισμό c_δ του $V(H)$ τέτοιοι ώστε $c_\delta(i) = \delta_i$ και, αντίστροφα, για κάθε 2-χρωματισμό c μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα $\delta_c \in \{-1, 1\}^n$. Παρατηρούμε τότε ότι, δοσμένου ενός 2-χρωματισμού c του H , $f_e(\delta_c) = 1$ εάν και μόνο εάν η e είναι χωρισμένη από τον c . Άρα $f_e(\delta_c) = 0$ εάν και μόνο εάν η e δεν είναι χωρισμένη από τον c . Ως εκ τούτου, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $\max_{\bar{y}} f(\bar{y}) \geq \mu_H + \frac{n-2}{r \cdot 2^r - 1}$, όπου η $f(\bar{x}) = \sum_{e \in E(H)} f_e(\bar{x})$ είναι μία ψευδό-συνάρτηση Boole βαθμού $r > 0$ και $\bar{y} \in \{-1, 1\}^n$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αυτό πράγματι ισχύει.

Έστω ότι,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{e \in E(H)} \left(1 - \frac{1}{2^{|e|-1}} \prod_{i \in V(e) \setminus \{j\}} (1 + x_i x_j) \right) \\ &= \sum_{i=2}^r m_i - \sum_{e \in E(H)} \frac{1}{2^{|e|-1}} \prod_{i \in V(e) \setminus \{j\}} (1 + x_i x_j). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $e \in E(H)$, τα $\frac{1}{2^{|e|-1}} x_p x_j$ και $\frac{1}{2^{|e|-1}} x_j^2 x_p x_q$ εμφανίζονται στους όρους του $\prod_{i \in V(e) \setminus \{j\}} (1 + x_i x_j)$ για κάθε $\{p, q\} \subseteq V(e) \setminus \{j\}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός αργότερα. Ξαναγράφουμε την $f(\bar{x})$

ως,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \sum_{i=2}^r m_i - \sum_{i=2}^r \frac{1}{2^{i-1}} m_i + \sum_{I \in \mathcal{F}} c_I \prod_{i \in I} x_i^{\lambda_{(I,i)}} \\ &= \sum_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) m_i + \sum_{I \in \mathcal{F}} c_I \prod_{i \in I} x_i^{\lambda_{(I,i)}}, \end{aligned}$$

όπου η $\mathcal{F}$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του $[n]$ τέτοια ώστε για κάθε σύνολο $I \in \mathcal{F}$,

1. $2 \leq |I| \leq r$,
2. $|c_I| \geq \frac{1}{2^{r-1}}$, και
3. για κάθε $i \in I$, ο $\lambda_{(I,i)}$ είναι ένας θετικός ακέραιος.

Τότε, όπως παραπάνω, για κάθε $e \in E(H)$, τα $\frac{1}{2^{|e|-1}} x_p x_j$ και $\frac{1}{2^{|e|-1}} x_j^2 x_p x_q$ εμφανίζονται στην $f(\bar{x})$ για κάθε $\{p, q\} \subseteq V(e) \setminus \{j\}$.

Έστω,

$$f_p(\bar{x}) = \sum_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) m_i + \sum_{I \in \mathcal{F}} c_I \prod_{i \in I} x_i^{\lambda_{(I,i)}} \pmod{2}.$$

Προφανώς, η $f_p : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία ψευδό-συνάρτηση Boole. Τότε, για κάθε $\bar{x} \in \{-1, 1\}^n$, $f(\bar{x}) = f_p(\bar{x})$. Συνεπώς, $\max_{\bar{x}} f(\bar{x}) = \max_{\bar{x}} f_p(\bar{x})$.

Παρατηρούμε ότι η $f_p(\bar{x})$ μπορεί επίσης να γραφεί ως

$$f_p(\bar{x}) = \sum_{i=2}^r \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) m_i + \sum_{I \in \mathcal{F}'} c'_I \prod_{i \in I} x_i,$$

όπου η $\mathcal{F}'$ είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του $[n]$ τέτοια ώστε

1. $2 \leq |I| \leq r$ και
2. $|c'_I| \geq \frac{1}{2^{r-1}}$ για κάθε $I \in \mathcal{F}'$.

Τότε, για κάθε υπερακμή $e \in E(H)$, ο όρος $x_p x_q$, $p, q \in V(e)$ με $p \neq q$ εμφανίζεται στο $\sum_{I \in \mathcal{F}'} c'_I \prod_{i \in I} x_i$. Πριν προχωρήσουμε ξαναγράφουμε την $f_p(\bar{x})$ ως

$$f_p(\bar{x}) = \hat{f}(\emptyset) + \sum_{I \in \mathcal{F}'} \hat{f}(I) \prod_{i \in I} x_i,$$

όπου ο $\hat{f}(\emptyset) = \mu_H$ είναι ο σταθερός όρος της f_p και $\hat{f}(I) = c'_I$, για κάθε $I \in \mathcal{F}'$.

Σημειώνουμε ότι η $f_p(\bar{x})$ έχει βαθμό r_p με $2 \leq r_p \leq r$. Από το Θεώρημα 9.4, έπεται ότι

$$\max_{\bar{x}} f_p(\bar{x}) \geq \hat{f}(\emptyset) + \left\lfloor \frac{\text{rank} A - 1 + r_p}{r_p} \right\rfloor \cdot \min\{|\hat{f}(I)| : I \in \mathcal{F}'\},$$

όπου ο A είναι ένας $(0, 1)$ -πίνακας με στοιχεία α_{ij} τέτοια ώστε $\alpha_{ij} = 1$ εάν και μόνο εάν ο όρος $j \in I$ περιέχει την x_i . Καθώς το H δεν έχει ισχυρό διαχωριστή, το H έχει έναν δεντροπαράγοντα T (από την Υπόθεση και την Πρόταση 9.1). Επιπλέον, ας θυμηθούμε ότι για κάθε υπερακμή $e \in E(H)$, ο όρος $x_p x_q$, $p, q \in V(e)$ με $p \neq q$ εμφανίζεται στην $f_p(\bar{x})$. Άρα, ο πίνακας γειτνίασης ακμών-κορυφών T είναι υποπίνακας του A . Είναι γνωστό ότι ο πίνακας γειτνίασης ακμών-κορυφών ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές έχει τάξη τουλάχιστον $n - 1$. Άρα έχουμε ότι η τάξη του, $\text{rank} T$, είναι $n - 1$. Ξέρουμε επίσης ότι η τάξη ενός πίνακα είναι τουλάχιστον όσο η τάξη οποιουδήποτε από τους υποπίνακες του. Αυτό συνεπάγεται ότι $\text{rank} A \geq n - 1$ και

$$\max_{\bar{x}} f_p(\bar{x}) \geq \hat{f}(\emptyset) + \left\lfloor \frac{n - 1 - 1 + r}{r} \right\rfloor \cdot \min\{|\hat{f}(I)| : I \in \mathcal{F}'\} \geq \mu_H + \frac{n - 1}{r \cdot 2^{r-1}}.$$

Για να δούμε την τελευταία ανισότητα, ας υποθέσουμε ότι $n = pr + q$, όπου $0 \leq q \leq r - 1$. Τότε, εάν $q \geq 2$ έχουμε ότι $\left\lfloor p + \frac{q+r-2}{r} \right\rfloor \geq p + 1$ και αυτό μας δίνει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Σε άλλες περιπτώσεις έχουμε $q \leq 1$ και αυτό μας δίνει ότι $\left\lfloor p + \frac{q+r-2}{r} \right\rfloor \geq p \geq \frac{n-1}{r}$. Καθώς $\max_{\bar{x}} f(\bar{x}) = \max_{\bar{x}} f_p(\bar{x})$, αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.4. $\square$

9.3 Κανόνες Αναγωγής για τον AM- r - $\Delta\Sigma$

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζουμε δύο κανόνες αναγωγής για τον AM- r - $\Delta\Sigma$. Αυτοί είναι καθοριστικής σημασίας για την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.

Όταν το υπεργράφημα H είναι μη-συνεκτικό μπορούμε να δώσουμε τον απλό ακόλουθο κανόνα αναγωγής.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ 1 ([149]). : Έστω ότι το (H, k) είναι μία είσοδος του AM- r - $\Delta\Sigma$ τέτοια ώστε το $P(H)$ έχει τις συνεκτικές συνιστώσες $P(H)[C_1], \dots, P(H)[C_t]$. Έστω ότι οι $v_1, \dots, v_t$ είναι κορυφές τέτοιες ώστε $v_i \in C_i$. Κατασκευάζουμε ένα υπεργράφημα H' από το H ταυτίζοντας τις κορυφές $v_1, \dots, v_t$. Για την ακρίβεια $V(H') = V(H) \setminus \{v_i \mid 2 \leq i \leq t\}$ και για κάθε υπερακμή $e \in E(H)$ αφήνουμε την υπερακμή $e' \in E(H')$ ως $e' = e$ εάν $v_i \notin e$, για κάθε $i \in [t]$, και $e' = (V(e) \setminus \{v_i \mid 2 \leq i \leq t\}) \cup \{v_1\}$ διαφορετικά. Εξάγουμε το (H', k) .

Ο επόμενος κανόνας αναγωγής φροντίζει την περίπτωση όπου το υπεργράφημα έχει ισχυρό διαχωριστή. Ενώ αυτός ο κανόνας αναγωγής πρωτοεμφανίστηκε στην [149], για λόγους πληρότητας, θα θέλαμε να παρουσιάσουμε εδώ την πλήρη απόδειξη της ορθότητάς του. Η υπόλοιπη ενότητα είναι αφιερωμένη στην απόδειξη του ακόλουθου.

Θεώρημα 9.5 ([149]). Υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος, δοσμένου ενός ισχυρού διαχωριστή X ενός συνεκτικού υπεργραφήματος $H = (V(H), E(H))$, εντοπίζει έναν διαχωριστή $X' \subseteq X$ τέτοιον ώστε $X' \neq \emptyset$ και υπάρχει ένας χρωματισμός χ τέτοιος ώστε $|\text{split}(\chi, H)| = \text{split}(H)$ και ο χ διαχωρίζει όλες τις υπερακμές του X' . Στην πραγματικότητα, δοσμένου ενός οποιουδήποτε χρωματισμού c , υπάρχει ένας χρωματισμός χ τέτοιος ώστε $\text{split}(\chi, H) = \text{split}(c, H) \cup X'$.

Δίνουμε πρώτα μία αλγοριθμική παραλλαγή της Πρότασης 9.1 η οποία είναι κεντρική στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.5. Δοσμένου ενός δάσους $\mathcal{F} = (F, g)$, κατατάσσουμε τις ακμές του $E(H)$ όπως ακολούθως. Μία ακμή $e \in E(H)$ είναι:

- Μία *ακμή δάσους* (*forest edge*) εάν υπάρχει μία ακμή f στο $E(F)$ τέτοια ώστε $g(f) = e$.
- Μία *διαχωριστική ακμή* (*cut edge*) εάν υπάρχουν δύο συνεκτικές συνιστώσες C_1 και C_2 του F τέτοιες ώστε $V(e) \cap V(C_1) \neq \emptyset$ και $V(e) \cap V(C_2) \neq \emptyset$.
- Μία *αχρησιμοποίητη ακμή* (*unused edge*) εάν δεν υπάρχει ακμή f στο $E(F)$ τέτοια ώστε $g(f) = e$, δηλαδή, η e δεν βρίσκεται στην εικόνα της απεικόνισης g .

Σχολιάζουμε ότι μία ακμή e μπορεί να είναι ακμή δάσους και διαχωριστική ακμή ταυτόχρονα. Παρόμοια μία ακμή μπορεί να είναι διαχωριστική ακμή και αχρησιμοποίητη ακμή ταυτόχρονα.

Ορισμός 9.3. Για ένα υπεργράφημα $H = (V(H), E(H))$, ένα δάσος $\mathcal{F} = (F, g)$ και $e_1, e_2 \in E(H)$, λέμε ότι μία ακμή e_2 ακολουθεί την e_1 εάν η e_1 είναι ακμή δάσους του F και η e_2 είναι διαχωριστική ακμή σύμφωνα με το $\mathcal{F}' = (F', g')$ όπου $F' = (V(H), E(F) \setminus \{g^{-1}(e_1)\})$ και $g'(f) = g(f)$ για $f \in E(F')$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την αλγοριθμική παραλλαγή της Πρότασης 9.1 την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα.

Θεώρημα 9.6 ([149]). Υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου ο οποίος, δοσμένου ενός συνεκτικού υπεργραφήματος $H = (V(H), E(H))$ και ενός δάσους $\mathcal{F} = (F, g)$ του H τέτοιου ώστε $|E(F)| < |V(H)| - 1$, βρίσκει

είτε ένα δάσος $\mathcal{F}' = (F', g')$ του H με $|E(F')| \geq |E(F)| + 1$ είτε έναν ισχυρό διαχωριστή X του H .

Απόδειξη. Δοσμένου ενός υπεργραφήματος $H = (V(H), E(H))$ και ενός δάσους $\mathcal{F} = (F, g)$ του H , μία ακολουθία υπερακμών $\mathcal{L}(H, \mathcal{F}) = e_1 e_2 \dots e_t$ τέτοια ώστε $e_i \in E(H)$ καλείται *επαυξητική ακολουθία* (*augmenting sequence*) εάν (α) η e_1 είναι διαχωριστική ακμή, (β) η e_{i+1} ακολουθεί την e_i για όλα τα $1 \leq i \leq t$, και (γ) η e_t είναι αχρησιμοποίητη ακμή.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι εάν υπάρχει μία επαυξητική ακολουθία σύμφωνα με το δάσος $\mathcal{F} = (F, g)$ του H τότε υπάρχει ένα δάσος $\mathcal{F}' = (F', g')$ του H με $|E(F')| \geq |E(F)| + 1$. Το αποδεικνύουμε αυτό με επαγωγή στο μήκος της μικρότερης επαυξητικής ακολουθίας t . Εάν $t = 1$ τότε $\mathcal{L}(H, \mathcal{F}) = e_1$. Σε αυτή την περίπτωση η e_1 είναι και διαχωριστική ακμή και αχρησιμοποίητη ακμή. Αφού η e_1 είναι διαχωριστική ακμή υπάρχουν δύο συνεκτικές συνιστώσες C_1 και C_2 του F τέτοιες ώστε $V(C_1) \cap V(e_1) \neq \emptyset$ και $V(C_2) \cap V(e_1) \neq \emptyset$. Έστω οι $u \in V(C_1) \cap V(e_1)$ και $v \in V(C_2) \cap V(e_1)$. Ορίζουμε τότε τα $F' = (V(H), E(F) \cup \{\{u, v\}\})$ και $g' : E(F') \rightarrow E(H)$ ως $g'(f) = g(f)$ εάν $f \in E(F)$ και $g'(\{u, v\}) = e_1$. Καθώς έχουμε προσθέσει μία ακμή ανάμεσα σε δύο διαφορετικές συνιστώσες του F , έχουμε ότι το F' είναι επίσης δάσος και έχει μία ακμή παραπάνω από το F .

Υποθέτουμε τώρα ότι $t \geq 2$ και ότι εάν μας έχουν δώσει ένα δάσος $\mathcal{F} = (F, g)$ του H και μία συντομότερη επαυξητική ακολουθία $\mathcal{L}(H, \mathcal{F})$ μήκους το πολύ $t' < t$ τότε υπάρχει ένα δάσος $\mathcal{F}' = (F', g')$ του H με $|E(F')| \geq |E(F)| + 1$. Έστω ότι το $\mathcal{F} = (F, g)$ είναι ένα δάσος και η $\mathcal{L}(H, \mathcal{F}) = e_1 e_2 \dots e_t$ είναι μία συντομότερη επαυξητική ακολουθία του F με μήκος t . Παρατηρούμε ότι η e_1 είναι διαχωριστική ακμή. Ως εκ τούτου, υπάρχουν δύο συνεκτικές συνιστώσες C_1 και C_2 του F τέτοιες ώστε $V(C_1) \cap V(e_1) \neq \emptyset$ και $V(C_2) \cap V(e_1) \neq \emptyset$. Έστω οι $u \in V(C_1) \cap V(e_1)$ και $v \in V(C_2) \cap V(e_1)$. Επιπροσθέτως, η e_1 είναι ακμή δάσους και ως εκ τούτου έστω $f \in E(F)$

τέτοια ώστε $g(f) = e_1$. Κατασκευάζουμε τώρα ένα δάσος $\mathcal{F}^* = (F^*, g')$ όπως ακολούθως. Έστω ότι $F^* = (V(H), E(F) \cup \{\{u, v\}\} \setminus \{f\})$ και $g' : E(F^*) \rightarrow E(H)$, όπου $g'(f) = g(f)$ εάν $f \in E(F)$ και $g'(\{u, v\}) = e_1$. Δείχνουμε τώρα ότι η $\mathcal{L}(H, \mathcal{F}^*) = e_2 \dots e_t$ είναι μία επαυξητική ακολουθία μήκους το πολύ $t - 1$ για $\mathcal{F}^*$.

Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες ιδιότητες της $\mathcal{L}(H, \mathcal{F})$.

- εάν $t > 1$ τότε οι $e_1, e_2, \dots, e_{t-1}$ είναι ακμές δάσους και
- εάν $t > 1$ τότε οι $e_2, \dots, e_{t-1}$ δεν είναι διαχωριστικές ακμές σύμφωνα με το $\mathcal{F}$.

Η πρώτη ιδιότητα έπεται από τον ορισμό της $\mathcal{L}(H, \mathcal{F})$ και η δεύτερη από την επιλογή της $\mathcal{L}(H, \mathcal{F})$ να είναι συντομότερη επαυξητική ακολουθία.

Δείχνουμε πρώτα ότι η e_2 είναι διαχωριστική ακμή σύμφωνα με το $\mathcal{F}^*$. Πράγματι, ας θυμηθούμε ότι η e_2 δεν είναι διαχωριστική ακμή σύμφωνα με το $\mathcal{F}$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα C του $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $V(e_2) \cap C \neq \emptyset$ και συνεπώς το $V(e_2)$ τέμνει το πολύ ένα από τα C_1 και C_2 . Ωστόσο, αφού η e_2 ακολουθεί την e_1 , υπάρχουν συνεκτικές συνιστώσες C' και C'' του $E(F) \setminus \{f\}$ τέτοιες ώστε $V(e_2) \cap C' \neq \emptyset$ και $V(e_2) \cap C'' \neq \emptyset$. Αυτό συνεπάγεται ότι $C = C' \cup C'' \cup \{f\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν $C \neq C_1$ και $C \neq C_2$ τότε οι C' και C'' είναι επίσης συνεκτικές συνιστώσες του $\mathcal{F}^*$ και συνεπώς η e_2 είναι διαχωριστική ακμή του $\mathcal{F}^*$. Στην περίπτωση όπου $C = C_1$ ($C = C_2$, αντίστοιχα) τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $u \in V(C')$ ($v \in V(C')$, αντίστοιχα). Αυτό συνεπάγεται ότι οι $C' \cup C_2 \cup \{\{u, v\}\}$ ($C' \cup C_1 \cup \{\{u, v\}\}$, αντίστοιχα) και C'' είναι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathcal{F}^*$ και συνεπώς η e_2 είναι διαχωριστική ακμή του $\mathcal{F}^*$.

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι $g(E(F)) = g'(E(F^*))$, άρα έχουμε ότι η e_t είναι αχρησιμοποίητη ακμή του $\mathcal{F}^*$. Το μόνο που απομένει να αποδειχθεί είναι

ότι η e_{j+1} ακολουθεί την e_j , για $j \in \{2, \dots, t-1\}$, σύμφωνα με το $\mathcal{F}^*$. Έστω ότι η e_j είναι μία υπερακμή, $j \in \{2, \dots, t-1\}$, και έστω ότι οι u_1 και u_2 είναι δύο κορυφές στο $V(e_{j+1})$ οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $F \setminus g^{-1}(e_j)$. Αποδεικνύουμε ότι οι u_1 και u_2 βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $F^* \setminus g'^{-1}(e_j)$. Ας υποθέσουμε ότι όχι, τότε υπάρχει ένα μονοπάτι P από την u_1 στην u_2 στο $F^* \setminus g'^{-1}(e_j)$. Εάν το P δεν περιέχει την $g'^{-1}(e_1)$ τότε το P είναι ένα μονοπάτι από την u στην v στο $F \setminus g^{-1}(e_j)$ επειδή $g'^{-1}(e_j) = g^{-1}(e_j)$ και η $g'^{-1}(e_1)$ είναι η μοναδική ακμή στο F^* που δεν είναι στο F . Αυτό αντιφάσκει στο γεγονός ότι η e_{j+1} ακολουθεί την e_j σύμφωνα με το $\mathcal{F}$. Εάν το P περιέχει την $g'^{-1}(e_1)$ τότε οι u_1 και u_2 πρέπει να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $F^* \setminus g'^{-1}(e_1) = F \setminus g^{-1}(e_1)$. Αλλά, αφού η $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ είναι συντομότερου μήκους, η e_{j+1} δεν ακολουθεί την e_1 σύμφωνα με την $\mathcal{F}$, και ως εκ τούτου οι u_1 και u_2 πρέπει να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα $F \setminus g^{-1}(e_1)$, αντίφαση. Άρα, συμπεραίνουμε ότι η e_{j+1} ακολουθεί την e_j σύμφωνα με το $\mathcal{F}^*$.

Ως εκ τούτου, έχουμε δείξει ότι η $\mathcal{L}(H, \mathcal{F}^*) = e_2 \dots e_t$ είναι μία επαυξητική ακολουθία μήκους το πολύ $t-1$ για το $\mathcal{F}^*$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $\mathcal{F}^*$ έχει μία συντομότερη επαυξητική ακολουθία μήκους το πολύ $t-1$ και ως εκ τούτου από την επαγωγική υπόθεση αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα δάσος $\mathcal{F}' = (F', g')$ του H με $|E(F')| \geq |E(F^*)| + 1 = |E(F)| + 1$.

Για το άλλο μέρος της απόδειξης δείχνουμε ότι εάν δεν έχουμε μία επαυξητική ακολουθία τότε έχουμε έναν ισχυρό διαχωριστή. Λέμε ότι μία υπερακμή e είναι προσιτή από μία υπερακμή $e^* \in Y$ εάν υπάρχει μία ακολουθία υπερακμών $e^* e_1 \dots e_l e$, η e_1 ακολουθεί την e^* , η e_{i+1} ακολουθεί την e_i για $i \in \{1, \dots, l-1\}$, και η e ακολουθεί την e_l . Έστω ότι το Y είναι το σύνολο των διαχωριστικών ακμών σύμφωνα με το $\mathcal{F}$ και ότι το X είναι το σύνολο όλων των υπερακμών που περιέχουν το Y και όλες εκεί-

νες τις υπερακμές που είναι προσιτές από μία υπερακμή στο X . Ισχυρίζομαστε ότι το X είναι ο επιθυμητός ισχυρός διαχωριστής. Έστω ότι το $H' = (V(H), E(H) \setminus X)$ είναι το υπεργράφημα που προκύπτει από το H αφαιρώντας όλες τις υπερακμές από το X . Δείχνουμε τώρα ότι το $P(H')$ έχει τουλάχιστον $|X| + 2$ συνεκτικές συνιστώσες. Ας παρατηρήσουμε ότι όλες οι ακμές στο X είναι ακμές δάσους, διαφορετικά θα υπήρχε επαυξητική ακολουθία. Έστω το $X^{-1} = \{g^{-1}(x) \mid x \in X\}$. Το δάσος F από το οποίο ξεκινήσαμε έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες και ως εκ τούτου όταν αφαιρέσουμε όλες τις ακμές από το X^{-1} έχει τουλάχιστον $|X| + 2$ συνεκτικές συνιστώσες. Δείχνουμε ότι για κάθε συνεκτική συνιστώσα C , του $F' = (V(H), E(F) \setminus X^{-1})$, το $P(H')[V(C)]$ είναι μία συνεκτική συνιστώσα. Ας υποθέσουμε ότι όχι. Τότε υπάρχουν δύο συνεκτικές συνιστώσες C_1 και C_2 του F' τέτοιες ώστε υπάρχει μία υπερακμή $e \notin X$ τέτοια ώστε $V(e) \cap V(C_1) \neq \emptyset$ και $V(e) \cap V(C_2) \neq \emptyset$. Έστω οι $u \in V(e) \cap V(C_1)$ και $v \in V(e) \cap V(C_2)$. Αφού η e δεν είναι διαχωριστική ακμή, οι u και v είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του F . Καθώς οι u και v δεν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του F' , υπάρχει μία υπερακμή $e' \in X$ τέτοια ώστε οι u και v είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $F \setminus g^{-1}(e')$. Ως εκ τούτου η e ακολουθεί την e' , αντίφαση.

Έχουμε δείξει ότι για ένα συνεκτικό υπεργράφημα $H = (V(H), E(H))$ και ένα δάσος $\mathcal{F} = (F, g)$ του H τέτοιο ώστε $|E(F)| < |V(H)| - 1$, είτε υπάρχει ένα δάσος $\mathcal{F}' = (F', g')$ του H με $|E(F')| \geq |E(F)| + 1$ είτε υπάρχει ένας ισχυρός διαχωριστής X του H . Μπορούμε να κάνουμε την απόδειξη κατασκευαστική εάν έχουμε τρόπο να βρούμε ένα συντομότερο επαυξητικό μονοπάτι σύμφωνα με το $\mathcal{F}$. Σε ότι ακολουθεί δείχνουμε πως να βρούμε ένα συντομότερο επαυξητικό μονοπάτι σύμφωνα με το $\mathcal{F}$ αναγάγοντας το στον εντοπισμό ενός συντομότερου μονοπατιού σε ένα βοηθητικό διατεταγμένο γράφημα. Ορίζουμε ένα γράφημα G' με σύνολο κορυφών

$V(G') = \{v_e \mid e \in E(H)\}$, δηλαδή, για κάθε υπερακμή $e \in E(H)$ προσθέτουμε μία κορυφή v_e στο $E(G)$. Προσθέτουμε μία ακμή από το v_e στο v_f εάν η f ακολουθεί την e σύμφωνα με το $\mathcal{F}$. Ως εκ τούτου για να βρούμε μία συντομότερη επαυξητική ακολουθία είναι αρκετό να κάνουμε αναζήτηση κατά πλάτος στο G' αρχίζοντας από το $\{v_e \in V(G') \mid e \text{ είναι διαχωριστική ακμή}\}$ και ελέγχοντας εάν μία κορυφή v_f που αντιστοιχεί σε μία αχρησιμοποίητη ακμή είναι προσιτή. Είναι εμφανές ότι αυτή η διαδικασία χρειάζεται πολυωνυμικό χρόνο. Εάν εντοπίσουμε μία επαυξητική ακολουθία τότε μπορούμε να βρούμε το επιθυμητό δάσος $\mathcal{F}'$ σε πολυωνυμικό χρόνο και εάν δεν βρούμε μία επαυξητική ακολουθία τότε μπορούμε να βρούμε τον επιθυμητό ισχυρό διαχωριστή X όπως περιγράφηκε στην απόδειξη του πολυωνυμικού χρόνου. $\square$

Δοσμένου ενός γραφήματος G , ένα *ταίριασμα* (*matching*) M στο G είναι ένα σύνολο από ακμές όπου δεν υπάρχουν δύο οι οποίες να μοιράζονται μία κορυφή και ένα σύνολο $S \in V(G)$ είναι *κορεσμένο* (*saturated*) από το M εάν για κάθε $v \in S$ υπάρχει μία ακμή $e \in M$ τέτοια ώστε $v \in e$.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.5. Έστω το $H^* = (V(H), E(H) \setminus X)$ και έστω ότι $|X| = t$. Από την υπόθεση, το X είναι ένας ισχυρός διαχωριστής και ως εκ τούτου το πρωτογενές γράφημα $P(H^*)$ έχει τουλάχιστον $t+2$ συνεκτικές συνιστώσες. Έστω ότι οι συνεκτικές συνιστώσες του $P(H^*)$ είναι οι $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_q\}$ όπου $q \geq t+2$ και $X = \{e_1, \dots, e_t\}$. Κατασκευάζουμε ένα βοηθητικό διμερές γράφημα $\mathcal{B}$ με σύνολο κορυφών $A \cup B$ με μία κορυφή $a_i \in A$ για κάθε ακμή $e_i \in X$ και μία κορυφή $b_i \in B$ για κάθε συνεκτική συνιστώσα $C_i \in \mathcal{C}$. Υπάρχει μία ακμή $\{a_i, b_j\}$ εάν $V(e_i) \cap V(C_j) \neq \emptyset$.

Αποδεικνύουμε την διατύπωση του θεωρήματος με επαγωγή στο $|X|$. Για την βάση υποθέτουμε ότι $|X| = 1$ και $X = \{e_1\}$. Για την ακρίβεια,

δείχνουμε ότι, δοσμένης μιας οποιασδήποτε $f : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$, υπάρχει μία συνάρτηση $g : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε $\mathbf{split}(g) = \mathbf{split}(f) \cup \{e_1\}$ η οποία αποδεικνύει τον επιθυμητό ισχυρισμό. Εάν $e_1 \in \mathbf{split}(f)$ η πρόταση ακολουθεί, οπότε υποθέτουμε ότι $e_1 \notin \mathbf{split}(f)$. Καθώς το $P(H)$ είναι συνεκτικό έχουμε ότι οι $\{a_1, b_j\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$ είναι ακμές στο $\mathcal{B}$. Έστω ότι η $g : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ είναι τέτοια ώστε $g(v) = f(v)$ εάν και μόνο εάν $v \notin C_1$. Δηλαδή, για όλες τις κορυφές στο C_1 , η g αντιστρέφει την τιμή που δόθηκε από την f .

Ας παρατηρήσουμε ότι $e_1 \in \mathbf{split}(g)$ αφού το $V(e_1)$ περιέχει μία κορυφή $u \in C_1$ και μία κορυφή $v \in C_2$. Αφού $f(u) = f(v)$, $g(u) \neq g(v)$ και ως εκ τούτου $e_1 \in \mathbf{split}(g)$. Καθώς το X είναι ισχυρός διαχωριστής του H και $X = \{e_1\}$, για κάθε ακμή e στο $\mathbf{split}(f)$, έχουμε ότι το $V(e)$ περιέχεται πλήρως σε μία από τις συνεκτικές συνιστώσες και ως εκ τούτου, το $e \in \mathbf{split}(f)$ συνεπάγεται ότι $e \in \mathbf{split}(g)$. Αυτό αποδεικνύει την απόδειξη της βάσης. Άρα, ας υποθέτουμε ότι $|X| \geq 2$ και η διατύπωση του θεωρήματος ισχύει για όλα τα X' που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος και $|X'| < |X|$. Στο επαγωγικό βήμα θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

- (α) Δεν υπάρχει ταίριασμα στο $\mathcal{B}$ για το οποίο το A είναι κορεσμένο ή
- (β) Υπάρχει ταίριασμα για το οποίο το A είναι κορεσμένο στο $\mathcal{B}$.

Στην Περίπτωση (α), από το θεώρημα του Hall [114], ξέρουμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $A' \subseteq A$, με $A' \neq \emptyset$ τέτοιο ώστε $|A'| > |N(A')|$ και ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να βρεθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Ισχυριζόμαστε ότι το $X' = X \setminus \{e_j \mid a_j \in A'\}$ είναι ένας ισχυρός διαχωριστής και είναι μικρότερου μεγέθους από τον X . Είναι ευκρινές ότι $|X'| < |X|$ καθώς $A' \neq \emptyset$. Δείχνουμε τώρα ότι το X' είναι πράγματι ισχυρός διαχωριστής. Έστω το $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus \{C_j \mid b_j \in N(A')\}$. Παρατηρούμε ότι στο $H' = (V(H), E(H) \setminus X')$, κάθε $C_i \in \mathcal{C}'$ είναι συνεκτική συνιστώσα. Το μέγεθος του $\mathcal{C}'$ είναι φραγμένο

όπως ακολούθως

$$|C'| = |C| - |N(A')| \geq (t+2) - |N(A')| > (t+2) - |A'| = t - |A'| + 2 = |X'| + 2,$$

και ως εκ τούτου το X' είναι όντως ισχυρός διαχωριστής. Σε αυτή την περίπτωση η διατύπωση του θεωρήματος έπεται από την επαγωγική υπόθεση καθώς $|X'| < |X|$.

Στην Περίπτωση (β) υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ταίριασμα M για το οποίο το A είναι κορεσμένο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το M είναι το $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_t, b_t\}\}$. Έστω ότι το $U = \{b_{t+1}, \dots, b_q\}$ είναι το σύνολο των κορυφών στο B που δεν είναι κορεσμένες από το M . Επαναληπτικά κατασκευάζουμε ένα σύνολο U' το οποίο περιέχει το U όπως ακολούθως. Αρχικά θέτουμε $U' := U$ και $\tilde{A} = A$.

- Ελέγχουμε εάν υπάρχει ένας γείτονας μίας κορυφής του U' στο $\tilde{A}$. Εάν ναι, πηγαίνουμε στο επόμενο βήμα. Διαφορετικά, εξάγουμε το U' .
- Έστω ότι η a_j είναι η κορυφή στο $\tilde{A}$ η οποία έχει έναν γείτονα στο U' . Θέτουμε $U' := U' \cup \{b_j\}$ (b_j είναι το ταιριαστό άκρο της a_j στο B), $\tilde{A} := \tilde{A} \setminus \{a_j\}$, και πηγαίνουμε στο πρώτο βήμα.

Έστω ότι το U' είναι το σύνολο που επιστρέφεται από την παραπάνω επαναληπτική διαδικασία. Παρατηρούμε ότι, καθώς το $P(H)$ είναι συνεκτικό, υπάρχει τουλάχιστον μία κορυφή a_j η οποία έχει γείτονα στο U . Συνεπώς, η παραπάνω διαδικασία πηγαίνει στο δεύτερο βήμα τουλάχιστον μία φορά και ως εκ τούτου $U \subsetneq U'$ και $\tilde{A} \subsetneq A$. Έστω το $A' = A \setminus \tilde{A}$ και έστω το $X' = \{e_j \mid a_j \in A'\}$. Σε ότι ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι το X' είναι το επιθυμητό υποσύνολο του X που αναφέρεται στην διατύπωση του θεωρήματος.

Δείχνουμε πρώτα ότι το X' είναι ισχυρός διαχωριστής. Έστω το $C' = \{C_j \mid b_j \in U'\}$. Ας παρατηρήσουμε ότι, από την κατασκευή του, δεν υπάρχει κορυφή στο $\tilde{A}$ η οποία έχει γείτονα και στο U' και στο $B \setminus U'$.

Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε $C_i \in \mathcal{C}'$ είναι μία συνεκτική συνιστώσα του $H' = (V(H), E(H) \setminus X')$. Το μέγεθος του $\mathcal{C}'$ είναι φραγμένο ως εξής

$$|\mathcal{C}'| = |U'| = |U| + |A'| \geq |A'| + 2 = |X'| + 2,$$

και ως εκ τούτου το X' είναι ένας ισχυρός διαχωριστής.

Δείχνουμε ότι, για οποιαδήποτε δοσμένη $f : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$, υπάρχει μία συνάρτηση $g : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε $\mathbf{split}(g) = \mathbf{split}(f) \cup X'$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $U' \setminus U = \{b_{1'}, b_{2'}, \dots, b_{r'}\}$ και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $b_{1'}, b_{2'}, \dots, b_{r'}$ είναι η σειρά με την οποία αυτά τα αντικείμενα συμπεριλήφθηκαν στο σύνολο U' . Έστω το $B_i = B[U \cup \{b_{1'}, \dots, b_{i'}\} \cup \{a_{1'}, \dots, a_{i'}\}]$ και έστω ότι το H_i είναι το υπεργράφημα που ενάγεται από τις κορυφές $V(C_{1'}) \cup \dots \cup V(C_{i'}) \cup e_{1'} \cup \dots \cup e_{i'}$. Επαναληπτικά κατασκευάζουμε την συνάρτηση $g : V(H) \rightarrow \{-1, 1\}$ ως εξής. Αρχικά θέτουμε $g := f$ και $i := 1$ και επαναλαμβάνουμε το ακόλουθο έως ότου $i = r$:

Ελέγχουμε εάν $e_{i'} \in \mathbf{split}(g, H_i)$. Εάν ναι, τότε $i := i + 1$ και επαναλαμβάνουμε. Διαφορετικά, έστω ότι η $C_{i'}$ είναι η συνεκτική συνιστώσα η οποία αντιστοιχεί στο $b_{i'}$ που έχει σύνολο κορυφών $V(C_{i'})$. Τώρα για κάθε κορυφή $u \in V(C_{i'})$ αλλάζουμε την $g(u)$ σε $-f(u)$. Βασικά, αντιστρέφουμε την ανάθεση των -1 και 1 στο σύνολο κορυφών $V(C_{i'})$. Θέτουμε $i := i + 1$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Δείχνουμε τώρα ότι $\mathbf{split}(g) = \mathbf{split}(f) \cup X'$. Παρατηρούμε ότι εάν $e \notin X$ τότε, αφού το X είναι ισχυρός διαχωριστής του H , υπάρχει μία συνεκτική συνιστώσα $C \in \mathcal{C}$ τέτοια ώστε $e \subseteq C$. Παρατηρούμε τότε ότι είτε $g(v) = f(v)$ για κάθε $v \in e$ είτε $g(v) = -f(v)$ για κάθε $v \in V$. Συνδυάζοντας αυτό με την Παρατήρηση 9.1, διασφαλίζουμε ότι $e \in \mathbf{split}(f)$ εάν και μόνο εάν $e \in$

split(g). Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι, από τον τρόπο που κατασκευάστηκε το X' , εάν $e \in X \setminus X'$ τότε $V(e) \cap V(C_{i'}) = \emptyset$, $i \in [r]$. Παρατηρούμε ότι $g(v) = f(v)$, $v \in V(H) \setminus (V(C_{1'}) \cup \dots \cup V(C_{r'}))$ και ως εκ τούτου $e \in \mathbf{split}(g)$ εάν και μόνο εάν $e \in \mathbf{split}(f)$. Παραμένει να αποδείξουμε ότι εάν $e \in X'$, τότε $e \in \mathbf{split}(g)$. Παρατηρούμε ότι εάν, στο βήμα i , $e'_i \notin \mathbf{split}(g, H_i)$ τότε σε κάθε κορυφή ανατίθεται το ίδιο χρώμα από την g . Επιπροσθέτως, παρατηρούμε ότι από την κατασκευή υπάρχει μία $b_{j'} \in \{b_{1'}, b_{2'} \dots, b_{(i-1)'}\}$ τέτοια ώστε $V(e_{i'}) \cap V(C_{j'}) \neq \emptyset$ και θυμόμαστε ότι $e_{i'} \cap V(C_{i'}) \neq \emptyset$. Καθώς το χρώμα των κορυφών στο $V(C_{i'})$ αλλάζει, προκύπτει ότι αφού ολοκληρωθεί αυτό το βήμα του αλγόριθμου η $e_{i'}$ είναι χωρισμένη. Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $q < i$, $e_{q'} \in \mathbf{split}(g, H_{q'})$ και $H_{q'} \subseteq H_{i'} \setminus V(C_{i'})$. Αυτό συνεπάγεται ότι όλες οι ακμές $e_{q'}$, με $q < i$, παραμένουν χωρισμένες μετά την αντιστροφή των χρωμάτων στις κορυφές του $V(C_{i'})$. Άρα, μετά το r -οστό βήμα της διαδικασίας, έχουμε ότι $\mathbf{split}(g) = \mathbf{split}(f) \cup X'$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι το Θεώρημα 9.5 καταλήγει στον ακόλουθο Κανόνα Αναγωγής.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ 2. : Έστω ότι το (H, k) είναι μία είσοδος του AM- r - $\Delta\Sigma$ και ότι το X' είναι ένα σύνολο ορισμένο όπως στο Θεώρημα 9.5. Αφαιρούμε το X' από το σύνολο των υπερακμών και μειώνουμε το k σε $k - \sum_{e \in X'} \frac{1}{2^{|e|-1}}$, δηλαδή, παίρνουμε μία είσοδο $(H', k - \sum_{e \in X'} \frac{1}{2^{|e|-1}})$, όπου $E(H') = E(H) \setminus X'$.

Τώρα επιχειρηματολογούμε για την ορθότητα του Κανόνα Αναγωγής 2. Έστω ότι το (H, k) είναι μία είσοδος του AM- r - $\Delta\Sigma$ και το X' είναι όπως στο Θεώρημα 9.5. Από το Θεώρημα 9.5 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας χρωματισμός χ τέτοιος ώστε

$$|\mathbf{split}(\chi, H)| = \mathbf{split}(H)$$

και ο χ διαχωρίζει όλες τις υπερακμές στο X' . Αυτό συνεπάγεται ότι στο H' τουλάχιστον

$$\mu_H + k - |X'| \geq \mu_{H'} + \sum_{e \in X'} \left(1 - \frac{1}{2^{|e|-1}}\right) + k - |X'| \geq \mu_{H'} + k - \sum_{e \in X'} \frac{1}{2^{|e|-1}}$$

υπερακμές είναι χωρισμένες. Για την άλλη κατεύθυνση, ας παρατηρήσουμε ότι, εάν στο H' έχουμε $\mu_{H'} + k - \sum_{e \in X'} \frac{1}{2^{|e|-1}}$ χωρισμένες υπερακμές στο H έχουμε $\mu_{H'} + k - \sum_{e \in X'} \frac{1}{2^{|e|-1}} + |X'|$ χωρισμένες ακμές. Η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι στο H , έχουμε $\mu_H + k$ χωρισμένες ακμές. Αυτό αποδεικνύει την ορθότητα του Κανόνα Αναγωγής 2.

9.4 Γραμμικός Πυρήνας για Σταθερό r και Απόδειξη του Θεωρήματος 9.2

Σε αυτή την ενότητα, συνδυάζουμε τα αποτελέσματά μας από προηγούμενη ενότητα με γνωστούς κανόνες αναγωγής από την [149] (που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα), για τον p -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ, για να πάρουμε τον επιθυμητό πυρήνα για τον AM- r - $\Delta\Sigma$ όταν $r = O(1)$. Τέλος, δίνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.

Θεώρημα 9.7. *Για οποιαδήποτε σταθερά r , ο AM- r - $\Delta\Sigma$ επιδέχεται έναν πυρήνα με $O(k)$ κορυφές.*

Απόδειξη. Έστω ότι το (H, k) είναι μία ανηγμένη (reduced) είσοδος του AM- r - $\Delta\Sigma$, δηλαδή, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τους Κανόνες Αναγωγής 1 και 2. Αφού ο Κανόνας Αναγωγής 1 δεν είναι εφαρμόσιμος, το H είναι συνεκτικό. Επιπλέον, αφού ο Κανόνας Αναγωγής 2 δεν εφαρμόζεται, το H δεν έχει ισχυρό διαχωριστή. Από το Θεώρημα 9.1, έπεται ότι εάν $k \leq \frac{n-1}{r \cdot 2^{r-1}}$

τότε η απάντηση στην είσοδο είναι ΝΑΙ. Διαφορετικά, $\frac{n-1}{r \cdot 2^{r-1}} \leq k$, και άρα $n \leq r \cdot 2^{r-1}k + 1 = O(k)$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.2. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 9.7 υποθέτουμε ότι το (H, k) είναι μία ανηγμένη είσοδος και ως εκ τούτου το H είναι συνεκτικό ως προς διαμερίσεις. Ας διαλέξουμε $\alpha = 1/2$ και άρα $r = \log \sqrt{n}$. Από το Θεώρημα 9.1, έπεται ότι εάν $k \leq \frac{n-1}{r \cdot 2^{r-1}}$ τότε η απάντηση είναι ΝΑΙ. Διαφορετικά, $\frac{n-1}{r \cdot 2^{r-1}} \leq k$, και άρα $n \leq r \cdot 2^{r-1}k + 1$. Αντικαθιστώντας με $r = \log \sqrt{n}$, παίρνουμε ότι $2n \leq (\log \sqrt{n})\sqrt{n}k + 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι $k \geq n^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ για κάθε σταθερά $\epsilon > 0$. Καθώς μπορούμε πάντα να επιλύσουμε τον AM- r - $\Delta\Sigma$ για οποιοδήποτε r σε χρόνο 2^n , παίρνουμε ότι ο AM- $\alpha \log n$ - $\Delta\Sigma$ μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $O^*(2^{k^{\frac{2}{1-\epsilon}}})$. Σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει $\alpha = 1 - \delta$ για οποιαδήποτε σταθερά δ . $\square$

9.5 Το Αποτέλεσμα του Κάτω Φράγματος και η Απόδειξη του Θεωρήματος 9.3

Σε αυτή την ενότητα, θα δείξουμε ότι ο AM- $\lceil \log n \rceil$ - $\Delta\Sigma$ δεν είναι στο XP εκτός και αν $\text{NP} \subseteq \text{DTIME}[n^{\log \log n}]$. Προς αυτή την κατεύθυνση θα δώσουμε μία κατάλληλη αναγωγή από το r -OOI- IAT (r -NAE-SAT). Ένας r -τύπος σε Κανονική Συζευκτική Μορφή $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ είναι ένας τύπος του Boole όπου κάθε συζευκτικός όρος έχει μέγεθος τουλάχιστον 2 και το πολύ r και κάθε συζευκτικός όρος είναι μία διάζευξη από εγγράμματα. Το r -OOI- IAT είναι μία παραλλαγή r - IAT , όπου δοσμένου ενός r -τύπου σε Κανονική Συζευκτική Μορφή $\phi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ με n μεταβλητές, έστω $V(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$, ο στόχος είναι να βρεθεί μία $\{0, 1\}$ -αποτίμηση στο $V(\phi)$ τέτοια ώστε όλοι οι συζευκτικοί όροι να χωρίζονται. Μία αποτίμηση χωρίζει έναν συζευκτικό

όρο εάν τουλάχιστον ένα από τα εγγράμματά του παίρνει τιμή 1 και τουλάχιστον ένα από τα εγγράμματά του παίρνει τιμή 0. Καλούμε μία αποτίμηση που χωρίζει κάθε συζευκτικό όρο διαχωριστική αποτίμηση.

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.3. Θα αποδείξουμε το θεώρημα σε τρία βήματα. Πρώτα, θα αποδείξουμε ότι το r -ΟΟΙ-ΙΛΤ είναι NP-πλήρες για $r = \lceil \log n \rceil + 1$. Σε όλη την απόδειξη το r έχει τεθεί να είναι $\lceil \log n \rceil + 1$. Είναι γνωστό ότι το $\lceil \log n \rceil$ -ΙΛΤ είναι NP-πλήρες ακόμα και όταν η είσοδος του έχει το πολύ cn συζευκτικούς όρους [40].

Για να δείξουμε ότι το r -ΟΟΙ-ΙΛΤ είναι NP-πλήρες θα δώσουμε την καθιερωμένη αναγωγή σε αυτό από το $\lceil \log n \rceil$ -ΙΛΤ. Έστω ότι το $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ είναι μία είσοδος του $\lceil \log n \rceil$ -ΙΛΤ. Εισάγουμε μία νέα καθολική μεταβλητή z και δημιουργούμε μία είσοδο $\phi' = C'_1 \wedge \dots \wedge C'_m$ για το r -ΟΟΙ-ΙΛΤ παίρνοντας $C_i \wedge z$ για κάθε συζευκτικό όρο C_i του ϕ . Εάν υπάρχει μία αποτίμηση π η οποία ικανοποιεί τον ϕ τότε τουλάχιστον ένα έγγραμμα σε κάθε συζευκτικό όρο του ϕ είναι ορισμένο σε 1. Τότε, η $\pi \cup \{z = 0\}$ είναι μία αποτίμηση η οποία ικανοποιεί τον ϕ' και χωρίζει κάθε συζευκτικό όρο. Αντίστροφα, εάν η τ είναι μία αποτίμηση που ικανοποιεί και χωρίζει τον ϕ' τότε το ίδιο είναι και η συμπληρωματική της αποτίμηση τ' (αυτή που προκύπτει από την τ αλλάζοντας τα 0 σε 1 και τα 1 σε 0). Σε μία από τις δύο αποτιμήσεις, έστω την τ , $z = 0$ και κάποιο άλλο έγγραμμα σε κάθε συζευκτικό όρο έχει τεθεί 1. Άρα ο περιορισμός της τ στις μεταβλητές του ϕ είναι μία αποτίμηση που ικανοποιεί τον ϕ .

Το δεύτερο μας βήμα είναι να δείξουμε μία αναγωγή από το r -ΟΟΙ-ΙΛΤ στον r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΤΥΝΟΛΩΝ η οποία τρέχει σε χρόνο $O(n^{\log \log n})$. Στον r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΤΥΝΟΛΩΝ μας δίνεται ένα r -υπογράφημα και στόχος μας είναι να ελέγξουμε εάν υπάρχει ένας διαχωριστικός 2-χρωματισμός του υπεργραφήματος (έναν 2-χρωματισμός ενός υπεργραφήματος ο οποίος χωρίζει κάθε υπερακμή). Ας θυμηθούμε ότι, ορίσαμε έναν 2-χρωματισμό ενός υπεργρα-

φήματος ως μία συνάρτηση από το $V(H)$ στο $\{-1, 1\}$. Ωστόσο, για αυτή την απόδειξη θα τον θεωρήσουμε ως μία συνάρτηση από το σύνολο κορυφών του H στο $\{0, 1\}$.

Έστω ότι το $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ είναι μία είσοδος του r -ΟΟΓ-ΙΛΤ, με σύνολο μεταβλητών $V(\phi)$ μεγέθους n και $m \leq \gamma n$ συζευκτικούς όρους, για κάποια σταθερά γ . Θέλουμε να κατασκευάσουμε μία είσοδο H του r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΩΝ. Για κάθε μεταβλητή x του ϕ , το H έχει δύο κορυφές x_1 και x_2 . Για κάθε συζευκτικό όρο C του ϕ κατασκευάζουμε μία αντίστοιχη υπερακμή C_h του H με τον ακόλουθο τρόπο: Εάν η μεταβλητή x εμφανίζεται σε θετική μορφή στο C τότε συμπεριλαμβάνουμε την x_1 στην C_h και εάν η $\neg x$ εμφανίζεται στον C τότε συμπεριλαμβάνουμε την x_2 στην C_h . Ουσιαστικά, η x_1 αντιστοιχεί στην x και η x_2 στην $\neg x$.

Τώρα, περιγράφουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος, δοσμένης μίας μεταβλητής x του ϕ , εξάγει μία συλλογή $\mathcal{S}^x$ από υπερακμές μεγέθους r . Έστω το $\mathcal{S}_1^x = \{x_1, x_2\}$. Για $i = 2, \dots, r-1$, πράττουμε ως εξής.

Θέτουμε $\mathcal{S}_i^x = \mathcal{S}_{i-1}^x$ και, ενόσω υπάρχει μία υπερακμή $S \in \mathcal{S}_i^x$ τέτοια ώστε $|S| = i$, εισάγουμε r νέες κορυφές w_j^S , $j \in [r]$, προσθέτουμε τα σύνολα $\{w_1^S, w_2^S, \dots, w_r^S\}$ και $S \cup \{w_j^S, j \in [r]\}$, στο $\mathcal{S}_i^x$ και αφαιρούμε το σύνολο S .

Προσθέτουμε τις υπερακμές του $\mathcal{S}^x = \mathcal{S}_{r-1}^x$ στο υπεργράφημα H . Παρατηρούμε ότι μετά την εκτέλεση του βήματος $i \in [r-1]$ όλες οι υπερακμές που περιέχονται στο σύνολο $\mathcal{S}_i^x$ είναι μεγέθους είτε $i+1$ είτε r . Άρα, κάθε υπερακμή του $\mathcal{S}_{r-1}^x$ έχει μέγεθος ακριβώς r .

Συνοψίζοντας την κατασκευή έχουμε το ακόλουθο σύνολο υπερακμών:

$$\{C_h \mid \text{Ο } C \text{ είναι συζευκτικός όρος του } \phi\} \cup \left(\bigcup_{x \in V(\phi)} \mathcal{S}^x \right).$$

Το σύνολο κορυφών του H απαρτίζεται από τις κορυφές που εμφανίζονται σε αυτούς τους συζευκτικούς όρους.

Είναι εύκολο να δούμε ότι για οποιαδήποτε διαχωριστική αποτίμηση τ του ϕ έχουμε έναν διαχωριστικό $\{0, 1\}$ -χρωματισμό του H θέτοντας $x_1 = \tau(x)$ και $x_2 = \tau(\neg x)$ και αναθέτοντας τιμή 0 ή 1 στις νεοεισαχθείσες κορυφές με τέτοιο τρόπο ώστε να χωρίζονται όλες οι υπερακμές οι οποίες δεν περιέχουν κορυφές που αντιστοιχούν σε μεταβλητές του ϕ . Μπορούμε να αναθέσουμε 0 ή 1 στις νεοεισαχθείσες κορυφές με συνεπή τρόπο επειδή όλες οι υπερακμές οι οποίες δεν περιέχουν κορυφές που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του ϕ είναι ανά δύο ξένες.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο δείχνουμε τον ακόλουθο βοηθητικό ισχυρισμό. Ο ισχυρισμός θα μας επιτρέψει να επιχειρηματολογήσουμε ότι σε οποιονδήποτε διαχωριστικό 2-χρωματισμό του H οι κορυφές x_1 και x_2 που αντιστοιχούν σε μία μεταβλητή x θα ανατίθενται πάντα 0 και 1, αντίστοιχα, ή 1 και 0, αντίστοιχα.

Ισχυρισμός 13. Για κάθε $i \in \{2, \dots, r-1\}$ και κάθε 2-χρωματισμό χ ο οποίος χωρίζει όλες τις υπερακμές στο $\mathcal{S}_i^x$, υπάρχουν υπερακμές $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_i^x$ τέτοιες ώστε $\{x_1, x_2\} \subseteq S_1 \cap S_2$, $|S_1| = |S_2| = i+1$, τα $S'_i = S_i \setminus \{x_1, x_2\}$, $i \in [2]$, είναι μονοχρωματικά, και $\chi(S'_1) \cap \chi(S'_2) = \emptyset$ (δηλαδή, τα χρώματα στις κορυφές των S'_1 και S'_2 είναι ξένα).

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας επαγωγή στο i . Για την βάση, έστω $i = 2$. Για αυτή την περίπτωση ξέρουμε ότι το $\mathcal{S}_2^x$ είναι ακριβώς το $\{w_1^S, w_2^S, \dots, w_r^S\}$ και $S \cup \{w_j^S\}$, $j \in [r]$, όπου $S = \{x_1, x_2\}$. Αφού το $\{w_1^S, w_2^S, \dots, w_r^S\}$ είναι χωρισμένο ξέρουμε ότι υπάρχουν $a, b \in [r]$, τέτοια ώστε $\chi(w_a^S) = 0$ και $\chi(w_b^S) = 1$. Ας πάρουμε $S_1 = S \cup \{w_a^S\}$ και $S_2 = S \cup \{w_b^S\}$. Προφανώς, αυτά ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στην διατύπωση του ισχυρισμού.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $\ell = i \geq 2$. Έστω ότι η χ είναι ένας διαχωριστικός 2-χρωματισμός του $\mathcal{S}_{\ell+1}^x$. Για να εφαρμόσουμε την

επαγωγική υπόθεση θα θέλαμε να δείξουμε ότι η χ' , ο περιορισμός της χ στις κορυφές του $\mathcal{S}_\ell^x$, είναι ένας διαχωριστικός 2-χρωματισμός του $\mathcal{S}_\ell^x$. Ωστόσο, νέες κορυφές προστίθενται στο $\mathcal{S}_{\ell+1}^x$ μόνο όταν υπάρχει μία υπερακμή $S \in \mathcal{S}_\ell^x$ τέτοια ώστε $|S| = \ell$. Και σε αυτή την περίπτωση εισάγαμε r νέες κορυφές w_j^S , $j \in [r]$, προσθέσαμε τα σύνολα $\{w_1^S, w_2^S, \dots, w_r^S\}$ και $S \cup \{w_j^S, j \in [r]\}$, στο $\mathcal{S}_\ell^x$, και αφαιρέσαμε το σύνολο S . Το σύνολο $\{w_1^S, w_2^S, \dots, w_r^S\}$ στο $\mathcal{S}_{\ell+1}^x$ εξαναγκάζει ότι οι κορυφές στο S δεν μπορούν να έχουν ανατεθεί όλες 0 ή όλες 1 από την χ και άρα, από την χ' . Αυτό αποδεικνύει ότι η χ' χωρίζει όλα τα σύνολα μεγέθους ℓ στο $\mathcal{S}_\ell^x$. Επιπροσθέτως, όλα τα άλλα σύνολα στο $\mathcal{S}_\ell^x$ είναι μεγέθους r και ως εκ τούτου όλα εμφανίζονται στο $\mathcal{S}_{\ell+1}^x$ και άρα αυτόματα χωρίζονται από την χ' . Αυτό αποδεικνύει ότι η χ' είναι πράγματι ένας διαχωριστικός 2-χρωματισμός για το $\mathcal{S}_\ell^x$.

Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν υπερακμές Q_1 και Q_2 μεγέθους ℓ τέτοιες ώστε οι $Q_j \setminus \{x_1, x_2\}$, $j \in [2]$, είναι μονοχρωματικές αλλά όχι με το ίδιο χρώμα. Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχουν κορυφές $w_p^{Q_1}$, $p \in [r]$, και $w_q^{Q_2}$, $q \in [r]$, τέτοιες ώστε οι υπερακμές $\{w_1^{Q_1}, \dots, w_r^{Q_1}\}$, $\{w_1^{Q_2}, \dots, w_r^{Q_2}\}$, $Q_1^p = Q_1 \cup \{w_p^{Q_1}\}$, $p \in [r]$, και $Q_2^q = Q_2 \cup \{w_q^{Q_2}\}$, $q \in [r]$, όλες εμφανίζονται στο $\mathcal{S}_{\ell+1}^x$ και χωρίζονται από την χ . Συνεπώς, υπάρχουν κορυφές $w_{p_1}^{Q_1}$, $w_{p_2}^{Q_1}$, και $w_{q_1}^{Q_2}$, $w_{q_2}^{Q_2}$ τέτοιες ώστε $\chi(w_{p_1}^{Q_1}) \neq \chi(w_{p_2}^{Q_1})$ και $\chi(w_{q_1}^{Q_2}) \neq \chi(w_{q_2}^{Q_2})$. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε $S_1 = Q_1^{p_j}$ και $S_2 = Q_2^{q_s}$, $j, s \in [2]$, έτσι ώστε οι $Q_1^{p_j} \setminus \{x_1, x_2\}$ και $Q_2^{q_s} \setminus \{x_1, x_2\}$ να είναι μονοχρωματικές αλλά όχι με το ίδιο χρώμα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. $\square$

Δίνουμε τώρα την απόδειξη της αντίστροφης κατεύθυνσης. Έστω ότι η χ είναι ένας διαχωριστικός $\{0, 1\}$ -χρωματισμός του H . Τότε από τον Ισχυρισμό 13 παίρνουμε ότι κάθε ζεύγος (x_1, x_2) είναι χρωματισμένο διαφορετικά. Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι εύκολο να ιδωθεί καθώς ο μόνος τρόπος να χωρίσουμε τις S_1 και S_2 οι οποίες προέρχονται από τον Ισχυρισμό 13 είναι να αναθέσουμε στις x_1 και x_2 διαφορετικά χρώματα για κάθε μεταβλητή

$x \in V(\phi)$ από την χ . Θέτοντας $x = \chi(x_1)$ για κάθε μεταβλητή του ϕ παίρνουμε μία διαχωριστική αποτίμηση για τον ϕ .

Από την κατασκευή, έπεται ότι το συνολικό πλήθος κορυφών του H είναι $2n + nT$, όπου $T = \frac{r(r^{r-2}-1)}{r-1}$, και το συνολικό πλήθος υπερακμών του H είναι $\gamma n + n(T + 1)$. Συνεπώς, το πλήθος των υπερακμών είναι γραμμικό στο πλήθος των κορυφών του. Αφού $r = \lceil \log n \rceil + 1$ έχουμε ότι ο χρόνος κατασκευής της εισόδου θα πάρει $(\log n)^{O(\log n)} = n^{O(\log \log n)}$.

Για το τρίτο βήμα θα δείξουμε ότι εάν έχουμε έναν αλγόριθμο για τον $\text{AM}-(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\Delta\Sigma$ ο οποίος τρέχει σε χρόνο $n^{g(k)}$ τότε μπορούμε να επιλύσουμε το $(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\text{OOI-}\text{IAT}$ με n μεταβλητές και γn συζευκτικούς όρους (το πλήθος των όρων είναι γραμμικό στο πλήθος των μεταβλητών) σε χρόνο $n^{O(\log \log n)}$. Αυτό αντιφάσκει εκτός και αν $\text{NP} \subseteq \text{DTIME}(n^{\log \log n})$.

Δοσμένης μίας εισόδου ϕ του $(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\text{OOI-}\text{IAT}$ με n μεταβλητές και γn συζευκτικούς όρους, πρώτα εφαρμόζουμε την αναγωγή στον $(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\text{ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟ ΣΥΝΟΛΩΝ}$. Αυτό μας δίνει μία είσοδο H με n' κορυφές και $\delta n'$ υπερακμές για κάποια σταθερά δ . Ωστόσο, $\mu_H = (1 - \frac{1}{2^{\log n'}}) \cdot \delta n' = \delta n' - \delta$. Άρα, μπορούμε να ελέγξουμε εάν το H έχει έναν διαχωριστικό 2-χρωματισμό παίρνοντας $k = \lceil \delta \rceil$ ως την παράμετρο στον $\text{AM}-(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\Delta\Sigma$ και τρέχοντας τον αλγόριθμο για τον $\text{AM}-(\lceil \log n \rceil + 1)\text{-}\Delta\Sigma$. Αφού το $k = \lceil \delta \rceil$ είναι σταθερά, ο αλγόριθμος με χρόνο εκτέλεσης $n^{g(k)}$ τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άρα, έχουμε δείξει ότι υπάρχει μία σταθερά β τέτοια ώστε ο $\text{AM-}\beta \log n\text{-}\Delta\Sigma$ δεν είναι στο XP εκτός και αν $\text{NP} \subseteq \text{DTIME}(n^{\log \log n})$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

9.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, γενικεύσαμε ένα παλιό αποτέλεσμα του Edwards σχετικά με το μέγεθος της μέγιστης τομής συνεκτικών γραφημάτων σε συνεκτικά ως προς διαμερίσεις r -υπεργραφήματα. Τότε χρησιμοποιήσαμε αυτό το αποτέλεσμα για να δείξουμε ότι μία παραλλαγή πάνω από άνω φράγμα του ΜΕΓΙΣΤΟΥ r -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΣΤΥΝΟΛΩΝ είναι παραμετρικά βαθτή. Υπάρχουν αρκετά ενδιαφέροντα προβλήματα τα οποία παραμένουν ανοικτά στην παραμετροποιημένη μελέτη προβλημάτων πάνω από εγγυημένα κάτω φράγματα, καθώς και στις συγκεκριμένες κατευθύνσεις που επιδιώκονται σε αυτό το κεφάλαιο. Τα πιο αξιοσημείωτα είναι:

- Είναι το κάτω φράγμα $\mu_H + \frac{n-1}{r2^{r-1}}$ της $\zeta(H)$ για τα συνεκτικά ως προς διαμερίσεις r -υπεργραφήματα σφικτό; Δηλαδή, υπάρχει μία άπειρη οικογένεια από συνεκτικά ως προς διαμερίσεις r -υπεργραφήματα όπου $\zeta(H) = \mu_H + \frac{n-1}{r2^{r-1}}$;
- Είναι ο $\lceil \log n \rceil$ -ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΤΥΝΟΛΩΝ με γραμμικό πλήθος όρων NP-πλήρης;
- Είναι η ερώτηση της εύρεσης ενός ανεξάρτητου συνόλου μεγέθους $\frac{n}{4} + k$ σε επίπεδα γραφήματα παραμετρικά βαθτή; Ακόμα και η ύπαρξη ενός αλγορίθμου στο XP παραμένει άγνωστη.

Ανίχνευση Γραφημάτων: Ένας Χαρακτηρισμός Παιγνίου για την Τάξη Κύκλου

10.1 Εισαγωγή

Τα παίγνια ανίχνευσης γραφημάτων είναι ένα δημοφιλές μέσον για τον χαρακτηρισμό, και ακόμα και τον ορισμό, παραμέτρων σε γραφήματα. Υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα σε έναν χαρακτηρισμό μιας παραμέτρου μέσω παιγνίων ανίχνευσης γραφημάτων: Παρέχει χρήσιμη διαίσθηση η οποία μπορεί να βοηθήσει στην κατασκευή πιο γενικών ή πιο ειδικών παραμέτρων, δίνει διαίσθηση στις σχέσεις με άλλες, παρόμοια χαρακτηρισμένες, παραμέτρους, και είναι ιδιαίτερα χρήσιμος από αλγοριθμική σκοπιά καθώς πολλές παράμετροι που αντιστοιχούν σε τέτοια παίγνια είναι και δομικά ανθεκτικές και αποδοτικά υπολογίσιμες.

10.1.1 Ανίχνευση Κορυφών σε Γραφήματα

Ένα από τα πιο συχνά παίγνια σε ανίχνευση γραφημάτων (graph searching) είναι το παίγνιο ανίχνευσης κορυφών. Σε αυτό το παίγνιο αρκετοί *ανιχνευτές* (searchers) και ένας *φυγάς* (fugitive) καταλαμβάνουν κορυφές ενός γραφήματος και κάνουν ταυτόχρονες κινήσεις. Ο (*σοφός* (omniscient)) φυγάς κινείται κατά μήκος μονοπατιών οποιουδήποτε μήκους που δεν περιέχουν ανιχνευτές ενώ οι κινήσεις των ανιχνευτών δεν επηρεάζονται από την τοπολογία του γραφήματος. Στόχος του παιγνίου είναι η ελαχιστοποίηση του πλήθους των ανιχνευτών που απαιτούνται ώστε να αιχμαλωτίσουν τον φυγά εγκλωβίζοντας τον σε κάποια κορυφή του γραφήματος και τοποθετώντας έναν ανιχνευτή στην ίδια κορυφή.

Αυτό το παίγνιο έχει μελετηθεί εκτενώς και αρκετές σημαντικές παράμετροι γραφημάτων όπως το δέντροπλάτος [56, 217] και το πλάτος μονοπατιού [137] μπορούν να χαρακτηριστούν από εύλογες παραλλαγές αυτού του παιγνίου. Μία παραλλαγή η οποία χρησιμοποιείται συχνά, για την ακρίβεια αυτή που ξεχωρίζει το δέντροπλάτος και το πλάτος μονοπατιού, είναι εάν η τοποθεσία του φυγά είναι γνωστή ή άγνωστη στους ανιχνευτές.

Μία άλλη συνήθης παραλλαγή είναι εάν οι ανιχνευτές χρησιμοποιούν μία μονότονη (monotone) ή μη-μονότονη (non-monotone) στρατηγική ανίχνευσης, δηλαδή, εάν η στρατηγική τους παρέχει πρόσβαση στον φυγά σε ήδη ανιχνευμένες περιοχές (μη-μονότονη στρατηγική) ή όχι (μονότονη στρατηγική). Οι μονότονες στρατηγικές ανίχνευσης οδηγούν σε αλγοριθμικά χρήσιμες αποσυνθέσεις, ενώ οι μη-μονότονες στρατηγικές είναι πιο ανθεκτικές σε μετασχηματισμούς γραφημάτων και ως εκ τούτου αντικατοπτρίζουν δομικές ιδιότητες. Συνεπώς, δείχνοντας ότι οι μονότονες στρατηγικές δεν απαιτούν περισσότερους ανιχνευτές από τις μη-μονότονες στρατηγικές είναι μία σημαντική και συνήθης ερώτηση στην περιοχή. Ενώ τα παίγνια ανίχνευσης κορυφών σε μη-διατεταγμένα γραφήματα τείνουν να χαίρουν μονοτονίας [20, 145, 217],

στα διγράφηματα η κατάσταση είναι λιγότερο ξεκάθαρη [2, 16, 140].

10.1.2 Ανίχνευση Κορυφών σε Διγράφηματα

Τα παίγνια ανίχνευσης κορυφών επεκτείνονται στα διγράφηματα με εύλογο τρόπο. Ωστόσο, κατά την μεταφορά αναδεικνύεται μία διαφορετική παραλλαγή η οποία εξαρτάται από το πως θεωρεί κάποιος τους περιορισμούς στην κίνηση του φυγά. Μία ερμηνεία είναι ότι στην μη-διατεταγμένη περίπτωση ο φυγάς κινείται κατά μήκος μονοπατιών, άρα η εύλογη μεταφορά θα ήταν ο φυγάς να κινείται κατά μήκος διατεταγμένων μονοπατιών. Μία άλλη οπτική είναι ότι ο φυγάς μετακινείται σε κάποια άλλη κορυφή της ίδιας συνεκτικής συνιστώσας, και εδώ η εύλογη μεταφορά θα ήταν ο φυγάς να κινείται μέσα στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα¹ (strongly connected). Και οι δύο ερμηνείες έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία, όπου η πρώτη δίνει χαρακτηρισμούς παραμέτρων όπως το πλάτος ΔΑΓ [18, 176] (DAG-width) και το διατεταγμένο πλάτος μονοπατιού [16] (directed path-width), και η δεύτερη δίνει έναν χαρακτηρισμό του διατεταγμένου δέντροπλάτους [129] (directed tree-width).

Ορίζουμε μία παραλλαγή του παιγνίου της ανίχνευσης κορυφών στην οποία μόνο ο πιο πρόσφατα τοποθετημένος ανιχνευτής μπορεί να αφαιρεθεί. Δηλαδή, οι ανιχνευτές πρέπει να κινούνται με τον τελευταίος-εντός-πρώτος-εκτός (TEΠΕ (LIFO)) τρόπο και δείχνουμε ότι το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών που απαιτούνται ώστε να αιχμαλωτιστεί ένας φυγάς σε ένα (δι)γράφημα με μία TEΠΕ-ανίχνευση (LIFO-search) είναι ανεξάρτητο των:

- Εάν ο φυγάς είναι ορατός (visible) ή αόρατος (invisible),
- Εάν οι ανιχνευτές χρησιμοποιούν μονότονη ή μη-μονότονη ανίχνευση,

¹Ένα διγράφημα G είναι ισχυρά συνεκτικό εάν για κάθε δύο κορυφές $u, v \in V(G)$ περιέχει ένα μονοπάτι από την u στην v και ένα μονοπάτι από την v στην u .

και

- Εάν ο φυγάς είναι περιορισμένος να κινείται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες χωρίς ανιχνευτές ή κατά μήκους διατεταγμένων μονοπατιών χωρίς ανιχνευτές.

Αυτό το αποτέλεσμα μας εκπλήσσει κάπως: Στο τυπικό παίγνιο ανίχνευσης κορυφών αυτές οι επιλογές αντιστοιχούν σε αρκετά διαφορετικές παραμέτρους [16, 18, 140].

Δείχνουμε ότι στα διγραφήματα το παίγνιο ΤΕΠΕ-ανίχνευσης χαρακτηρίζει μία προϋπάρχουσα παράμετρο, την τάξη κύκλου (cycle rank) - μία από τις πιθανές γενικεύσεις του βάθους δέντρου σε διγραφήματα (αν και καθώς ο ορισμός της τάξης κύκλου προηγείται του βάθους δέντρου κατά αρκετές δεκαετίες, είναι μάλλον ορθότερο να πούμε ότι το βάθος δέντρου είναι μία αναλογία της τάξης κύκλου σε μη-διατεταγμένα γραφήματα).

Η τάξη κύκλου ενός διγραφήματος είναι μία σημαντική παράμετρος η οποία σχετίζει την πολυπλοκότητα των διγραφημάτων με άλλες περιοχές όπως την πολυπλοκότητα των κανονικών γλωσσών (regular language complexity) και την ασύμμετρη παραγοντοποίηση πινάκων (asymmetric matrix factorization). Ορίστηκε από τον Eggan στην [71], όπουδείχθηκε ότι είναι μία κρίσιμη παράμετρος για τον προσδιορισμό του ύψους αστεριών των κανονικών γλωσσών (star-height of regular languages). Η επιτυχία του βάθους δέντρου [72, 96, 110] αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον σε αυτή ως σημαντική παράμετρο διγραφημάτων, ιδιαίτερα από την αλγοριθμική σκοπιά.

Είναι ιδιαίτερα γνωστό ότι το βάθος δέντρου μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα παίγνιο ανίχνευσης κορυφών όπου ένας ορατός φυγάς παίζει εναντίον ανιχνευτών οι οποίοι μόνο τοποθετούνται και ποτέ δεν μετακινούνται [96]. Σε αυτή την εργασία, οι Ganian και άλλοι θεώρησαν μία επέκταση αυτού του παιγνίου σε διγραφήματα. Εδώ θεωρούμε μία ακόμα εύλογη επέκταση, όπου

ο ορατός φυγάς μετακινείται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, και δείχνουμε ότι επίσης χαρακτηρίζει την τάξη κύκλου. Από τα παραπάνω, προκύπτει επίσης ότι η παράμετρος της ΤΕΠΕ-ανίχνευσης είναι ισοδύναμη με αυτή του βάρους δέντρου.

Το τελικό μας αποτέλεσμα χρησιμοποιεί αυτούς τους χαρακτηρισμούς ανίχνευσης γραφημάτων για να ορίσει μία δυϊκή παράμετρο η οποία χαρακτηρίζει δομικές παρεμποδίσεις για την τάξη κύκλων. Θεωρούμε δύο είδη παρεμποδίσεων. Η πρώτη προκύπτει ορίζοντας την έννοια των διατεταγμένων καταφυγίων (directed shelters). Η δεύτερη παρακινείται από την έννοια του ασύλου (haven) που εμφανίζεται στην [129]. Και τα διατεταγμένα καταφύγια και τα ΤΕΠΕ-άσυλα (LIFO-havens) ορίζουν απλοποιημένες στρατηγικές για τον φυγά. Ο χαρακτηρισμός του παιγνίου τότε συνεπάγεται ότι αυτά τα δομικά χαρακτηριστικά είναι αναγκαστικά παρόντα όταν η τάξη κύκλου ενός γραφήματος είναι μεγάλη. Δείχνοντας ότι οι προαναφερθείσες απλοποιημένες στρατηγικές είναι επίσης επαρκείς για τον φυγά, προκύπτει μία σπάνια περίπτωση ενός ακριβούς μεγιστοελάχιστου θεωρήματος η οποία συσχετίζει παραμέτρους διγραφημάτων. Αυτό συνεπάγεται επίσης ότι η έννοια των καταφυγίων όταν μεταφερθεί σε απλά γραφήματα χαρακτηρίζει δομικές παρεμποδίσεις για το βάθος δέντρου.

Τα αποτελέσματα που εμφανίζονται σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να συνοψιστούν με τους ακόλουθους χαρακτηρισμούς της τάξης κύκλου και του βάρους δέντρου αντίστοιχα.

Θεώρημα 10.1. Έστω ότι το G είναι ένα δηρόφημα και ο k είναι ένας θετικός ακέραιος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το G έχει τάξη κύκλου μικρότερη ή ίση από $k - 1$.
- (ii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν φυγά με μία στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.

- (iii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν ορατό φυγά ο οποίος είναι περιορισμένος να κινείται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες με μία στρατηγική σταθμευμένων ανιχνευτών.
- (iv) Το G δεν έχει ΤΕΠΕ-άσυλο τάξης μεγαλύτερης από k .
- (v) Το G δεν έχει διατεταγμένο καταφύγιο πάχους μεγαλύτερης από k .

Θεώρημα 10.2. Έστω ότι το G είναι ένα μη-κενό γράφημα και ο k είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το G έχει βάθος δέντρου το πολύ k .
- (ii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν αόρατο και ενεργό φυγά με μία μονότονη στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.
- (iii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν αόρατο και ενεργό φυγά με μία στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.
- (iv) Κάθε καταφύγιο στο G έχει πάχος το πολύ k .
- (v) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν ορατό και ενεργό φυγά με μία μονότονη στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.

Αυτό το κεφάλαιο είναι οργανωμένο ως εξής. Στην Ενότητα 10.2, ορίζουμε τα παίγνια ΤΕΠΕ-ανίχνευσης και σταθμευμένων ανιχνευτών (searcher stationery) και δείχνουμε ότι χαρακτηρίζουν την τάξη κύκλου. Στην Ενότητα 10.3, αποδεικνύουμε το μεγιστοελάχιστο θεώρημα για την τάξη κύκλου. Στην Ενότητα 10.4, θεωρούμε απλά γραφήματα και επιχειρηματολογούμε ότι τα αποτελέσματά μας συνεπάγονται την ύπαρξη ενός μεγιστοελάχιστου θεωρήματος για την ΤΕΠΕ-ανίχνευση και ότι, σε αυτή την περίπτωση, η παράμετρος της ΤΕΠΕ-ανίχνευσης είναι ισοδύναμη με αυτή του βάθους δέντρου.

10.2 Παίγνια Ανίχνευσης για την Τάξη Κύκλου

Ορισμός 10.1 (Τάξη Κύκλου). Η τάξη κύκλου ενός διγραφήματος G , $\mathbf{cr}(G)$, ορίζεται ως εξής:

- Εάν το G είναι άκυκλο τότε $\mathbf{cr}(G) = 0$.
- Εάν το G είναι ισχυρά συνεκτικό τότε $\mathbf{cr}(G) = 1 + \min_{v \in V(G)} \mathbf{cr}(G \setminus \{v\})$.
- Διαφορετικά $\mathbf{cr}(G) = \max_H \mathbf{cr}(H)$, όπου το μέγιστο παίρνεται πάνω από όλες τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H του G .

Ξεκινάμε ορίζοντας τυπικά το παίγνιο της ΤΕΠΕ-ανίχνευσης, και τις παραλλαγές του, για τα διγραφήματα. Κάθε παραλλαγή του παιγνίου ΤΕΠΕ-ανίχνευσης αναδεικνύει μία παράμετρο διγραφημάτων η οποία αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών που απαιτούνται ώστε να αιχμαλωτιστεί ο φυγάς υπό τους δοσμένους περιορισμούς. Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ότι για οποιοδήποτε διγράφημα όλες αυτές οι παράμετροι είναι ίσες. Επιπροσθέτως, δείχνουμε ότι είναι όλες ίσες με ένα παραπάνω από την τάξη κύκλου του διγραφήματος.

10.2.1 ΤΕΠΕ-ανίχνευση για Διγραφήματα

Συνοπτικά, στο παίγνιο ανίχνευσης γραφημάτων για το οποίο ενδιαφερόμαστε, ο φυγάς μπορεί να τρέχει κατά μήκος διατεταγμένων μονοπατιών οποιουδήποτε μήκους χωρίς ανιχνευτές, οι ανιχνευτές μπορούν να μετακινηθούν σε οποιαδήποτε κορυφή του γραφήματος, και ο φυγάς κινείται ενόσω οι ανιχνευτές επανατοποθετούνται. Σε αυτό το παίγνιο, όπως στο κλασικό παίγνιο ανίχνευσης κορυφών, οι ανιχνευτές πρώτα ανακοινώνουν την κίνησή τους. Έπειτα ο φυγάς κινείται λαμβάνοντας υπόψιν του αυτή την πληροφορία και

τέλος οι ανιχνευτές εκτελούν την κίνηση που είχαν ήδη ανακοινώσει. Η στρατηγική των ανιχνευτών μπορεί να εφαρμόσει δύο είδη κινήσεων σε κάθε βήμα: Είτε τοποθέτηση ενός ανιχνευτή σε μία κορυφή, είτε αφαίρεση ενός ανιχνευτή από μία κορυφή με τον περιορισμό ότι μόνο οι πιο πρόσφατα τοποθετημένοι ανιχνευτές μπορούν να αφαιρεθούν. Εάν ένας ανιχνευτής τοποθετηθεί στον φυγά τότε αυτός/ή έχει αιχμαλωτιστεί και οι ανιχνευτές νικούν, διαφορετικά νικάει ο φυγάς. Στόχος είναι ο προσδιορισμός του ελάχιστου πλήθους ανιχνευτών που απαιτούνται ώστε να αιχμαλωτιστεί ο φυγάς. Οι παραλλαγές για τις οποίες ενδιαφερόμαστε κατά κύριο λόγο είναι εάν ο φυγάς είναι ορατός ή αόρατος, και εάν ο φυγάς πρέπει να παραμείνει μέσα στην ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ή όχι όταν κινείται. Καθώς οι θεμελιώδεις ορισμοί μας εξαρτώνται από αυτές τις δύο επιλογές, ορίζουμε τέσσερις παραλλαγές του παιχνιδιού: i, isc, v, vsc , οι οποίες αντιστοιχούν στην ορατότητα του φυγά και εάν αυτός ή αυτή είναι περιορισμένος/ή να κινείται μέσα σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες. Δηλαδή, οι i και v αντιστοιχούν σε έναν αόρατο και έναν ορατό φυγά αντίστοιχα ενώ οι isc και vsc αντιστοιχούν σε έναν αόρατο και ορατό φυγά όπως παραπάνω με την συνθήκη ότι ο φυγάς κινείται εντός της ίδιας ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας. Παραμετροποιούμε τότε τους ορισμούς μας με αυτές τις παραλλαγές.

Ας συγκεκριμενοποιήσουμε ένα διγράφημα G . Μία θέση μίας ΤΕΠΕ-ανίχνευσης στο G είναι ένα ζεύγος (X, R) όπου $X \in V(G)^*$ και το R είναι ένα (πιθανόν κενό) εναγόμενο υπογράφημα του $G \setminus \{X\}$, όπου το $\{X\}$ είναι το σύνολο των κορυφών στο X . Διαισθητικά, το X αναπαριστά την θέση και την διατεταγμένη τοποθέτηση των κορυφών και το R αναπαριστά το μέρος του G το οποίο μπορεί να φθάσει ο φυγάς (στην ορατή περίπτωση) ή το σύνολο των κορυφών στο οποίο αυτός ή αυτή μπορεί να είναι τοποθετημένος/ή (στην αόρατη περίπτωση). Λέμε ότι μία θέση (X, R) είναι

- μία i -θέση εάν δεν υπάρχουν ακμές στο G από το R στο $G \setminus R$,

- μία **isc**-θέση εάν είναι ένωση ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του $G \setminus \{X\}$,
- μία **v**-θέση εάν δεν υπάρχουν ακμές από το R στο $G \setminus R$ στο G και το $G[R]$ έχει μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα C χωρίς ακμές από το $G \setminus C$ στο C , και
- μία **vsc**-θέση εάν το R είναι μία ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus \{X\}$.

Για να αντικατοπτρίσουμε τις μεταβάσεις του παιγνίου σε μία θέση κατά την διάρκεια ενός γύρου του παιγνίου λέμε ότι, για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{isc}, \mathbf{v}, \mathbf{vsc}\}$, μία **gv**-θέση (X', R') είναι ένας **gv**-διάδοχος της (X, R) εάν είτε $X \preceq X'$ είτε $X' \preceq X$, με $|\{X\} \Delta \{X'\}| = 1$, και

- (για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{v}\}$) Για κάθε $v' \in V(R')$ υπάρχουν μία $v \in V(R)$ και ένα διατεταγμένο μονοπάτι στο $G \setminus (\{X\} \cap \{X'\})$ από την v στην v' , ή
- (για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{isc}, \mathbf{vsc}\}$) Για κάθε $v' \in V(R')$ υπάρχει μία $v \in V(R)$ τέτοια ώστε οι v και v' περιέχονται στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus (\{X\} \cap \{X'\})$.

Ιδανικά, θα θέλαμε να υποθέσουμε ότι τα παίγνια ξεκινάνε από την (ϵ, G) . Ωστόσο, στις ορατές παραλλαγές του παιγνίου, αυτή ίσως να μην είναι μία θεμιτή θέση. Άρα, για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{v}, \mathbf{vsc}\}$, εάν η (ϵ, G) δεν είναι μία **gv**-θέση την συμπεριλαμβάνουμε σαν ειδική περίπτωση, και θέτουμε ως **gv**-διαδόχους της όλες τις **gv**-θέσεις της μορφής (ϵ, R) . Παρατηρούμε ότι σε όλες τις παραλλαγές, η σχέση της διαδόχου είναι μονότονη με την έννοια ότι εάν οι (X, R) και (X, S) είναι θέσεις με $S \subseteq R$ και η (X', S') είναι διάδοχος της (X, S) , τότε υπάρχει μία διάδοχος (X', R') της (X, R) με $S' \subseteq R'$.

Για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{isc}, \mathbf{v}, \mathbf{vsc}\}$, μία **(gv-TEΠΕ)**-ανίχνευση σε ένα διγράφημα G από την **gv**-θέση (X, R) είναι μία (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολου-

θία **gv**-θέσεων $(X, R) = (X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots$ όπου για όλα τα $i \geq 0$, η (X_{i+1}, R_{i+1}) είναι μία **gv**-διάδοχος της (X_i, R_i) . Μία ΤΕΠΕ-ανίχνευση είναι πλήρης εάν είτε $R_n = \emptyset$ για κάποιο n , είτε είναι άπειρη. Παρατηρούμε ότι εάν $R_n = \emptyset$, τότε $R_{n'} = \emptyset$ για όλα τα $n' \geq n$.

Λέμε ότι μία πλήρης ΤΕΠΕ-ανίχνευση είναι επιτυχής για τους ανιχνευτές εάν $R_n = \emptyset$ για κάποιο n , διαφορετικά είναι επιτυχής για τον φυγά. Μία πλήρης ΤΕΠΕ-ανίχνευσης από την (ϵ, G)

- είναι *μονότονη* εάν $R_{i+1} \subseteq R_i$ για όλα τα i , δηλαδή, ο φυγάς δεν καταλαμβάνει θέσεις του γραφήματος από τις οποίες αυτός ή αυτή έχει ήδη αποκλειστεί,
- είναι *σταθμευμένων ανιχνευτών* εάν $X_i \preceq X_{i+1}$ για όλα τα i όπου $R_i \neq \emptyset$, και
- *χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές* εάν $|X_i| \leq k$ για όλα τα i .

Ενώ μία πλήρης ΤΕΠΕ-ανίχνευση από την (ϵ, G) περιγράφει μία μοναδική εκτέλεση του παιγνίου, ενδιαφερόμαστε για τις περιπτώσεις όπου ένας από τους παίκτες (συγκεκριμένα οι ανιχνευτές) μπορούν πάντα να εξαναγκάσουν μία νίκη, χωρίς να έχει σημασία τι επιλέγει ο άλλος παίκτης να κάνει. Για αυτό, εισάγουμε την έννοια της στρατηγικής. Για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{isc}, \mathbf{v}, \mathbf{vsc}\}$, μία **gv**-στρατηγική (ανιχνευτών) είναι μία (μερική²) συνάρτηση σ από το σύνολο όλων των **gv**-θέσεων στο $V(G)^*$ για όλες τις (X, R) , όπου το $\sigma(X, R)$ είναι η πρώτη συνιστώσα μιας **gv**-διαδόχου της (X, R) . Άρα, με την πιθανή εξαίρεση όπου $(X, R) = (\epsilon, G)$, είτε $\sigma(X, R) \preceq X$ είτε $X \preceq \sigma(X, R)$. Μία **gv**-ΤΕΠΕ-ανίχνευση $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots$ είναι *συνεπής* με μία **gv**-στρατηγική σ εάν

²Μία στρατηγική χρειάζεται να οριστεί μόνο για όλες τις θέσεις (X, R) που είναι προσιτές από την (ϵ, G) σε μία ΤΕΠΕ-ανίχνευση συνεπή με την στρατηγική. Ωστόσο, καθώς αυτός ο ορισμός είναι κάπως κυκλικός, υποθέτουμε ότι οι στρατηγικές είναι ολικές.

$X_{i+1} = \sigma(X_i, R_i)$, για όλα τα $i \geq 0$. Μία στρατηγική σ είναι επιτυχής από την (X, R) εάν όλες οι πλήρεις TEΠΕ-ανιχνεύσεις από την (X, R) που είναι συνεπείς με την σ είναι επιτυχείς για τους ανιχνευτές. Παρόμοια, μία στρατηγική είναι μονότονη (σταθμευμένων ανιχνευτών, χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές) εάν όλες οι συνεπείς και πλήρεις TEΠΕ-ανιχνεύσεις από την (ϵ, G) είναι μονότονες (σταθμευμένων ανιχνευτών, χρησιμοποιούν το πολύ k ανιχνευτές αντίστοιχα). Λέμε ότι k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν φυγά στο G στο $\mathbf{gv}$ -παίγνιο με μία (μονότονη) στρατηγική TEΠΕ-ανίχνευσης εάν υπάρχει μία (μονότονη) $\mathbf{gv}$ -στρατηγική που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές και είναι επιτυχής για τους ανιχνευτές από την (ϵ, G) .

Για $\mathbf{gv} \in \{\mathbf{i}, \mathbf{isc}, \mathbf{v}, \mathbf{vsc}\}$, ορίζουμε τον αριθμό (μονότονης) $\mathbf{gv}$ -TEΠΕ-ανίχνευσης του G , $\text{TEΠΕ}^{\mathbf{gv}}(G)$ ($\text{TEΠΕ}^{\mathbf{mv}}(G)$), ως το ελάχιστο k για το οποίο υπάρχει μία (μονότονη) επιτυχής $\mathbf{gv}$ -στρατηγική η οποία χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές. Ορίζουμε επίσης τον αριθμό ορατής, ισχυρά συνεκτικής, σταθμευμένων ανιχνευτών ανίχνευσης του G , $\Sigma\mathbf{A}^{\mathbf{vsc}}(G)$, ως το ελάχιστο k για το οποίο υπάρχει μία σταθμευμένων ανιχνευτών επιτυχής $\mathbf{vsc}$ -στρατηγική η οποία χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές.

Στην Ενότητα 10.3, θεωρούμε επίσης $\mathbf{gv}$ -στρατηγικές του φυγά: Μία μερική συνάρτηση ρ από το $V(G)^* \times \mathcal{P}(G) \times V(G)^*$ σε εναγόμενα υπογράφημα του G , ορισμένη για (X, R, X') εάν η (X, R) είναι μία $\mathbf{gv}$ -θέση και X' είναι η πρώτη συνιστώσα μίας $\mathbf{gv}$ -διαδόχου της (X, R) . Μία TEΠΕ-ανίχνευση $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots$ είναι συνεπής με μία $\mathbf{gv}$ -στρατηγική φυγά ρ εάν $R_{i+1} = \rho(X_i, R_i, X_{i+1})$ για όλα τα $i \geq 0$, και μία στρατηγική φυγά είναι επιτυχής εάν όλες οι συνεπείς και πλήρεις TEΠΕ-ανιχνεύσεις είναι επιτυχείς για τον φυγά. Σε αυτή την ενότητα, μία στρατηγική θα αναφέρεται πάντα σε μία στρατηγική ανιχνευτών.

10.2.2 Συσχετίζοντας τις Παραμέτρους Ανίχνευσης Διγραφημάτων

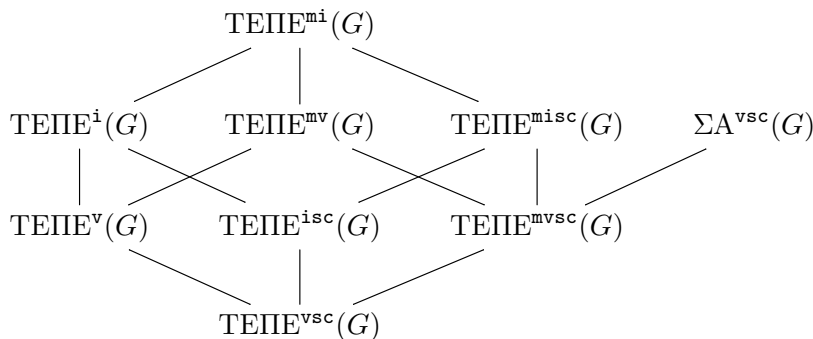
Παρατηρούμε ότι σε όλες τις παραλλαγές του παιγνίου, μία στρατηγική η οποία είναι επιτυχής από την (X, R) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί μία στρατηγική η οποία είναι επιτυχής από την (X, R') για οποιοδήποτε $R' \subseteq R$: Οι ανιχνευτές μπορούν να παίξουν σαν ο φυγάς να είναι τοποθετημένος στον μεγαλύτερο χώρο και από την μονοτονία της σχέσης διαδόχου, η υπόθεση ότι το πραγματικό σύνολο τοποθεσιών του φυγά είναι υποσύνολο του θεωρημένου συνόλου τοποθεσιών παραμένει αναλλοίωτη. Μία συνέπεια είναι ότι μία επιτυχής στρατηγική στο G ορίζει μία επιτυχή στρατηγική σε οποιοδήποτε υπογράφημα του G , έτσι οι αριθμοί ανίχνευσης που έχουμε ορίσει είναι κλειστοί ως προς την σχέση υπογραφήματος.

Πρόταση 10.1. Έστω ότι το G είναι ένα διγράφημα και το G' είναι ένα υπογράφημα του G . Τότε:

- $\Sigma A^{\text{vsc}}(G') \leq \Sigma A^{\text{vsc}}(G)$, και
- $TEΠΕ^{\text{gv}}(G') \leq TEΠΕ^{\text{gv}}(G)$ για

$$\text{gv} \in \{\text{i}, \text{isc}, \text{v}, \text{vsc}, \text{mi}, \text{misc}, \text{mv}, \text{mvsc}\}.$$

Μία άλλη συνέπεια είναι ότι μία επιτυχής στρατηγική για την παραλλαγή του αόρατου φυγά ορίζει μία επιτυχή στρατηγική όταν ο φυγάς είναι ορατός, και μία επιτυχής στρατηγική όταν ο φυγάς δεν είναι περιορισμένος να κινείται μέσα σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες ορίζει μία επιτυχή στρατηγική όταν είναι. Αυτό αντιστοιχεί στην διαίσθηση μας ότι ο φυγάς είναι περισσότερο (ή λιγότερο) περιορισμένος. Επίσης, σε όλες τις παραλλαγές του παιγνίου, μία μονότονη επιτυχής στρατηγική είναι εμφανώς μία επιτυχής στρατηγική, και επειδή μία $TEΠΕ$ -ανίχνευση σταθμευμένων ανιχνευτών είναι μονότονη, μία επιτυχής στρατηγική σταθμευμένων ανιχνευτών είναι μία



Σχήμα 10.1: Τετριμμένες σχέσεις ανάμεσα στις παραμέτρους ανίχνευσης δι-γραφημάτων.

μονότονη επιτυχής στρατηγική. Από αυτές τις παρατηρήσεις προσέχουμε αρκετές ανισότητες ανάμεσα στους αριθμούς ανίχνευσης που ορίστηκαν παραπάνω. Για παράδειγμα, $TEPE^{vsc}(G) \leq TEPE^{mi}(G)$ καθώς οποιαδήποτε μονότονη επιτυχής i -στρατηγική είναι επίσης επιτυχής vsc -στρατηγική. Το πλήρες σύνολο αυτών των σχέσεων απεικονίζεται στο διάγραμμα Hasse της Εικόνας 10.1, όπου τα μεγαλύτερα μέτρα βρίσκονται προς την κορυφή.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ότι όλες αυτές οι παράμετροι διγραφημάτων είναι ίσες με ένα παραπάνω από την τάξη κύκλου.

Θεώρημα 10.3. Για οποιοδήποτε δηράφημα G :

$$\begin{aligned}
 1 + \mathbf{cr}(G) &= TEPE^{mi}(G) = TEPE^i(G) = TEPE^{misc}(G) = TEPE^{isc}(G) \\
 &= TEPE^{mv}(G) = TEPE^v(G) = TEPE^{mvsc}(G) = TEPE^{vsc}(G) \\
 &= \Sigma A^{vsc}(G).
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, για να αποδείξουμε το Θεώρημα 10.3 είναι επαρκές να αποδείξουμε τις ακόλουθες τρεις ανισότητες:

$$(1) \quad TEPE^{vsc}(G) \geq \Sigma A^{vsc}(G),$$

$$(2) \quad \Sigma A^{\text{vsc}}(G) \geq 1 + \mathbf{cr}(G), \text{ και}$$

$$(3) \quad 1 + \mathbf{cr}(G) \geq \text{TEΠE}^{\text{mi}}(G).$$

□

Αυτές αποδεικνύονται με την ακόλουθη σειρά από λήμματα.

Λήμμα 10.1. Για οποιοδήποτε δηγράφημα G , $\text{TEΠE}^{\text{vsc}}(G) \geq \Sigma A^{\text{vsc}}(G)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι εάν μία vsc -στρατηγική δεν είναι σταθμευμένων ανιχνευτών τότε δεν είναι επιτυχής στρατηγική από την (ϵ, G) . Το αποτέλεσμα τότε έπεται καθώς αυτό συνεπάγεται ότι κάθε επιτυχής vsc -στρατηγική είναι σταθμευμένων ανιχνευτών. Έστω ότι η σ είναι μία vsc -στρατηγική, και ας υποθέσουμε ότι η $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots$ είναι μία πλήρης vsc -TEΠE-ανίχνευση από την $(X_0, R_0) = (\epsilon, G)$, συνεπής με την σ , η οποία δεν είναι σταθμευμένων ανιχνευτών. Έστω ότι ο j είναι ο ελάχιστος τέτοιος δείκτης τέτοιος ώστε $X_j \succeq X_{j+1}$ και $R_j \neq \emptyset$. Καθώς $X_0 = \epsilon$, υπάρχει $i < j$ τέτοιο ώστε $X_i = X_{j+1}$. Από την ελαχιστικότητα του j , και καθώς τοποθετούμε ή αφαιρούμε μόνο έναν ανιχνευτή σε κάθε γύρο, ισχύει ότι $i = j - 1$. Αφού $X_{j-1} \preceq X_j$ τότε $R_j \subseteq R_{j-1}$, και αφού $X_{j+1} \preceq X_j$ τότε $R_j \subseteq R_{j+1}$. Καθώς $R_j \neq \emptyset$, έπεται ότι οι R_{j-1} και R_{j+1} είναι η ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus \{X_{j-1}\}$. Άρα η (X_{j-1}, R_{j-1}) είναι μία vsc -διάδοχος της (X_j, R_j) . Καθώς $\sigma(X_j, R_j) = X_{j+1} = X_{j-1}$, έπεται ότι η $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots, (X_{j-1}, R_{j-1}), (X_j, R_j), (X_{j-1}, R_{j-1}), (X_j, R_j), \dots$ είναι μία άπειρη, και ως εκ τούτου, πλήρης, vsc -TEΠE-ανίχνευση (από την (ϵ, G)) συνεπής με την σ . Καθώς $R_i \neq \emptyset$, για όλα τα $i \geq 0$, η TEΠE-ανίχνευση δεν είναι επιτυχής για τους ανιχνευτές. Άρα η σ δεν είναι επιτυχής στρατηγική. □

Λήμμα 10.2. Για οποιοδήποτε δηγράφημα G , $\Sigma A^{\text{vsc}}(G) \geq 1 + \mathbf{cr}(G)$.

Απόδειξη. Το αποδεικνύουμε αυτό με επαγωγή στο $|V(G)|$. Εάν $|V(G)| = 1$, τότε $\Sigma A^{\text{vsc}}(G) = 1 = 1 + \mathbf{cr}(G)$.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $\Sigma A^{\text{vsc}}(G') \geq 1 + \mathbf{cr}(G')$ για όλα τα διγραφήματα G' με $|V(G')| < |V(G)|$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Από την Πρόταση 10.1, $\Sigma A^{\text{vsc}}(G) \geq \max_H \Sigma A^{\text{vsc}}(H)$, όπου το μέγιστο παίρνεται πάνω από όλες τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H του G . Καθώς το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, $|V(H)| < |V(G)|$ για όλες τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες H του G . Συνεπώς, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\begin{aligned} \Sigma A^{\text{vsc}}(G) &\geq \max_H \Sigma A^{\text{vsc}}(H) \\ &\geq \max_H (1 + \mathbf{cr}(H)) \\ &= 1 + \mathbf{cr}(G). \end{aligned}$$

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι το G είναι ισχυρά συνεκτικό. Έστω ότι η σ είναι μία επιτυχής vsc-στρατηγική σταθμευμένων ανιχνευτών η οποία χρησιμοποιεί $\Sigma A^{\text{vsc}}(G)$ ανιχνευτές. Καθώς η (ϵ, G) είναι μία νόμιμη vsc-θέση, εάν η (X, R) είναι μία vsc-διάδοχος της (ϵ, G) , τότε $|X| = 1$. Άρα $|\sigma(\epsilon, G)| = 1$. Έστω ότι $\sigma(\epsilon, G) = v_0$. Καθώς η σ είναι μία στρατηγική σταθμευμένων ανιχνευτών η οποία χρησιμοποιεί το ελάχιστο πλήθος ανιχνευτών, έπεται ότι $\Sigma A^{\text{vsc}}(G \setminus \{v_0\}) = \Sigma A^{\text{vsc}}(G) - 1$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση,

$$\begin{aligned} \Sigma A^{\text{vsc}}(G) &= \Sigma A^{\text{vsc}}(G \setminus \{v_0\}) + 1 \\ &\geq (1 + \mathbf{cr}(G \setminus \{v_0\})) + 1 \\ &\geq (1 + \min_{v \in V(G)} \mathbf{cr}(G \setminus \{v\})) + 1 \\ &= 1 + \mathbf{cr}(G). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 10.3. Για οποιοδήποτε διγράφημα G , $1 + \mathbf{cr}(G) \geq \text{TEΠΕ}^{\text{mi}}(G)$.

Απόδειξη. Το αποδεικνύουμε επίσης με επαγωγή στο $|V(G)|$. Εάν $|V(G)| = 1$, τότε $1 + \mathbf{cr}(G) = 1 = \text{TEΠΕ}^{\text{mi}}(G)$.

Τώρα υποθέτουμε ότι $1 + \mathbf{cr}(G') \geq \text{TEΠΕ}^{\text{mi}}(G')$ για όλα τα διγράφημα-τα G' με $|V(G')| < |V(G)|$. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση όπου το G δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αφού $|V(H)| < |V(G)|$, για κάθε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H , από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μία μονότονη i -στρατηγική, σ_H , η οποία αιχμαλωτίζει έναν φυγά χρησιμοποιώντας το πολύ $1 + \mathbf{cr}(H)$ ανιχνευτές. Από τον ορισμό της τάξης κύκλου, για κάθε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα H του G , $\mathbf{cr}(G) \geq \mathbf{cr}(H)$, άρα η σ_H χρησιμοποιεί το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές. Ορίζουμε μία μονότονη i -στρατηγική η οποία αιχμαλωτίζει έναν φυγά στο G με το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές όπως ακολούθως. Διαισθητικά, ανιχνεύουμε τις ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G με την τοπολογική διάταξη χρησιμοποιώντας τις μονότονες στρατηγικές σ_H . Ακριβέστερα, έστω ότι η $H_1, H_2, \dots, H_n$ είναι μία διάταξη των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών του G τέτοια ώστε εάν υπάρχει μία ακμή από την H_i στην H_j τότε $i < j$. Ορίζουμε την σ ως εξής.

- $\sigma(\epsilon, G) = \sigma_{H_1}(\epsilon, H_1)$,
- Για $1 \leq i$, εάν $\{X\} \subseteq H_i$ και $R = R' \cup \bigcup_{j=i+1}^n H_j$ όπου $\emptyset \neq R' \subseteq H_i$, $\sigma(X, R) = \sigma_{H_i}(X, R')$,
- Για $1 \leq i < n$, εάν $\emptyset \neq \{X\} \subseteq H_i$ και $R = \bigcup_{j=i+1}^n H_j$ τότε $\sigma(X, R) = X'$, όπου X' είναι το μέγιστο γνήσιο πρόθεμα του X .

Από τον ορισμό των i -διαδόχων και την διάταξη των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών, εάν η $(X_0, R_0), \dots, (X_n, R_n)$ είναι μία i -TEΠΕ-ανίχνευση στο G , όπου $\{X_n\} \subseteq H_i$ και $\bigcup_{j>i} H_j \subseteq R_{n-1} \subseteq \bigcup_{j\geq i} H_j$, τότε $\bigcup_{j>i} H_j \subseteq R_n \subseteq \bigcup_{j\geq i} H_j$. Έπεται (με επαγωγή στο μήκος μίας TEΠΕ-ανίχνευσης) ότι

κάθε ΤΕΠΕ-ανίχνευση από την (ϵ, G) , η οποία είναι συνεπής με την σ , μπορεί να διαιρεθεί σε μία ακολουθία ΤΕΠΕ-ανιχνεύσεων $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, όπου η λ_i μπορεί να ιδωθεί σαν μία ΤΕΠΕ-ανίχνευση συνεπή με την σ_{H_i} με το $\bigcup_{j>i} H_j$ προστετημένο στη δεύτερη συνιστώσα κάθε θέσης. Άρα, εάν κάθε σ_{H_i} είναι μονότονη, επιτυχής, και χρησιμοποιεί το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές, τότε η σ είναι επίσης μονότονη, επιτυχής και χρησιμοποιεί το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι, το G είναι ισχυρά συνεκτικό. Έστω ότι η v_0 είναι η κορυφή που ελαχιστοποιεί την $f(v) = \mathbf{cr}(G \setminus \{v\})$. Έστω το $G' = G \setminus \{v_0\}$, έτσι ώστε $\mathbf{cr}(G) = 1 + \mathbf{cr}(G')$. Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μία επιτυχής μονότονη i -στρατηγική σ' η οποία χρησιμοποιεί το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G')$ ανιχνευτές για να αιχμαλωτίσει έναν φυγά στο G' . Ορίζουμε μία i -στρατηγική σ στο G η οποία χρησιμοποιεί το πολύ $2 + \mathbf{cr}(G') = 1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές ως εξής. Αρχικά, τοποθετούμε (και διατηρούμε) έναν ανιχνευτή στην v_0 . Τότε, παίζουμε την στρατηγική σ' στο $G \setminus \{v_0\}$. Ακριβέστερα, $\sigma(\epsilon, G) = v_0$ και $\sigma(v_0 X, R) = v_0 \cdot \sigma'(X, R)$. Εμφανώς, οποιαδήποτε ΤΕΠΕ-ανίχνευση η οποία είναι συνεπής με την σ , μπορεί να ιδωθεί σαν μία ΤΕΠΕ-ανίχνευση συνεπή με την σ' θέτοντας μπροστά την θέση (ϵ, G) και όπου στην πρώτη συνιστώσα κάθε θέσης έχουμε τοποθετήσει μπροστά την v_0 . Άρα εάν η σ' είναι μονότονη, τότε η σ είναι μονότονη, και εάν η σ' είναι επιτυχής τότε η σ είναι επιτυχής. Άρα η σ είναι μία μονότονη επιτυχής i -στρατηγική που χρησιμοποιεί το πολύ $1 + \mathbf{cr}(G)$ ανιχνευτές. $\square$

10.2.3 Σχέση με Άλλες Παραμέτρους Γραφημάτων

Με τον χαρακτηρισμό της τάξης κύκλου σε όρους αρκετών παιγνίων ανίχνευσης γραφημάτων μπορούμε να την συγκρίνουμε με άλλα μέτρα διγραφημάτων τα οποία ορίζονται από παρόμοια παίγνια. Για την ακρίβεια, το διατεταγμένο πλάτος μονοπατιού ενός διγραφήματος, $\mathbf{dpw}(G)$, το οποίο μπορεί να χαρα-

κτηριστεί από ένα παίγνιο ανίχνευσης γραφημάτων άορατου φυγά [16], και το βάθος ΔΑΓ (DAG-depth), $\mathbf{dd}(G)$, το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα παίγνιο ανίχνευσης ορατού φυγά και σταθμευμένων ανιχνευτών [96]. Ενώ οι σχέσεις που παρουσιάζουμε εδώ είναι γνωστές [96, 110], χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς παιγνίων προκύπτει μία απλούστερη και πιο διαισθητική απόδειξη.

Πόρισμα 10.1. Για οποιοδήποτε διγράφημα G ,

$$\mathbf{dpw}(G) \leq \mathbf{cr}(G) \leq \mathbf{dd}(G) - 1.$$

10.3 Παρεμποδίσεις για την Τάξη Κύκλου

Σε αυτή την ενότητα, θεωρούμε την δυϊκή παράμετρο η οποία αναδεικνύεται θεωρώντας τα παίγνια ανίχνευσης γραφημάτων από την οπτική γωνία του φυγά. Δείχνουμε ότι μπορεί να χαρακτηριστεί από δύο είδη δομικών χαρακτηριστικών, συγγενή των ασύλων και των βάτων (brambles) τα οποία χρησιμοποιούνται για να χαρακτηρίσουν δυϊκά το δεντροπλάτος [217]. Για να το κάνουμε αυτό ορίζουμε πρώτα την έννοια του διατεταγμένου καταφυγίου ενός διγράφηματος, μία δομική παρεμπόδιση που δείχνουμε ότι είναι δυϊκή της τάξης κύκλου.

Ορισμός 10.2. Ένα διατεταγμένο καταφύγιο ενός διγράφηματος G είναι μία συλλογή $\mathcal{S}$ συνόλων κορυφών μη-κενών ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών τέτοιων ώστε για οποιοδήποτε μη-ελαχιστικό $S \in \mathcal{S}$

$$\bigcap \{S' : S' \in M_{\mathcal{S}}(S)\} = \emptyset,$$

όπου $M_{\mathcal{S}}(S)$ είναι τα $\subseteq$ -μεγιστικά στοιχεία της $\{S' \in \mathcal{S} : S' \subset S\}$. Το πάχος (thickness) ενός καταφυγίου $\mathcal{S}$ είναι το ελαχιστικό μήκος μίας μεγιστικής $\subseteq$ -αλυσίδας.

Η δεύτερη δομική παρεμπόδιση που θεωρούμε παρακινείται από τον ορισμό του ασύλου της [129], ένα δομικό χαρακτηριστικό δυϊκό του διατεταγμένου δεντροπλάτους.

Ορισμός 10.3. Ένα *TEΠΕ-άσυλο* τάξης k ενός διγραφήματος G είναι μία συνάρτηση h από το $V(G)^{<k}$ στα εναγόμενα υπογραφήματα του G τέτοια ώστε:

(H1) Η $h(X)$ είναι μία μη-κενή ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus \{X\}$,
και

(H2) Εάν $X \preceq Y$ και $|Y| < k$ τότε $h(Y) \subseteq h(X)$.

Ενώ η Adler [2] έχει δείξει ότι τα άσυλα της [129] δεν δίνουν ακριβή μεγιστοελάχιστο χαρακτηρισμό του διατεταγμένου δεντροπλάτους και ο Safari [214] έχει δείξει ότι οι διατεταγμένες εκδόσεις των ασύλων και των βάτων αναδεικνύουν διαφορετικές παραμέτρους, εμείς δείχνουμε ότι τα *TEΠΕ-άσυλα* και τα διατεταγμένα καταφύγια δίνουν και τα δύο έναν σφικτό μεγιστοελάχιστο χαρακτηρισμό της τάξης κύκλου.

Θεώρημα 10.4 (Μεγιστοελάχιστο Θεώρημα για την Τάξη Κύκλου). Έστω ότι το G είναι ένα δηράφημα και ο k είναι ένας θετικός ακέραιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το G έχει τάξη κύκλου μικρότερη από k .
- (ii) Το G δεν έχει *TEΠΕ-άσυλο* τάξης μεγαλύτερης από k .
- (iii) Το G δεν έχει διατεταγμένο καταφύγιο πάχους μεγαλύτερου από k .

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η περίπτωση ότι το G δεν έχει *TEΠΕ-άσυλο* τάξης μεγαλύτερης από k , δηλαδή, το G έχει ένα *TEΠΕ-άσυλο* h τάξης τουλάχιστον $k + 1$. Δείχνουμε ότι ο φυγάς έχει

μία επιτυχή στρατηγική εναντίον k ανιχνευτών, έτσι από το Θεώρημα 10.3, $\mathbf{cr}(G) \geq k$. Ορίζουμε μία $\mathbf{vsc}$ -στρατηγική ρ για τον φυγά (εναντίον k ανιχνευτών) ορίζοντας $\rho(X, R, X') = h(X')$ για όλες τις κατάλληλες τριάδες (X, R, X') . Από την (H1), η $(X', \rho(X, R, X'))$ είναι μία έγκυρη $\mathbf{vsc}$ -θέση. Επιπροσθέτως, η (H2) συνεπάγεται ότι, εάν η (X, R) είναι μία $\mathbf{vsc}$ -θέση τέτοια ώστε $R = h(X)$, τότε η $(X', \rho(X, R, X'))$ είναι μία $\mathbf{vsc}$ -διάδοχος της (X, R) τέτοια ώστε η ρ είναι μία $\mathbf{vsc}$ -στρατηγική (ορισμένη για όλες τις ΤΕΠΕ-ανιχνεύσεις που χρησιμοποιούν το πολύ k ανιχνευτές). Επίσης, εάν η $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \dots$ είναι μία πλήρης ΤΕΠΕ-ανίχνευση συνεπής με την ρ , τότε $R_i = h(X_i)$, για όλα τα $i > 0$. Καθώς $h(X) \neq \emptyset$ όταν $|X| \leq k$, έπεται ότι όλες οι συνεπείς και πλήρεις ΤΕΠΕ-ανιχνεύσεις οι οποίες χρησιμοποιούν το πολύ k ανιχνευτές, είναι επιτυχείς για τον φυγά. Άρα η ρ είναι μία επιτυχής στρατηγική για τον φυγά, έτσι $\mathbf{TEPE}^{\mathbf{vsc}}(G) > k$. Από το Θεώρημα 10.3, $\mathbf{cr}(G) \geq k$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Δείχνουμε ότι ένα διατεταγμένο καταφύγιο $\mathcal{S}$ πάχους τουλάχιστον k μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει ένα άσυλο τάξης τουλάχιστον k . Για κάθε $X \in V(G)^{<k}$ ορίζουμε το $S_X \in \mathcal{S}$ αναδρομικά ως εξής. Για $X = \epsilon$, έστω ότι το S_ϵ είναι οποιοδήποτε $\subseteq$ -μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{S}$. Ας σημειώσουμε ότι το $\{S \in \mathcal{S} \mid S \subset S_\epsilon\}$ είναι ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους τουλάχιστον $k - 1$. Τώρα, υποθέτουμε ότι $X = X'v$, ότι το $S_{X'}$ είναι ορισμένο, ότι $S_{X'} \cap \{X'\} = \emptyset$, και ότι το $\mathcal{S}_{X'} = \{S \in \mathcal{S} \mid S \subset S_{X'}\}$ είναι ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους τουλάχιστον $k - 1 - |X'|$. Από τον ορισμό ενός διατεταγμένου καταφυγίου, υπάρχει ένα $\subseteq$ -μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{S}_{X'}$ το οποίο δεν περιέχει την v , αφού διαφορετικά $v \in S$ για όλα τα $S \in M_{\mathcal{S}}(S_{X'})$. Έστω ότι το S_X είναι αυτό το στοιχείο. Καθώς $S_{X'} \cap \{X'\} = \emptyset$ και $v \notin S_X$, έπεται ότι $S_X \cap \{X\} = \emptyset$. Επιπλέον, το $\{S \in \mathcal{S} \mid S \subset S_X\}$ είναι ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους τουλάχιστον $(k - 1 - |X'|) - 1 = k - 1 - |X|$, που ικανοποιεί τις αναγκαίες υποθέσεις για το

επόμενο βήμα της επαγωγής. Τώρα, για όλα τα $X \in V(G)^{<k}$, το S_X είναι το σύνολο κορυφών μιας μη-κενής ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας τέτοιο ώστε $S_X \cap \{X\} = \emptyset$. Άρα, υπάρχει μία μοναδική ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του $G \setminus \{X\}$ που περιέχει το S_X . Ορίζοντας το $h(X)$ να είναι αυτή η συνιστώσα βλέπουμε ότι το h ικανοποιεί την (H1). Για την (H2), από τον ορισμό του S_X , εάν $X \preceq Y$ και $|Y| < k$, τότε $S_X \supseteq S_Y$, έτσι $h(X) \supseteq h(Y)$. Συνεπώς το h είναι ένα άσυλο τάξης τουλάχιστον k .

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ξανά, αποδεικνύουμε την αντιθετοαναστροφή. Ας υποθέσουμε ότι $\text{cr}(G) \geq k$. Έστω ότι το G' είναι η ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G η οποία έχει τάξη κύκλου τουλάχιστον k . Αποδεικνύουμε με επαγωγή στο k ότι το G' , και ως εκ τούτου το G , έχει ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους τουλάχιστον $k + 1$. Κάθε διγράφημα με $|V(G)| \geq 1$ έχει ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους 1: Παίρνουμε $\mathcal{S} = \{\{v\}\}$ για κάποια $v \in V(G)$. Άρα για $k = 0$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε τώρα ότι, για $k' < k$, κάθε διγράφημα τάξης κύκλου τουλάχιστον k' περιέχει ένα διατεταγμένο καταφύγιο πάχους τουλάχιστον $k' + 1$. Για $v \in V(G')$, έστω το $G'_v = G' \setminus \{v\}$. Από τον ορισμό της τάξης κύκλου, $\text{cr}(G'_v) \geq k - 1$ για όλες τις $v \in V(G')$. Άρα, από την επαγωγική υπόθεση, το G'_v περιέχει ένα διατεταγμένο καταφύγιο, $\mathcal{S}_v$, πάχους τουλάχιστον $(k - 1) + 1$. Καθώς $v \notin \mathcal{S}$ για όλα τα $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_v$, έπεται ότι το $\mathcal{S} = \{G'\} \cup \bigcup_{v \in V(G')} \mathcal{S}_v$ είναι ένα διατεταγμένο καταφύγιο του G . Καθώς το $\mathcal{S}_v$ έχει πάχος τουλάχιστον k για όλες τις $v \in V(G')$, το $\mathcal{S}$ έχει πάχος τουλάχιστον $k + 1$. $\square$

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 10.3 και 10.4 προκύπτει το ακόλουθο.

Θεώρημα 10.5. Έστω ότι το G είναι ένα διγράφημα και ο k ένας θετικός ακέραιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το G έχει τάξη κύκλου το πολύ $k - 1$.

- (ii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν φυγά με μία στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.
- (iii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν ορατό φυγά περιορισμένο να κινείται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες με μία στρατηγική ανίχνευσης σταθμευμένων ανιχνευτών.
- (iv) Το G δεν έχει ΤΕΠΕ-άσυλο τάξης μεγαλύτερης από k .
- (v) Το G δεν έχει διατεταγμένο καταφύγιο πάχους μεγαλύτερου του k .

10.4 Η ΤΕΠΕ-ανίχνευση σε Απλά Γραφήματα

Σε αυτή την ενότητα, μελετάμε τις συνέπειες των αποτελεσμάτων μας στα απλά γραφήματα. Δοσμένου ενός γραφήματος G , ορίζουμε το διγράφημα G_d όπου $V(G_d) = V(G)$ και $E(G_d) = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in E(G)\}$. Δηλαδή, το G_d προκύπτει από το G μετά την αντικατάσταση κάθε ακμής $\{x, y\} \in E(G)$ με τις διατεταγμένες ακμές (x, y) και (y, x) . Από τους Ορισμούς 10.1 και 4.1 παίρνουμε ότι.

Παρατήρηση 10.1. Για κάθε γράφημα G , $\text{td}(G) = \text{cr}(G_d) + 1$.

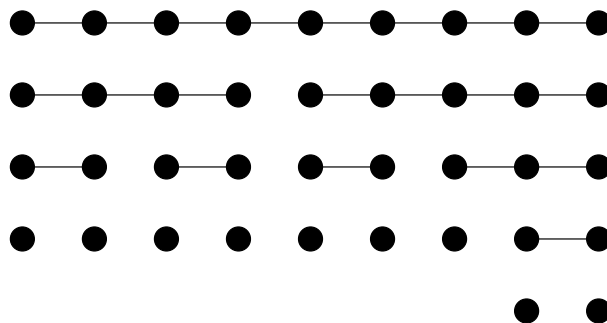
Δίνουμε τώρα τον ορισμό των καταφυγίων όταν τα περιορίσουμε σε απλά γραφήματα.

Ορισμός 10.4 (Καταφύγιο). Ένα καταφύγιο του G είναι μία συλλογή $\mathcal{S}$ από μη-κενά συνεκτικά σύνολα στο G τέτοια ώστε για κάθε μη-ελαχιστικό σύνολο $S \in \mathcal{S}$ καμμία κορυφή δεν ανήκει σε όλα τα παιδιά του. Με άλλα λόγια,

$$\bigcap \{S' \mid S' \in M_{\mathcal{S}}(S)\} = \emptyset,$$

όπου $M_S(S)$ είναι τα $\subseteq$ -μεγιστικά στοιχεία του $\{S' \in \mathcal{S} : S' \subset S\}$. Το πάχος (*thickness*) ενός καταφυγίου $\mathcal{S}$ είναι το ελαχιστικό μήκος μιας μεγιστικής $\subseteq$ -αλυσίδας.

Στο Σχήμα 10.2 μπορούμε να δούμε ένα καταφύγιο του P_9 πάχους 4 και στο Σχήμα 10.3 μπορούμε να δούμε τα βήματα μιας μονότονης επιτυχούς ΤΕΠΕ-στρατηγικής κόστους 4.



Σχήμα 10.2: Ένα καταφύγιο του P_9 που έχει πάχος 4.

Η Παρατήρηση 10.1 διασφαλίζει ότι μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 10.5 για απλά γραφήματα με τον ακόλουθο τρόπο.

Θεώρημα 10.6. Έστω ότι το G είναι ένα μη-κενό γράφημα και ο k είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Το G έχει βάθος δέντρου το πολύ k .
- (ii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν αόρατο και ενεργό φυγά με μία μονότονη στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.
- (iii) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν αόρατο και ενεργό φυγά με μία στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.

- (iv) Κάθε καταφύγιο στο G έχει πάχος το πολύ k .
- (v) Στο G , k ανιχνευτές μπορούν να αιχμαλωτίσουν έναν ορατό και ενεργό φυγά με μία μονότονη στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης.

Ωστόσο, θα θέλαμε να συμπεριλάβουμε επίσης μία απλούστερη ευθεία απόδειξη για την περίπτωση των απλών γραφημάτων.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii): Προχωράμε με επαγωγή στην ποσότητα $k \cdot (|V(G)| - 2) + |\mathcal{C}(G)|$ όπου $k = \mathbf{td}(G)$. Παρατηρούμε ότι $k \cdot (|V(G)| - 2) + |\mathcal{C}(G)| \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει όταν $|V(G)| = 1$, και συνεπώς $k = 1$. Σε μία τέτοια περίπτωση, η στρατηγική ανίχνευσης είναι $\mathcal{R} = [e, x]$ όπου $\{x\} = V(G)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δήλωση ισχύει για όλα τα G όπου $k \cdot (|V(G)| - 2) + |\mathcal{C}(G)| < \rho$ και έστω ότι το G είναι ένα γράφημα τέτοιο ώστε $k \cdot (|V(G)| - 2) + |\mathcal{C}(G)| = \rho$. Έστω ότι $\mathcal{C}(G) = \{G_1, \dots, G_\sigma\}$, όπου $\sigma = |\mathcal{C}(G)|$. Από τον ορισμό του βάρους δέντρου, έπεται ότι $k_i = \mathbf{td}(G_i) \leq k$, για $i \in \{1, \dots, \sigma\}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση i. Εάν $\sigma \geq 2$, τότε $k_i \cdot (|V(G_i)| - 2) + |\mathcal{C}(G_i)| \leq k \cdot (|V(G_i)| - 2) + 1 < k \cdot (|V(G_i)| - 2) + \sigma = \rho$, $i \in \{1, \dots, \sigma\}$ και, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει μία μονότονη επιτυχής στρατηγική $\mathcal{R}_i$ στο G_i που χρησιμοποιεί το πολύ k_i ανιχνευτές. Τότε η $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_\sigma$ είναι μία μονότονη επιτυχής στρατηγική στο G που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές (χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\oplus$ για να δηλώσουμε την παράθεση δύο ακολουθιών).

Περίπτωση ii. Εάν $\sigma = 1$, τότε από τον ορισμό του βάρους δέντρου, το G περιέχει μία κορυφή x τέτοια ώστε το γράφημα $G^- = G \setminus x$ έχει βάθος δέντρου $k^- = k - 1$. Καθώς το βάθος δέντρου του G^- είναι ένας θετικός ακέραιος, έπεται ότι $k \geq 2$. Παρατηρούμε τώρα ότι $k^- \cdot (|V(G^-)| - 2) + |\mathcal{C}(G^-)| \leq k \cdot (|V(G)| - 2) - k + 2 < k \cdot (|V(G)| - 2) + 1 = k \cdot (|V(G)| - 2) + \sigma = \rho$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση στο G^- και να πάρουμε μία μονότονη επιτυχής στρατηγική $\mathcal{R}^- = [w_1, \dots, w_\rho]$ στο

G^- που χρησιμοποιεί το πολύ $k - 1$ ανιχνευτές. Αλλά τότε η στρατηγική $\mathcal{R} = [\epsilon, xw_1, \dots, xw_p]$ είναι μία μονότονη επιτυχής στρατηγική στο G που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Αποδεικνύουμε την αντιθετοαναστροφή χρησιμοποιώντας επαγωγή στο k . Με άλλα λόγια, δείχνουμε ότι για κάθε $k \geq 0$, εάν το $\mathcal{K}$ είναι ένα καταφύγιο του G με πάχος τουλάχιστον $k + 1$, τότε δεν υπάρχει επιτυχής στρατηγική στο G που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές. Για $k = 0$ αυτό είναι προφανές αφού χρειαζόμαστε τουλάχιστον έναν ανιχνευτή για να αιχμαλωτίσουμε έναν φυγά ο οποίος αποδρά σε ένα μη-κενό γράφημα. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δήλωση είναι σωστή για όλα τα k όπου $0 \leq k < k'$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει επίσης για $k = k'$.

Έστω ότι το $\mathcal{K}$ είναι ένα καταφύγιο του G πάχους τουλάχιστον $k + 1$ με ελάχιστο πλήθος μεγιστικών συνόλων. Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο καταφύγιο θα είχε ένα μόνο μεγιστικό σύνολο, αφού για κάθε μεγιστικό σύνολο T του $\mathcal{K}$, τα $\{T\} \cup \{S \mid \text{Το } S \text{ είναι ένας απόγονος του } T \text{ στο } \mathcal{K}\}$ είναι επίσης καταφύγιο του G πάχους τουλάχιστον $k + 1$. Έστω ότι το X είναι ένα μεγιστικό σύνολο του $\mathcal{K}$. Υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό, διαφορετικά δουλεύουμε στη συνεκτική συνιστώσα του G που περιέχει το μεγιστικό σύνολο του $\mathcal{K}$. Έστω ότι η $\mathcal{R} = [w_0, \dots, w_p]$ είναι μία επιτυχής στρατηγική στο G που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές και είναι ελαχιστικού μήκους. Λέμε ότι η i -οστή κίνηση της $\mathcal{R}$ είναι *εκκινητική κίνηση* εάν $w_{i-1} = \epsilon$. Προφανώς η $\mathcal{R}$ πρέπει να έχει τουλάχιστον μία εκκινητική κίνηση καθώς η κίνηση της πρώτης τοποθέτησης είναι μία από αυτές. Επιπλέον, η $\mathcal{R}$ δεν μπορεί να έχει καμμία άλλη εκκινητική κίνηση. Όντως, εάν η i -οστή κίνηση είναι μία τέτοια κίνηση, όπου $i > 1$, τότε η $\mathcal{R}' = [w_{i-1}, w_i, \dots, w_p]$ θα ήταν επίσης μία επιτυχής στρατηγική που χρησιμοποιεί το πολύ k ανιχνευτές, αντιφάσκοντας στην ελαχιστικότητα της $\mathcal{R}$. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ανιχνευτής που τοποθετήθηκε πρώτος δεν αφαιρείται ποτέ από το γράφημα. Ας υποθέσουμε τώρα

ότι η x είναι η κορυφή στην οποία συμβαίνει η πρώτη τοποθέτηση. Ισχυρίζομαστε ότι το $G^- = G \setminus x$ περιέχει ένα καταφύγιο $\mathcal{K}^-$ πάχους τουλάχιστον k . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Εάν το x τέμνει το X τότε, από τον ορισμό ενός καταφυγίου, το x δεν μπορεί να ανήκει σε όλα τα παιδιά του X . Έστω ότι το X^- είναι ένα τέτοιο παιδί. Παρατηρούμε τότε ότι το X^- είναι το μεγιστικό σύνολο του καταφυγίου $\mathcal{K}^-$ που ορίζεται από το X^- και τους απογόνους του. Έπεται ότι το $\mathcal{K}^-$ είναι ένα καταφύγιο του $G \setminus x$ πάχους τουλάχιστον k .

Περίπτωση 2. Εάν το x δεν τέμνει το X , τότε $\mathcal{K} = \mathcal{K} \setminus x$ και άρα το $\mathcal{K}^- = \mathcal{K}$ είναι ένα καταφύγιο του $G^- = G \setminus x$ πάχους τουλάχιστον $k + 1 \geq k$. Παρατηρούμε τώρα ότι η στρατηγική $\mathcal{R}^- = [w_1^-, \dots, w_\rho^-]$, που δημιουργείται εάν αφαιρέσουμε το x από το w_i για κάθε $i \in \{1, \dots, \rho\}$, είναι μία επιτυχής στρατηγική στο G^- που χρησιμοποιεί το πολύ $k - 1$ ανιχνευτές, αντιφάσκοντας στην επαγωγική υπόθεση για $k = k' - 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Αποδεικνύουμε ξανά την αντιθετοαναστροφή, δηλαδή, για κάθε $k \geq 1$, εάν $\mathbf{td}(G) \geq k$, τότε υπάρχει ένα καταφύγιο του G πάχους τουλάχιστον k . Η περίπτωση όπου $k = 1$ είναι προφανής καθώς κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός μη-κενού γραφήματος είναι ένα καταφύγιο ενός στοιχείου πάχους 1. Υποθέτουμε τώρα ότι η δήλωση είναι σωστή για όλα τα k όπου $0 \leq k < k'$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει επίσης για $k = k'$. Έστω ότι το G είναι ένα γράφημα όπου $\mathbf{td}(G) \geq k$ και έστω ότι η G' είναι μία από τις συνεκτικές συνιστώσες του που έχει βάθος δέντρου τουλάχιστον k . Αποδεικνύουμε ότι το G' έχει ένα καταφύγιο $\mathcal{K}$ πάχους τουλάχιστον k . Καθώς το $\mathcal{K}$ είναι επίσης ένα καταφύγιο του G , το G έχει ένα καταφύγιο πάχους k . Αφού $\mathbf{td}(G') \geq k$ και το G' είναι συνεκτικό, έπεται ότι για κάθε $x \in V(G')$, $\mathbf{td}(G' \setminus x) \geq k - 1$. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $x \in V(G')$, το $G^{(x)} = G' \setminus x$ περιέχει ένα καταφύγιο $\mathcal{K}^{(x)}$ πάχους τουλάχιστον $k - 1$. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{K} = \{V(G')\} \cup \bigcup_{x \in V(G')} \mathcal{K}^{(x)}$ είναι ένα καταφύγιο του

G' , αφού $\bigcap_{x \in V(G')} (V(G') \setminus x) = \emptyset$. Επιπλέον, το $\mathcal{K}$ έχει πάχος ένα περισσότερο από το ελάχιστο πάχος των $\mathcal{K}^{(x)}$, $x \in V(G')$, συνεπώς το $\mathcal{K}$ είναι ένα καταφύγιο πάχους τουλάχιστον k , όπως απαιτείται.

Τέλος, είναι τετριμμένο να δούμε ότι, $(ii) \Rightarrow (v)$ (αφού μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια στρατηγική με την περίπτωση του αόρατου φυγά), ενώ για την κατεύθυνση $(v) \Rightarrow (ii)$ αρκεί να θυμηθούμε ότι από τα αποτελέσματα στην [96] για έναν ορατό και ενεργό φυγά υπάρχει μία στρατηγική ανίχνευσης σταθμευμένων ανιχνευτών η οποία είναι επίσης μία μονότονη στρατηγική ΤΕΠΕ-ανίχνευσης. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] Faisal N. Abu-Khzam and Michael A. Langston. Graph coloring and the immersion order. In Tandy Warnow and Binhai Zhu, editors, *COCOON*, volume 2697 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 394–403. Springer, 2003.
- [2] Isolde Adler. Directed tree-width examples. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 97(5):718–725, 2007.
- [3] Isolde Adler, Arthur M. Farley, and Andrzej Proskurowski. Obstructions for linear rankwidth at most 1. *CoRR*, abs/1106.2533, 2011.
- [4] Isolde Adler, Martin Grohe, and Stephan Kreutzer. Computing excluded minors. In Shang-Hua Teng, editor, *SODA*, pages 641–650. SIAM, 2008.
- [5] Isolde Adler, Stavros G. Kolliopoulos, Philipp Klaus Krause, Daniel Lokshtanov, Saket Saurabh, and Dimitrios M. Thilikos. Tight

- bounds for linkages in planar graphs. In Luca Aceto, Monika Henzinger, and Jiri Sgall, editors, *ICALP (1)*, volume 6755 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 110–121. Springer, 2011.
- [6] J. Alber, H. L. Bodlaender, H. Fernau, T. Kloks, and R. Niedermeier. Fixed parameter algorithms for dominating set and related problems on planar graphs. *Algorithmica*, 33(4):461–493, 2002.
- [7] Jochen Alber, Hans L. Bodlaender, Henning Fernau, and Rolf Niedermeier. Fixed parameter algorithms for planar dominating set and related problems. In *6th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory—SWAT 2000 (Bergen)*, pages 97–110. Springer, Berlin, 2000.
- [8] Noga Alon, Gregory Gutin, Eun Jung Kim, Stefan Szeider, and Anders Yeo. Solving max- r -sat above a tight lower bound. In *SODA*, pages 511–517, 2010.
- [9] Noga Alon, Gregory Gutin, Eun Jung Kim, Stefan Szeider, and Anders Yeo. Solving max- r -sat above a tight lower bound. *Algorithmica*, 61(3):638–655, 2011.
- [10] Noga Alon, Daniel Lokshtanov, and Saket Saurabh. Fast fast. In Susanne Albers, Alberto Marchetti-Spaccamela, Yossi Matias, Sotiris E. Nikolettseas, and Wolfgang Thomas, editors, *ICALP (1)*, volume 5555 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 49–58. Springer, 2009.
- [11] Noga Alon, Raphael Yuster, and Uri Zwick. Color-coding. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 42(4):844–856, 1995.

- [12] Eyal Amir. Approximation algorithms for treewidth. *Algorithmica*, 56(4):448–479, 2010.
- [13] Stefan Arnborg, Jens Lagergren, and Detlef Seese. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*, 12:308–340, 1991.
- [14] Stefan Arnborg, Andrzej Proskurowski, and Derek G. Corneil. Forbidden minors characterization of partial 3-trees. *Discrete Mathematics*, 80(1):1–19, 1990.
- [15] R. Balasubramanian, Michael Fellows, and Venkatesh Raman. An improved fixed-parameter algorithm for vertex cover. *Information Processing Letters*, 65:163–168, 1998.
- [16] János Barát. Directed path-width and monotonicity in digraph searching. *Graphs and Combinatorics*, 22(2):161–172, 2006.
- [17] Rémy Belmonte, Pim van 't Hof, Marcin Kaminski, Daniël Paulusma, and Dimitrios M. Thilikos. Characterizing graphs of small carving-width. In Guohui Lin, editor, *COCOA*, volume 7402 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 360–370. Springer, 2012.
- [18] Dietmar Berwanger, Anuj Dawar, Paul Hunter, and Stephan Kreutzer. DAG-width and parity games. In *Proceedings of the 23rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 524–536, 2006.
- [19] Therese C. Biedl and Michael Kaufmann. Area-efficient static and incremental graph drawings. In Rainer E. Burkard and Gerhard J. Woeginger, editors, *ESA*, volume 1284 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 37–52. Springer, 1997.

- [20] Daniel Bienstock and Paul D. Seymour. Monotonicity in graph searching. *Journal of Algorithms*, 12:239–245, 1991.
- [21] Hans L. Bodlaender, Jitender S. Deogun, Klaus Jansen, Ton Kloks, Dieter Kratsch, Haiko Müller, and Zolt Tuza. Rankings of graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 11(1):168–181 (electronic), 1998.
- [22] Hans L. Bodlaender, Rod Downey, Fedor V. Fomin, and Dániel Marx, editors. *The Multivariate Algorithmic Revolution and Beyond - Essays Dedicated to Michael R. Fellows on the Occasion of His 60th Birthday*, volume 7370 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2012.
- [23] Hans L. Bodlaender, Rodney G. Downey, Michael R. Fellows, and Danny Hermelin. On problems without polynomial kernels. *J. Comput. Syst. Sci.*, 75(8):423–434, 2009.
- [24] Hans L. Bodlaender, Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Eelko Peninkx, Saket Saurabh, and Dimitrios M. Thilikos. (Meta) Kernelization. In *Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009)*, pages 629–638. IEEE, 2009.
- [25] Hans L. Bodlaender and Dimitrios M. Thilikos. Graphs with branch-width at most three. *Journal of Algorithms*, 32:167–197, 1999.
- [26] Hans Leo Bodlaender and Ton Kloks. Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs. *Journal of Algorithms*, 21:358–402, 1996.
- [27] B. Bollobás and A. D. Scott. Better bounds for Max Cut. In *Contem-*

- porary combinatorics, volume 10 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 185–246. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.
- [28] Liming Cai and David Juedes. On the existence of subexponential parameterized algorithms. *Journal of Computer and System Sciences*, 67(4):789 – 807, 2003. Parameterized Computation and Complexity 2003.
- [29] Kevin Cattell, Michael J. Dinneen, Rodney G. Downey, Michael R. Fellows, and Michael A. Langston. On computing graph minor obstruction sets. *Theor. Comput. Sci.*, 233(1-2):107–127, 2000.
- [30] L. Sunil Chandran and Fabrizio Grandoni. Refined memorization for vertex cover. *Inf. Process. Lett.*, 93(3):123–131, 2005.
- [31] Moses Charikar, editor. *Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2010, Austin, Texas, USA, January 17-19, 2010*. SIAM, 2010.
- [32] Jianer Chen, Iyad A. Kanj, and Weijia Jia. Vertex cover: further observations and further improvements. *J. Algorithms*, 41(2):280–301, 2001.
- [33] Jianer Chen and Songjian Lu. Improved algorithms for weighted and unweighted set splitting problems. In *COCOON*, volume 4598 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 537–547, 2007.
- [34] Rajesh Hemant Chitnis, Marek Cygan, MohammadTaghi Hajiaghayi, Marcin Pilipczuk, and Michal Pilipczuk. Designing fpt algorithms for cut problems using randomized contractions. *CoRR*, abs/1207.4079, 2012.

- [35] Janka Chlebíková. The structure of obstructions to treewidth and pathwidth. *Discrete Applied Mathematics*, 120(1-3):61–71, 2002.
- [36] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85(1):12–75, 1990.
- [37] Bruno Courcelle, Rodney G. Downey, and Michael R. Fellows. A note on the computability of graph minor obstruction sets for monadic second order ideals. In *Proceedings of the First Japan-New Zealand Workshop on Logic in Computer Science (Auckland, 1997)*, volume 3, pages 1194–1198 (electronic), 1997.
- [38] Robert Crowston, Michael R. Fellows, Gregory Gutin, Mark Jones, Frances A. Rosamond, Stéphan Thomassé, and Anders Yeo. Simultaneously satisfying linear equations over F_2 : Maxlin2 and max-r-lin2 parameterized above average. In *FSTTCS*, volume 13 of *LIPICs*, pages 229–240, 2011.
- [39] Robert Crowston, Gregory Gutin, Mark Jones, Eun Jung Kim, and Imre Z. Ruzsa. Systems of linear equations over $\mathbb{F}_2$ and problems parameterized above average. In *SWAT*, volume 6139 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 164–175, 2010.
- [40] Robert Crowston, Gregory Gutin, Mark Jones, Venkatesh Raman, and Saket Saurabh. Parameterized complexity of maxsat above average. In *LATIN*, pages 184–194, 2012.
- [41] Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, Johan M. M. van Rooij, and Jakub Onufry Wojtaszczyk. Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time. In Ostrovsky [178], pages 150–159.

- [42] Anuj Dawar, Martin Grohe, and Stephan Kreutzer. Locally excluding a minor. In *LICS'07*, pages 270–279. IEEE Computer Society, 2007.
- [43] Anuj Dawar, Martin Grohe, Stephan Kreutzer, and Nicole Schweikardt. Approximation schemes for first-order definable optimisation problems. In *LICS*, pages 411–420. IEEE Computer Society, 2006.
- [44] Anuj Dawar and Stephan Kreutzer. Domination problems in nowhere-dense classes. In *IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2009)*, pages 157–168, 2009.
- [45] P. de la Torre, R. Greenlaw, and A. A. Schäffer. Optimal edge ranking of trees in polynomial time. *Algorithmica*, 13(6):592–618, 1995.
- [46] Frank K. H. A. Dehne, Michael R. Fellows, and Frances A. Rosamond. An fpt algorithm for set splitting. In *WG*, volume 2880 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 180–191, 2003.
- [47] Frank K. H. A. Dehne, Michael R. Fellows, Frances A. Rosamond, and Peter Shaw. Greedy localization, iterative compression, modeled crown reductions: New fpt techniques, an improved algorithm for set splitting, and a novel 2k kernelization for vertex cover. In *IWPEC*, volume 3162 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 271–280, 2004.
- [48] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Bidimensional parameters and local treewidth. *SIAM J. Discrete Math.*, 18(3):501–511, 2004.

- [49] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Fixed-parameter algorithms for (k, r) -center in planar graphs and map graphs. *ACM Trans. Algorithms*, 1(1):33–47, 2005.
- [50] Erik D. Demaine, Fedor V. Fomin, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Subexponential parameterized algorithms on bounded-genus graphs and H -minor-free graphs. *Journal of the ACM*, 52(6):866–893, 2005.
- [51] Erik D. Demaine, Mohammad Taghi Hajiaghayi, Naomi Nishimura, Prabhakar Ragde, and Dimitrios M. Thilikos. Approximation algorithms for classes of graphs excluding single-crossing graphs as minors. *J. Comput. Syst. Sci.*, 69(2):166–195, 2004.
- [52] Erik D. Demaine and Mohammadtaghi Hajiaghayi. Bidimensionality: new connections between FPT algorithms and PTASs. In *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2005)*, pages 590–601, New York, 2005. ACM-SIAM.
- [53] Erik D. Demaine and MohammadTaghi Hajiaghayi. Linearity of grid minors in treewidth with applications through bidimensionality. *Combinatorica*, 28(1):19–36, 2008.
- [54] Erik D. Demaine, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M. Thilikos. Exponential speedup of fixed-parameter algorithms for classes of graphs excluding single-crossing graphs as minors. *Algorithmica*, 41:245–267, 2005.
- [55] Erik D. Demaine, Mohammadtaghi Hajiaghayi, and Dimitrios M.

- Thilikos. The bidimensional theory of bounded-genus graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 20(2):357–371, 2006.
- [56] Nick D. Dendris, Lefteris M. Kirousis, and Dimitrios M. Thilikos. Fugitive-search games on graphs and related parameters. *Theoretical Computer Science*, 172(1-2):233–254, 1997.
- [57] J. S. Deogun, T. Kloks, D. Kratsch, and H. Müller. On vertex ranking for permutation and other graphs. In *STACS 94 (Caen, 1994)*, volume 775 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 747–758. Springer, Berlin, 1994.
- [58] M. DeVos, Z. Dvořák, J. Fox, J. McDonald, B. Mohar, and D. Scheide. Minimum degree condition forcing complete graph immersion. *ArXiv e-prints*, January 2011.
- [59] Matt DeVos, Ken-Ichi Kawarabayashi, Bojan Mohar, and Haruko Okamura. Immersing small complete graphs. *Ars Math. Contemp.*, 3(2):139–146, 2010.
- [60] Reinhard Diestel. *Graph theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.
- [61] Michael J. Dinneen and Liu Xiong. Minor-order obstructions for the graphs of vertex cover 6. *Journal of Graph Theory*, 41(3):163–178, 2002.
- [62] G. A. Dirac and S. Schuster. A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*. **57** = *Indagationes Math.*, 16:343–348, 1954.

- [63] G. A. Dirac and S. Schuster. Corrigendum: “A theorem of Kuratowski”. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 64 = *Indag. Math.*, 23:360, 1961.
- [64] Frederic Dorn. Dynamic programming and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 14th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2006)*, volume 4168 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 280–291. Springer, Berlin, 2006.
- [65] Frederic Dorn. *Designing Subexponential Algorithms: Problems, Techniques & Structures*. PhD thesis, Universitetet i Bergen, 2007.
- [66] Rodney G. Downey and Michael R. Fellows. *Parameterized complexity*. Monographs in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [67] Feodor F. Dragan, Fedor V. Fomin, and Petr A. Golovach. Spanners in sparse graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 77(6):1108–1119, 2011.
- [68] Zdenek Dvorak. Constant-factor approximation of domination number in sparse graphs. *CoRR*, abs/1110.5190, 2011.
- [69] Zdenek Dvorak, Archontia C. Giannopoulou, and Dimitrios M. Thilikos. Forbidden graphs for tree-depth. *Eur. J. Comb.*, 33(5):969–979, 2012.
- [70] C. S. Edwards. Some extremal properties of bipartite subgraphs. *Canad. J. Math.*, 25:475–485, 1973.
- [71] L. C. Eggen. Transition graphs and the star-height of regular events. *Michigan Mathematical Journal*, 10(4):385–397, 1963.

- [72] Stanley Eisenstat and Joseph Liu. The theory of elimination trees for sparse unsymmetric matrices. *SIAM Journal of Matrix Analysis & Applications*, 26(3):686–705, 2005.
- [73] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. Academic Press, 1972.
- [74] P. Erdős, G.O.H. Katona, and Hongrie) Colloquium on graph theory (1966. Tihany. *Theory of Graphs: Proceedings of the Colloquium [on Graph Theory], Held at Tihany, Hungary, September 1966. Edited by P. Erdős and G. Katona*. Akadémiai Kiadó, 1968.
- [75] P. Erdős. On some extremal problems in graph theory. *Israel J. Math.*, 3:113–116, 1965.
- [76] Paul Erdős and Louis Pósa. On independent circuits contained in a graph. *Canad. J. Math.*, 17:347–352, 1965.
- [77] Michael R. Fellows, Bart M.P. Jansen, and Frances Rosamond. Towards fully multivariate algorithmics: Parameter ecology and the deconstruction of computational complexity. *European Journal of Combinatorics*, (0):–, 2012.
- [78] Michael R. Fellows and Michael A. Langston. Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 35(3):727–739, 1988.
- [79] Michael R. Fellows and Michael A. Langston. On search, decision, and the efficiency of polynomial-time algorithms. *J. Comput. System Sci.*, 49(3):769–779, 1994.

- [80] Henning Fernau. A top-down approach to search-trees: Improved algorithmics for 3-hitting set. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, (073), 2004.
- [81] Michael Ferrara, Ronald J. Gould, Gerard Tansey, and Thor Whalen. On h -immersions. *Journal of Graph Theory*, 57(3):245–254, 2008.
- [82] Jörg Flum and Martin Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [83] Fedor V. Fomin, Petr A. Golovach, and Dimitrios M. Thilikos. Contraction obstructions for treewidth. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 101(5):302–314, 2011.
- [84] Fedor V. Fomin, Fabrizio Grandoni, and Dieter Kratsch. Measure and conquer: Domination - a case study. In Luís Caires, Giuseppe F. Italiano, Luís Monteiro, Catuscia Palamidessi, and Moti Yung, editors, *ICALP*, volume 3580 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 191–203. Springer, 2005.
- [85] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Neeldhara Misra, Geevarghese Philip, and Saket Saurabh. Hitting forbidden minors: Approximation and kernelization. In Thomas Schwentick and Christoph Dürr, editors, *STACS*, volume 9 of *LIPICs*, pages 189–200. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011.
- [86] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Neeldhara Misra, and Saket Saurabh. Planar f -deletion: Approximation and optimal fpt algorithms. *CoRR*, abs/1204.4230, 2012.

- [87] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshantov, Venkatesh Raman, and Saket Saurabh. Bidimensionality and EPTAS. In *22st ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011)*, 2011.
- [88] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshantov, Venkatesh Raman, and Saket Saurabh. Subexponential algorithms for partial cover problems. *Inf. Process. Lett.*, 111(16):814–818, 2011.
- [89] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshantov, and Saket Saurabh. Bidimensionality and geometric graphs. In Rabani [180], pages 1563–1575.
- [90] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshantov, Saket Saurabh, and Dimitrios M. Thilikos. Linear kernels for (connected) dominating set on h -minor-free graphs. In Rabani [180], pages 82–93.
- [91] Fedor V. Fomin, Saket Saurabh, and Dimitrios M. Thilikos. Strengthening erdős-pósa property for minor-closed graph classes. *Journal of Graph Theory*, 66(3):235–240, 2011.
- [92] Fedor V. Fomin and Dimitrios M. Thilikos. Fast parameterized algorithms for graphs on surfaces: Linear kernel and exponential speed-up. In *Proceedings of the 31st International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2004)*, volume 3142 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 581–592. Springer, 2004.
- [93] András Frank, Tamás Király, and Matthias Kriesell. On decomposing a hypergraph into k connected sub-hypergraphs. *Discrete Applied Mathematics*, 131(2):373–383, 2003.
- [94] Markus Frick and Martin Grohe. Deciding first-order properties of locally tree-decomposable structures. *J. ACM*, 48(6):1184–1206 (electronic), 2001.

- [95] Harvey Friedman, Neil Robertson, and Paul Seymour. The meta-mathematics of the graph minor theorem. In *Logic and combinatorics (Arcata, Calif., 1985)*, volume 65 of *Contemp. Math.*, pages 229–261. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [96] Robert Ganian, Petr Hliněný, Joachim Kneis, Alexander Langer, Jan Obdržálek, and Peter Rossmanith. On digraph width measures in parameterized algorithmics. In *4th International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC 2009)*, pages 185–197, 2009.
- [97] Archontia C. Giannopoulou, Paul Hunter, and Dimitrios M. Thilikos. Lifo-search: A min-max theorem and a searching game for cycle-rank and tree-depth. *Discrete Applied Mathematics*, 160(15):2089–2097, 2012.
- [98] Archontia C. Giannopoulou, Marcin Kaminski, and Dimitrios M. Thilikos. Excluding graphs as immersions in surface embedded graphs. unpublished manuscript.
- [99] Archontia C. Giannopoulou, Marcin Kaminski, and Dimitrios M. Thilikos. Forbidding kuratowski graphs as immersions. *CoRR*, abs/1207.5329, 2012.
- [100] Archontia C. Giannopoulou, Sudeshna Kolay, and Saket Saurabh. New lower bound on max cut of hypergraphs with an application to r -set splitting. In David Fernández-Baca, editor, *LATIN*, volume 7256 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 408–419. Springer, 2012.
- [101] Archontia C. Giannopoulou, Iosif Salem, and Dimitris Zoros. Effective computation of immersion obstructions for unions of graph

- classes. In Fedor V. Fomin and Petteri Kaski, editors, *SWAT*, volume 7357 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 165–176. Springer, 2012.
- [102] Archontia C. Giannopoulou, Iosif Salem, and Dimitris Zoros. Effective computation of immersion obstructions for unions of graph classes. *CoRR*, abs/1207.5636, 2012.
- [103] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. Obstructions for tree-depth. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34:249–253, 2009.
- [104] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. A min-max theorem for lifo-search. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38:395–400, 2011.
- [105] Archontia C. Giannopoulou and Dimitrios M. Thilikos. Optimizing the graph minors weak structure theorem. *CoRR*, abs/1102.5762, 2011.
- [106] Petr A. Golovach, M. Kaminski, D. Paulusma, and D. M. Thilikos. Induced packing of odd cycles in a planar graph. In *Proceedings of the 20th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2009)*, volume 5878 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 514–523. Springer, Berlin, 2009.
- [107] Jens Gramm, Jiong Guo, Falk Hüffner, and Rolf Niedermeier. Graph-modeled data clustering: Exact algorithms for clique generation. *Theory Comput. Syst.*, 38(4):373–392, 2005.
- [108] Jens Gramm, Rolf Niedermeier, and Peter Rossmanith. Fixed-

- parameter algorithms for closest string and related problems. *Algorithmica*, 37(1):25–42, 2003.
- [109] Martin Grohe, Ken-ichi Kawarabayashi, Dániel Marx, and Paul Wollan. Finding topological subgraphs is fixed-parameter tractable. In *STOC*, pages 479–488, 2011.
- [110] Hermann Gruber. Digraph Complexity Measures and Applications in Formal Language Theory. In *4th Workshop on Mathematical and Engineering Methods in Computer Science (MEMICS 2008)*, pages 60–67, 2008.
- [111] Qian-Ping Gu and Hisao Tamaki. Improved bounds on the planar branchwidth with respect to the largest grid minor size. In Otfried Cheong, Kyung-Yong Chwa, and Kunsoo Park, editors, *ISAAC (2)*, volume 6507 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 85–96. Springer, 2010.
- [112] Gregory Gutin, Eun Jung Kim, Stefan Szeider, and Anders Yeo. A probabilistic approach to problems parameterized above or below tight bounds. *J. Comput. Syst. Sci.*, 77(2):422–429, 2011.
- [113] Gregory Gutin, Leo van Iersel, Matthias Mnich, and Anders Yeo. All ternary permutation constraint satisfaction problems parameterized above average have kernels with quadratic numbers of variables. In *ESA (1)*, volume 6346 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 326–337, 2010.
- [114] P. Hall. On representatives of subsets. *Journal of the London Mathematical Society*, 10:26–30, 1935.

- [115] Pinar Heggernes, Pim van 't Hof, Bart M. P. Jansen, Stefan Kratsch, and Yngve Villanger. Parameterized complexity of vertex deletion into perfect graph classes. In Olaf Owe, Martin Steffen, and Jan Arne Telle, editors, *FCT*, volume 6914 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 240–251. Springer, 2011.
- [116] Pinar Heggernes, Pim van 't Hof, Daniel Lokshtanov, and Christophe Paul. Obtaining a bipartite graph by contracting few edges. In Supratik Chakraborty and Amit Kumar, editors, *FSTTCS*, volume 13 of *LIPICs*, pages 217–228. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2011.
- [117] Ken ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi. The edge disjoint paths problem in eulerian graphs and 4-edge-connected graphs. In Charikar [31], pages 345–353.
- [118] Ken ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi. An improved algorithm for the half-disjoint paths problem. *SIAM J. Discrete Math.*, 25(3):1322–1330, 2011.
- [119] Ken ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi. List-coloring graphs without subdivisions and without immersions. In Rabani [180], pages 1425–1435.
- [120] Ken ichi Kawarabayashi, Stephan Kreutzer, and Bojan Mohar. Linkless and flat embeddings in 3-space and the unknot problem. In Jack Snoeyink, Mark de Berg, Joseph S. B. Mitchell, Günter Rote, and Monique Teillaud, editors, *Symposium on Computational Geometry*, pages 97–106. ACM, 2010.
- [121] Ken ichi Kawarabayashi, Zhentao Li, and Bruce A. Reed. Recognizing a totally odd k_4 -subdivision, parity 2-disjoint rooted paths and

- a parity cycle through specified elements. In Charikar [31], pages 318–328.
- [122] Ken ichi Kawarabayashi, Bojan Mohar, and Bruce A. Reed. A simpler linear time algorithm for embedding graphs into an arbitrary surface and the genus of graphs of bounded tree-width. In *FOCS*, pages 771–780. IEEE Computer Society, 2008.
- [123] Ken ichi Kawarabayashi, Bruce A. Reed, and Paul Wollan. The graph minor algorithm with parity conditions. In Ostrovsky [178], pages 27–36.
- [124] Ken ichi Kawarabayashi and Paul Wollan. A shorter proof of the graph minor algorithm: the unique linkage theorem. In Leonard J. Schulman, editor, *STOC*, pages 687–694. ACM, 2010.
- [125] Ken ichi Kawarabayashi and Paul Wollan. A simpler algorithm and shorter proof for the graph minor decomposition. In Lance Fortnow and Salil P. Vadhan, editors, *STOC*, pages 451–458. ACM, 2011.
- [126] Russell Impagliazzo, Ramamohan Paturi, and Francis Zane. Which problems have strongly exponential complexity? *J. Comput. Syst. Sci.*, 63(4):512–530, 2001.
- [127] Takehiro Ito, Marcin Kaminski, Daniël Paulusma, and Dimitrios M. Thilikos. Parameterizing cut sets in a graph by the number of their components. *Theor. Comput. Sci.*, 412(45):6340–6350, 2011.
- [128] Weijia Jia, Chuanlin Zhang, and Jianer Chen. An efficient parameterized algorithm for m -set packing. *J. Algorithms*, 50(1):106–117, 2004.

- [129] Thor Johnson, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Directed tree-width. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 82(1):138–154, 2001.
- [130] Marcin Kaminski and Naomi Nishimura. Finding an induced path of given parity in planar graphs in polynomial time. In Rabani [180], pages 656–670.
- [131] Marcin Kaminski and Dimitrios M. Thilikos. Contraction checking in graphs on surfaces. In Christoph Dürr and Thomas Wilke, editors, *STACS*, volume 14 of *LIPICs*, pages 182–193. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2012.
- [132] Meir Katchalski, William McCuaig, and Suzanne Seager. Ordered colourings. *Discrete Math.*, 142(1-3):141–154, 1995.
- [133] Ken-ichi Kawarabayashi and Yusuke Kobayashi. The induced disjoint path problem. In *Proceedings of the 13th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2008)*, volume 5035 of *lncs*, pages 47–61. Springer, Berlin, 2008.
- [134] Ken-ichi Kawarabayashi and Bruce Reed. Odd cycle packing. In *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2010)*, pages 695–704, New York, NY, USA, 2010. ACM.
- [135] Eun Jung Kim, Alexander Langer, Christophe Paul, Felix Reidl, Peter Rossmanith, Ignasi Sau, and Somnath Sikdar. Linear kernels and single-exponential algorithms via protrusion decompositions. *CoRR*, abs/1207.0835, 2012.
- [136] Eun Jung Kim and Ryan Williams. Improved parameterized algorithms for above average constraint satisfaction. In Dániel Marx and

- Peter Rossmanith, editors, *IPEC*, volume 7112 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 118–131. Springer, 2011.
- [137] Lefteris Kirousis and Christos Papadimitriou. Searching and pebbling. *Theoretical Computer Science*, 47(3):205–218, 1986.
- [138] Yusuke Kobayashi and Ken-ichi Kawarabayashi. Algorithms for finding an induced cycle in planar graphs and bounded genus graphs. In *Proceedings of the twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2009)*, pages 1146–1155. ACM-SIAM, 2009.
- [139] Athanassios Koutsonas, Dimitrios M. Thilikos, and Koichi Yamazaki. Outerplanar obstructions for matroid pathwidth. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38:541–546, 2011.
- [140] Stephan Kreutzer and Sebastian Ordyniak. Digraph decompositions and monotonicity in digraph searching. In *34th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2008)*, pages 336–347, 2008.
- [141] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi’s conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.
- [142] Kazimierz Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [143] J. Lagergren. Upper bounds on the size of obstructions and intertwines. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 73:7–40, 1998.
- [144] Jens Lagergren. The size of an interwine. In Serge Abiteboul and Eli Shamir, editors, *ICALP*, volume 820 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 520–531. Springer, 1994.

-
- [145] Andrea S. LaPaugh. Recontamination does not help to search a graph. *Journal of the ACM*, 40(2):224–245, 1993.
- [146] F. Lescure and H. Meyniel. On a problem upon configurations contained in graphs with given chromatic number. In Lars Dovling Andersen, Ivan Taftberg Jakobsen, Carsten Thomassen, Bjarne Toft, and Preben Dahl Vestergaard, editors, *Graph Theory in Memory of G.A. Dirac*, volume 41 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 325 – 331. Elsevier, 1988.
- [147] Joseph W. H. Liu. The role of elimination trees in sparse factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11(1):134–172, 1990.
- [148] Daniel Lokshtanov. *New Methods in Parameterized Algorithms and Complexity*. PhD thesis, Universitetet i Bergen, 2009.
- [149] Daniel Lokshtanov and Saket Saurabh. Even faster algorithm for set splitting! In *IWPEC*, pages 288–299, 2009.
- [150] Daniel Lokshtanov and Christian Sloper. Fixed parameter set splitting, linear kernel and improved running time. In *ACiD*, volume 4 of *Texts in Algorithmics*, pages 105–113, 2005.
- [151] Meena Mahajan and Venkatesh Raman. Parameterizing above guaranteed values: Maxsat and maxcut. *J. Algorithms*, 31(2):335–354, 1999.
- [152] Meena Mahajan, Venkatesh Raman, and Somnath Sikdar. Parameterizing above or below guaranteed values. *J. Comput. Syst. Sci.*, 75(2):137–153, 2009.
- [153] Yury Makarychev. A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25(2):129–131, 1997.

- [154] Dániel Marx. Chordal deletion is fixed-parameter tractable. *Algorithmica*, 57(4):747–768, 2010.
- [155] William McCuaig. Intercyclic digraphs. In Neil Robertson and Paul D. Seymour, editors, *Graph Structure Theory*, volume 147 of *Contemporary Mathematics*, pages 203–246. American Mathematical Society, 1991.
- [156] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic (3. ed.)*. Chapman and Hall, 1987.
- [157] Bojan Mohar and Carsten Thomassen. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [158] C. St. J. A. Nash-Williams. On well-quasi-ordering finite trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 59:833–835, 1963.
- [159] Jesper Nederlof and Johan M. M. van Rooij. Inclusion/exclusion branching for partial dominating set and set splitting. In *IPEC*, volume 6478 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 204–215, 2010.
- [160] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. The grad of a graph and classes with bounded expansion. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:101–106, 2005.
- [161] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. First order properties on nowhere dense structures. *J. Symb. Log.*, 75(3):868–887, 2010.
- [162] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. How many f’s are there in g? *Eur. J. Comb.*, 32(7):1126–1141, 2011.

- [163] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. On nowhere dense graphs. *Eur. J. Comb.*, 32(4):600–617, 2011.
- [164] Jaroslav Nešetřil, Patrice Ossona de Mendez, and David R. Wood. Characterisations and examples of graph classes with bounded expansion. *Eur. J. Comb.*, 33(3):350–373, 2012.
- [165] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Linear time low tree-width partitions and algorithmic consequences. In *STOC'06: Proceedings of the 38th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 391–400. ACM, New York, 2006.
- [166] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Tree-depth, subgraph coloring and homomorphism bounds. *European J. Combin.*, 27(6):1022–1041, 2006.
- [167] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion. I. Decompositions. *European J. Combin.*, 29(3):760–776, 2008.
- [168] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion. II. Algorithmic aspects. *European J. Combin.*, 29(3):777–791, 2008.
- [169] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. Grad and classes with bounded expansion. III. Restricted graph homomorphism dualities. *European J. Combin.*, 29(4):1012–1024, 2008.
- [170] Jaroslav Nešetřil and Patrice Ossona de Mendez. *Sparsity: Graphs, Structures, and Algorithms*. Algorithms and Combinatorics. Springer, 2012.
- [171] Rolf Niedermeier. Invitation to fixed-parameter algorithms, 2002.

- [172] Rolf Niedermeier. *Invitation to fixed-parameter algorithms*, volume 31 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [173] Rolf Niedermeier and Peter Rossmanith. Upper bounds for vertex cover further improved. In Christoph Meinel and Sophie Tison, editors, *STACS*, volume 1563 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 561–570. Springer, 1999.
- [174] Rolf Niedermeier and Peter Rossmanith. An efficient fixed-parameter algorithm for 3-hitting set. *J. Discrete Algorithms*, 1(1):89–102, 2003.
- [175] Rolf Niedermeier and Peter Rossmanith. On efficient fixed-parameter algorithms for weighted vertex cover. *J. Algorithms*, 47(2):63–77, 2003.
- [176] Jan Obdržálek. DAG-width: Connectivity measure for directed graphs. In *Proceedings of the 17th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 814–821, 2006.
- [177] Ryan O’Donnell. Some topics in analysis of boolean functions. In *STOC*, pages 569–578, 2008.
- [178] Rafail Ostrovsky, editor. *IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2011, Palm Springs, CA, USA, October 22-25, 2011*. IEEE, 2011.
- [179] T. D. Parsons. The search number of a connected graph. In *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Ra-*

- ton, Fla., 1978), Congress. Numer., XXI, pages 549–554, Winnipeg, Man., 1978. Utilitas Math.
- [180] Yuval Rabani, editor. *Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2012, Kyoto, Japan, January 17-19, 2012*. SIAM, 2012.
- [181] Siddharthan Ramachandramurthi. The structure and number of obstructions to treewidth. *SIAM J. Discrete Math.*, 10(1):146–157, 1997.
- [182] Bruce A. Reed, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Packing directed circuits. *Combinatorica*, 16(4):535–554, 1996.
- [183] Bruce A. Reed and F. Bruce Shepherd. The gallai-younger conjecture for planar graphs. *Combinatorica*, 16(4):555–566, 1996.
- [184] Bruce A. Reed, Kaleigh Smith, and Adrian Vetta. Finding odd cycle transversals. *Oper. Res. Lett.*, 32(4):299–301, 2004.
- [185] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XXII. irrelevant vertices in linkage problems. To appear.
- [186] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors—a survey. In *Surveys in combinatorics 1985 (Glasgow, 1985)*, volume 103 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 153–171. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [187] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.

-
- [188] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. V. Excluding a planar graph. *J. Comb. Theory Series B*, 41:92–114, 1986.
- [189] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. VII. Disjoint paths on a surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 45(2):212–254, 1988.
- [190] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. X. Obstructions to tree-decomposition. *J. Combin. Theory Ser. B*, 52(2):153–190, 1991.
- [191] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XI. Circuits on a surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 60(1):72–106, 1994.
- [192] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XII. Distance on a surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 64(2):240–272, 1995.
- [193] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XIII. The disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 63(1):65–110, 1995.
- [194] Neil Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. Wagner’s conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.
- [195] Neil Robertson, P. D. Seymour, and Robin Thomas. Linkless embeddings of graphs in 3-space. *Bulletin of the Amer. Math. Soc.*, 28(1):84–89, 1993.
- [196] Neil Robertson and Paul Seymour. Excluding a graph with one crossing. In *Graph structure theory (Seattle, WA, 1991)*, pages 669–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

-
- [197] Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. Quickly excluding a planar graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62(2):323–348, 1994.
- [198] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. i. excluding a forest. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 35(1):39–61, 1983.
- [199] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. iii. planar tree-width. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 36(1):49–64, 1984.
- [200] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. VI. Disjoint paths across a disc. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 41(1):115–138, 1986.
- [201] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 48(2):227–254, 1990.
- [202] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. IX. disjoint crossed paths. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 49(1):40–77, 1990.
- [203] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. VIII. A kuratowski theorem for general surfaces. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 48(2):255–288, 1990.
- [204] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors .XIV. Extending an Embedding. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 65(1):23–50, 1995.
- [205] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors: XV. Giant Steps. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 68(1):112–148, 1996.
- [206] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors: XVII. Taming a vortex. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 77(1):162–210, 1999.

- [207] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. XVI. Excluding a non-planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 89(1):43–76, 2003.
- [208] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. XVIII. Tree-decompositions and well-quasi-ordering. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 89(1):77–108, 2003.
- [209] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. XIX. Well-quasi-ordering on a surface. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 90(2):325–385, 2004.
- [210] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. XXI. Graphs with unique linkages. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 99(3):583–616, 2009.
- [211] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors XXIII. Nash-Williams’ immersion conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 100(2):181–205, 2010.
- [212] Juanjo Rué, Ignasi Sau, and Dimitrios M. Thilikos. Dynamic programming for h-minor-free graphs. In Joachim Gudmundsson, Julián Mestre, and Taso Viglas, editors, *COCOON*, volume 7434 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 86–97. Springer, 2012.
- [213] Juanjo Rué, Konstantinos S. Stavropoulos, and Dimitrios M. Thilikos. Outerplanar obstructions for a feedback vertex set. *Eur. J. Comb.*, 33(5):948–968, 2012.
- [214] Mohammad Ali Safari. D-width: A more natural measure for directed tree width. In *Proceedings of the 30th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 745–756, 2005.

- [215] Jacob Scott, Trey Ideker, Richard M. Karp, and Roded Sharan. Efficient algorithms for detecting signaling pathways in protein interaction networks. In Satoru Miyano, Jill P. Mesirov, Simon Kasif, Sorin Istrail, Pavel A. Pevzner, and Michael S. Waterman, editors, *RECOMB*, volume 3500 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–13. Springer, 2005.
- [216] Paul Seymour and Paul Wollan. The structure of graphs not admitting a fixed immersion. unpublished manuscript.
- [217] Paul D. Seymour and Robin Thomas. Graph searching, and a min-max theorem for tree-width. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 58:22–33, 1993.
- [218] John Joseph Sylvester. Chemistry and algebra. *Nature*, 17:284, 1878.
- [219] Atsushi Takahashi, Shuichi Ueno, and Yoji Kajitani. Minimal acyclic forbidden minors for the family of graphs with bounded path-width. *Discrete Mathematics*, 127(1/3):293–304, 1994.
- [220] Dimitrios M. Thilikos. Algorithms and obstructions for linear-width and related search parameters. *Discrete Applied Mathematics*, 105:239–271, 2000.
- [221] Klaus Wagner. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.*, 114(1):570–590, 1937.
- [222] D. H. Younger. Graphs with interlinked directed circuits. In *Proceedings of the Midwest Symposium on Circuit Theory*, pages XVI 2.1 – XVI 2.7. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1973.

Λίστα Συμβόλων

$[n]$	$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$	17
$\{X\}$		250
$\mathbf{UC}$	Η ένωση όλων των γραφημάτων που ανήκουν στην κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$	21
$\sqsubseteq$	Η σχέση εναγόμενου υπογραφήματος.....	23
$\subseteq_s$	Η σχέση παραγόμενου υπογραφήματος.....	24
$\subseteq$	Η σχέση υπογραφήματος.....	24
$\leq_c$	Η σχέση σύνθλιψης.....	24
$\leq_c^\phi$	Η σχέση σύνθλιψης μέσω της απεικόνισης ϕ	24
$\leq_m$	Η σχέση ελάσσονος.	24
$\leq_{tm}$	Η σχέση τοπολογικού ελάσσονος.....	25

$\leq_{im}$	Η σχέση εμβύθισης. 25
$\neg$	Λογικός σύνδεσμος άρνησης. 36
$\wedge$	Λογικός σύνδεσμος σύζευξης. 36
$\vee$	Λογικός σύνδεσμος διάζευξης. 36
$\rightarrow$	Λογικός σύνδεσμος συνεπαγωγής. 36
$\leftrightarrow$	Λογικός σύνδεσμος ισοδυναμίας. 36
$\exists$	Υπαρξιακός ποσοδείκτης. 36
$\forall$	Καθολικός ποσοδείκτης. 36
A°	Το εσωτερικό του δακτυλίου A 163
$A[C_1, C_2]$	Ο δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους C_1 και C_2 . 30
$\mathbf{an}(G)$	Η απογειότητα του γραφήματος G 28
$\mathbf{ar}(R)$	Η πλειομέλεια του κατηγορηματικού συμβόλου R 36
$\mathbf{Aut}(G)$	Η ομάδα αυτομορφισμών του γραφήματος G 81
$\mathbf{bw}(G)$	Το κλαδοπλάτος του γραφήματος G 50
C_n	Ο κύκλος μήκους n 19
$\mathcal{C}(G)$	Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος G 21
$\mathbf{cdom}(G)$	Ο αριθμός κυριαρχίας κύκλων στο γράφημα G 198
$\mathbf{cr}(G)$	Η τάξη κύκλου του διγραφήματος G 249

$\mathbf{dd}(G)$		260
$\deg_G(v)$	Ο βαθμός της κορυφής v στο γράφημα G	18
$\mathbf{dist}_G(v, u)$	Η απόσταση των κορυφών v και u στο γράφημα G	19
$\mathbf{dpw}(G)$		259
$E(G)$	Το σύνολο ακμών του γραφήματος G	17
$E_G(v)$	Οι ακμές του γραφήματος G που προσπίπτουν στην κορυφή v	18
$E(x, y)$	Ατομικός τύπος γειτνίασης.....	36
$E_T^{\mathfrak{G}_{ex}}$		109
$\mathbf{eg}(G)$	Το γένος Euler του γραφήματος G	29
FPT	Η κλάση των παραμετρικά βατών προβλημάτων.....	184
$\mathfrak{G}_{ex}$		108
$\tilde{\mathbf{g}}(\Sigma)$	Το μη-προσανατολισμένο γένος της επιφάνειας Σ	29
$\mathbf{g}(\Sigma)$	Το προσανατολισμένο γένος της επιφάνειας Σ	29
$G \cup G'$	Η ένωση των γραφημάτων G και G'	20
$G \cap G'$	Η τομή των γραφημάτων G και G'	21
$G \times H$	Το λεξικογραφικό γινόμενο των γραφημάτων G και H . .	21
$G * H$	Το καρτεσιανό γινόμενο των γραφημάτων G και H	21
$G - v$	Το γράφημα που προκύπτει από το γράφημα G αφού αφαιρέσουμε την κορυφή v	22

$G - e$	Το γράφημα που προκύπτει από το γράφημα G αφού αφαιρέσουμε την ακμή e 22
$G - U$	Το γράφημα που προκύπτει αν από το γράφημα G αφαιρέσουμε το σύνολο κορυφών U 22
$G - E$	Το γράφημα που προκύπτει αν από το γράφημα G αφαιρέσουμε το σύνολο ακμών E 22
G/e	Το γράφημα που προκύπτει αν στο γράφημα G συνθλίψουμε την ακμή e 22
$I(H)$	Το γράφημα πρόσπτωσης του υπεργραφήματος H 29
$I_T^{\mathfrak{G}^{ex}}$	 109
K_n	Το πλήρες γράφημα με n κορυφές. 20
$K[S]$	Το πλήρες γράφημα με σύνολο κορυφών S 20
$K_{q,r}$	Το πλήρες διμερές γράφημα όπου τα μέρη του έχουν q και r κορυφές αντίστοιχα. 20
$K_{1,r}$	Το αστέρι με r φύλλα. 20
$L(G)$	Το γραμμικό γράφημα του γραφήματος G 21
$N_G(v)$	Η ανοικτή γειτονιά της κορυφής v στο γράφημα G 18
$N_G[v]$	Η κλειστή γειτονιά της κορυφής v στο γράφημα G 18
$N_G(U)$	Η ανοικτή γειτονιά του συνόλου κορυφών U στο γράφημα G 18
$N_G[U]$	Η κλειστή γειτονιά του συνόλου κορυφών U στο γράφημα G 18

$N_G^r[v]$	Η γειτονιά της κορυφής v στο γράφημα G σε απόσταση r19
$N_G^r[S]$	Η γειτονιά του συνόλου κορυφών S στο γράφημα G σε απόσταση r19
$\mathbf{obs}_{\leq m}(\mathcal{F})$	Το σύνολο παρεμπόδισης ελασσόνων της κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$44
$\mathbf{obs}_{\leq im}(\mathcal{F})$	Το σύνολο παρεμπόδισης εμβυθίσεων της κλάσης γραφημάτων $\mathcal{F}$44
$\mathcal{P}(S)$	Το δυναμοσύνολο του S 17
P_n	Το μονοπάτι μήκους n 19
$P[u, v]$	Το υπομονοπάτι του μονοπατιού P με άκρα τις κορυφές v και u 19
$P_j^{(h)}$	Οριζόντιο μονοπάτι ενός τοίχου. 33
$P_{k+1}^{(h)}$	Το νοτιότερο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k 34
$P_1^{(h)}$	Το βορειότερο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k 34
$\mathcal{P}_v$	Η οικογένεια των κάθετων μονοπατιών ενός τοίχου. 34
$P_i^{[v]}$	Κάθετο μονοπάτι ενός τοίχου. 34
$P_1^{[v]}$	Το δυτικότερο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k 34
$P_{k+1}^{[v]}$	Το ανατολικότερο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k 34
$P_u^{(v)}$	Το κάθετο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k που περιέχει την κορυφή u 34

$P_u^{(h)}$	Το οριζόντιο μονοπάτι ενός τοίχου ύψους k που περιέχει την κορυφή u 35
$P(H)$	Το πρωτογενές γράφημα του υπεργραφήματος H 217
para-NP	 186
$\text{scs}(G)$	Ο αριθμός σχεδιασμένων κύκλων στο γράφημα G 199
$\text{split}(c, H)$	Το σύνολο των υπεραχμών του υπεργραφήματος H που χωρίζονται από τον 2- χρωματισμό c 218
$\text{split}(H)$	Το μέγιστο πλήθος των υπεραχμών που χωρίζονται από έναν 2-χρωματισμό του υπεργραφήματος H 218
$\mathcal{T}_k$	Το σύνολο των άκυκλων παρεμποδίσεων για την κλάση γραφημάτων βάθους δέντρου το πολύ k 77
$\text{tr}_G(v)$	Η τροχία της ομάδας αυτομορφισμών του G που περιέχει την κορυφή v 83
$V(G)$	Το σύνολο κορυφών του γραφήματος G 17
$V_T^{\mathfrak{G}_{ex}}$	 109
$V(e)$	Οι κορυφές της υπεραχμής e 210
W_k	Ο τοίχος ύψους k 32
$W[1]$	 185
$W[2]$	 186
$\text{width}(\mathcal{C})$	Το πλάτος της κλάσης γραφημάτων $\mathcal{C}$ 110
$X^{\mathfrak{G}_{ex}}$	 109

χ_P		186
Γ_k	Η τριγωνοποιημένη σχάρα ύψους k	127
Γ_k^*		127
$\delta(G)$	Ο ελάχιστος βαθμός του γραφήματος G	18
$\Delta(G)$	Ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος G	18
$\zeta(G)$	Το μέγεθος μιας μέγιστης τομής του (υπερ)γραφήματος G	210
μ_H		211
$\nu_{\mathcal{H}}(G)$	Ο αριθμός συσκευασίας της οικογένειας γραφημάτων $\mathcal{H}$ στο γράφημα G	196
$\Pi_{k,l}$	Η (k, l) -πυραμίδα.	128
$\Sigma A^{\text{vsc}}(G)$		253
τ_{ex}		108
$\tau_{\mathcal{H}}(G)$	Ο αριθμός καλύμματος της οικογένειας γραφημάτων $\mathcal{H}$ στο γράφημα G	196
$\mathbf{TEPE}^i(G)$		253
$\mathbf{TEPE}^v(G)$		253
$\mathbf{TEPE}^{\text{mi}}(G)$		253
$\mathbf{TEPE}^{\text{mv}}(G)$		253
$\mathbf{TEPE}^{\text{isc}}(G)$		253

TEIE^{vsc} (G)		253
TEIE^{misc} (G)		253
TEIE^{mvsc} (G)		253

ακμή edge

παράλληλη parallel

προσπίπτουσα incident

ακμοάθροισμα edge-sum

ακμοδέσμωση edge-linkage

r -προσεγγιστική r -approximate

συνδέει links

συνιστώσα component

τάξη order

ακμοδιαχωριστής edge-cut

ελαχιστικός minimal

εσωτερικός internal

ακμοσυνεκτικότητα γραφήματος graph edge-connectivity

ακολουθία sequence

επαυξητική augmenting

αναγωγή reduction

ανίχνευση γραφημάτων graph searching

ανιχνευτής searcher

αντιαλυσίδα antichain

ανύψωση ακμών edge lift

αριθμός number

ανίχνευσης search

καλύμματος covering

r -κυριαρχίας r -dominating

κυριαρχίας κύκλων cycle dominating

r -σκέδασης r -scattering

σκεδασμένων κύκλων scattered cycle

συσκευασίας packing

χρωματικός chromatic

λίστας list

αστέρι star

άσυλο haven

TEΠΕ- LIFO-

αυτομορφισμός automorphism

ανελικτικός involutive

λ -διατηρητικός λ -preserving

βάθος ΔΑΓ DAG-depth

βάθος δέντρου tree-depth

βάση base

βάτος bramble

γειτονιά neighborhood

ανοικτή open

κλειστή closed

γινόμενο product

καρτεσιανό cartesian

λεξικογραφικό lexicographic

γραμμοπλάτος linear-width

γράφημα graph

ακμοσυνεκτικό edge-connected

απόγειο apex

2-ασύμμετρο 2-asymmetric

ασύμμετρο asymmetric

γραμμικό line

διατεταγμένο directed

ισχυρά συνεκτικό strongly connected

διμερές bipartite

πλήρες complete

H -ελεύθερο-ελάσσονος H -minor-free

Σ -εμβαπτίσιμο Σ -embeddable

Σ_0 -εμβαπτισμένο Σ_0 -embedded

ενεπίπεδο plane

επίπεδο planar

όψη face

κενό empty

πλήρες complete

πρόπτωσης incidence

πρωτογενές primal

συνεκτικό connected

h -σχεδόν εμβαπτίσιμο h -nearly embeddable

τριγωνοποιημένο triangulated

τριγωνοποίηση triangulation

υποκυβικό	subcubic
χορδικό	chordal
γραφήματα	graphs
ένωση	union
ισομορφικά	isomorphic
ξένα	disjoint
ως προς ακμές	edge-
ως προς κορυφές	vertex-
ξένη ένωση	disjoint union
ομο-ισοδύναμα	hom-equivalent
ομομορφικά	homomorphic
τομή	intersection
δακτύλιος	annulus
με ράγες	railed
δάσος	forest
δέντρο	tree
αποκόλλησης	detachment
διαγραφής	elimination
ελάχιστου ύψους	minimum height
τριαδικό	ternary
φύλλα	leaves
δεντρό-επέκταση	tree-dec expansion
δεντροαποσύνθεση	tree decomposition
κορμός	torso
κορυφή	node
βάσης	base
εισαγωγής	introduction
λήθης	forget

σύνδεσης	join
μικρή	small
πλάτος	width
τσάντα	bag
κλειστότητα	closure
δεντροπλάτος	tree-width
διατεταγμένο	directed
δέσμωση	linkage
ζωτική	vital
μοναδική	unique
r -προσεγγιστική	r -approximate
συνδέει	links
συνιστώσα	component
τάξη	order
διαβάθμιση κορυφών	vertex ranking
διάλυση	dissolution
διάταξη	ordering
μερική	partial
καλή	well-quasi-ordering
διαχωρισμός συνόλων	set splitting
άνω μέσου όρου	above average
διαχωριστής γραφήματος	graph separator
διαχωριστής υπεργραφήματος	cut-set
ισχυρός	strong
διαχωριστική τριάδα	separation triple
διγράφημα	digraph
ισχυρά συνεκτικό	strongly connected
διπυρήνας	bikernel

εμβάπτιση embedding

2-κελιών 2-cell

επιφάνεια surface

γένος **Eüler** Eüler genus

πολλαπλότητα manifold

όριο boundary

προσανατολισμένη orientable

γένος **Eüler** Eüler genus

συμπαγής compact

θεώρημα theorem

αποκλεισμένης σχάρας excluded grid

δομικό structure

ασθενές weak

ισχυρό strong

ελασσόνων γραφημάτων graph minor

μετα-αλγοριθμικό meta-algorithmic

τεσσάρων χρωμάτων four color

θεωρία theory

δισδιαστατότητας bidimensionality

ελασσόνων γραφημάτων graph minor

παραμετρικής πολυπλοκότητας parameterized complexity

θηλιά loop

ιδιότητα property

σταθερού σημείου fixed point

3-ΙΑΤ 3-SAT

ισομορφισμός isomorphism

κάλυμμα κορυφών vertex cover

κανόνας αναγωγής reduction rule

κανονική συζευκτική μορφή conjunctive normal form

καπάκι διασταυρώσεων cross-cap

καταφύγιο shelter

διατεταγμένο directed

πάχος thickness

πάχος thickness

κλαδοαποσύνθεση branch decomposition

πλάτος width

κλαδοπλάτος branch-width

κλάση γραφημάτων graph class

H -ελεύθερη-ελάσσονος H -minor-free

κάλυμμα covering

$M\Delta\Lambda$ -ορίσιμη MSO-definable

κάτα στρώσεις layer-wise

πλάτος width

συσκευασία packing

φραγμένης επέκτασης bounded expansion

κλίκα clique

κορυφές vertices

απόγειες apices

απόσταση distance

γειτονικές adjacent

κορυφή vertex

βαθμός degree

επικαλύπτουσα overlapping

κύκλος cycle

μήκος length

οψιακός facial

κύλινδρος cylinder

λογική logic

δευτεροβάθμια second-order

ατομικός τύπος atomic formula

μοναδική monadic

σύνταξη syntax

δομή structure

ερμηνεία interpretation

πλειομέλεια arity

πρωτοβάθμια first-order

σύνταξη syntax

σύμπαν universe

μέγιστη ΙΑΤ max sat

μέγιστη τομή max cut

μέρος διαμέρισης part of bipartition

μονοπάτι path

άκρα endpoints

μονοπάτια paths

καλώς-κατεταγμένα well-arranged

σύρροα confluent

ξένα μονοπάτια disjoint paths

οικογένεια family

κύκλων cycle

εμφωλευμένων nested

μονοπατιών paths

σύρροη confluent

ομομορφισμός homomorphism

OOI-ΙΑΤ NAE-SAT

παράγοντας spanner

πολλαπλασιαστικός multiplicative

συντελεστής έκτασης stretch factor

παραμετροποίηση parameterization

τυπική natural

παρεμπόδιση obstruction

περιεκτικότητα ελάσσονος minor containment

περιοδεία tour

περίπατος walk

πλακόστρωση tiling

κανονική regular

μονοεδρική monohedral

πλάτος ΔΑΓ DAG-width

πλάτος μονοπατιού path-width

γνήσιο proper

διατεταγμένο directed

πολυγράφημα multigraph

πολυσύνολο multiset

πρόβλημα problem

παραμετρικά βατό fixed parameter tractable

παραμετροποιημένο parameterized

πυραμίδα pyramid

πυρήνας kernel

γραμμικός linear

πολυωνυμικός polynomial

πυρηνοποίηση kernelization

ράγα rails

στρατηγική strategy

μη-μονότονη	non-monotone
μονότονη	monotone
σταθμευμένων ανιχνευτών	searcher stationary
στρόβιλος	vortex
συνεκτικότητα γραφήματος	graph connectivity
σύνθλιψη	contraction
ακμής	edge
στρωτή	smooth
συνιστώσα	component
συνεκτική	connected
σύνολο	set
αδερφών κορυφών	siblings
ακμών	edge
κορυφών	vertex
ανάδρασης	feedback
κυριαρχίας	dominating
παρεμπόδισης	obstruction
ελασσόνων	minor
εμβυθίσεων	immersion
σχάρα	grid
γωνία	corner
φορτωμένα	loaded
κορυφή	vertex
εξωτερική	external
εσωτερική	internal
σχεδιασμός	drawing
ορθογώνιος	orthogonal
κουτί	box

- συνδετική κορυφή joining vertex
- σχέση relation
 - ελάσσον minor
 - ελαχιστικό μοντέλο minimal model
 - εμβύθιση immersion
 - ισχυρή strong
 - σύνθλιψη contraction
 - μοντέλο model
 - τοπολογικό ελάσσον topological minor
 - απόστασης distance
 - υποδιαίρεση subdivision
- F -σχίσμα F -split
- ταίριασμα matching
 - κορεσμένο saturated
- τάξη κύκλου cycle rank
- τεχνική technique
 - μη-σχετικής irrelevant vertex
- τοίχος wall
 - γωνία corner
 - αντιδιαμετρικά ζεύγη antidiametrical pairs
 - ισόπεδος flat
 - κορυφή vertex
 - πρωταρχική original
 - σημαντική important
 - υποδιαίρεσης subdivision
 - μονοπάτια paths
 - ανατολικότερο eastern
 - βορειότερο northern

δυτικότερο	western
κάθετα	vertical
νοτιότερο	southern
οριζόντια	horizontal
περίμετρος	perimeter
περιφέρεια	compass
περιφερειακή διαίρεση	rural division
εσωτερικό πτερύγιο	internal flap
πτερύγιο	flap
στρώμα	layer
σφικτός	tight
τούβλο	brick
γειτονικά	neighboring
υποδιαιρεμένος	subdivided
υποδιαίρεση	subdivision
ύψος	height
τομή	cut
τροχιά	orbit
υπερακμή	hyperedge
χωρισμένη	split
υπεργράφημα	hypergraph
συνεκτικό	connected
ως προς διαμερίσεις	partition
υπερδέντρο	hypertree
υπογράφημα	subgraph
εναγόμενο	induced
παραγόμενο	spanning
υπόθεση	hypothesis

εκθετικού χρόνου	exponential time
φράγμα	bound
άνω	upper
υπερ-εκθετικό	super-exponential
φυγάς	fugitive
αόρατος	invisible
ορατός	visible
σοφός	omniscient
χορδή	chord
χρώμα	color
χρωματισμός	coloring
γραφήματος	graph
έγκυρος	proper
διατεταγμένος	ordered
ωμή βία	brute force

- ακμή
 προσπίπτουσα, 18
ακμοάθροισμα, 46
ακμοδέσμωση, 116
 r -προσεγγιστική, 116
 συνιστώσα, 116
 τάξη, 116
ακμοδιαχωριστής, 23
 ελαχιστικός, 23
 εσωτερικός, 23
ακμοσυνεκτικότητα γραφήματος, 23
αλγόριθμος
 υποεκθετικός, 191
FPT αναγωγή, 185
ανάπτυγμα Fourier, 219
 συντελεστές, 219
ανιχνευτής, 244
αντιαλυσίδα, 40
ανύψωση ακμών, 22
αποσύνθεση μονοπατιού, 26
 πλάτος, 26
αποτίμηση
 διαχωριστική, 236
αριθμός
 καλύμματος, 196
 r -κυριαρχίας, 198
κυριαρχίας κύκλων, 198
 r -σχέδασης, 198
 σχεδασμένων κύκλων, 199
 συσκευασίας, 196
isc-TEΠΕ-ανίχνευσης, 253
 μονότονης, 253

- i-TEΠΕ-ανίχνευσης, 253
 - μονότονης, 253
- vsc-TEΠΕ-ανίχνευσης, 253
 - μονότονης, 253
- v-TEΠΕ-ανίχνευσης, 253
 - μονότονης, 253
- χρωματικός, 21
- αστέρι, 20
- αυτομορφισμός, 71
 - ανελικτικός, 71
 - λ-διατηρητικός, 71
- βάθος δέντρου, 69
- γειτονιά
 - ανοικτή, 18
 - κλειστή, 18
 - σε απόσταση το πολύ r , 19
- γένος Euler γραφήματος, 29
- γινόμενο
 - καρτεσιανό, 21
 - λεξικογραφικό, 21
- γράφημα, 17
 - Gaifman, 217
 - k -αχμοσυνεκτικό, 23
 - α -απόγειο, 28
 - απόγειο, 28
 - ασύμμετρο, 83
 - 2-ασύμμετρο, 83
 - γραμμικό, 21
- διατεταγμένο, 18
 - ισχυρά συνεκτικό, 245
- διμερές, 20
 - πλήρες, 20
- H -ελεύθερο-ελάσσονος, 25
- Σ -εμβαπτισμο, 29
- Σ_0 -εμβαπτισμένο, 30
- ενεπίπεδο, 28
- εξωεπίπεδο, 165
- επίπεδο, 28
- κενό, 18
- πλήρες, 20
- πρόσπτωσης, 28
- πρωτογενές, 217
- k -συνεκτικό, 23
- συνεκτικό, 20
- σχεδόν εμβαπτισμο, 124
- τριγωνοποιημένο, 20
- τριγωνοποίηση, 20
- υποκυβικό, 18
- χορδικό, 20
- γραφήματα
 - ένωση, 20
 - ισομορφικά, 71
 - ξένα, 21
 - ως προς ακμές, 19
 - ως προς κορυφές, 19
 - ξένη ένωση, 21

- ομο-ισοδύναμα, 71
- ομομορφικά, 71
- τομή, 21
- δακτύλιος, 30
 - με ράγες, 49
- δάσος, 21
 - υπεργραφήματος, 217
- δέντρο, 20
 - αποκόλλησης, 165
 - φύλλα, 20
 - τριαδικό, 20
- δεντροαποσύνθεση, 26
 - καλή, 202
 - κορυφή βάσης, 202
 - κορυφή εισαγωγής, 202
 - κορυφή λήθης, 202
 - κορυφή σύνδεσης, 202
 - κορμός, 126
 - μικρή, 126
 - πλάτος, 26
 - τσάντα, 26
 - κλειστότητα, 125
- δεντροπλάτος, 26
- δεντρό-επέκταση, 108
- δέσμωση, 28
 - ζωτική, 28
 - μοναδική, 27
 - r -προσεγγιστική, 27
 - συνιστώσα, 27
 - τάξη, 27
- διάλυση κορυφής, 22
- διαβάθμιση κορυφών, 70
- διαχωριστής
 - γραφήματος, 23
 - υπεργραφήματος
 - ισχυρός, 217
- διαχωριστική τριάδα, 203
- ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΣΤΗΝΟΛΩΝ
 - ΑΝΩ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ, 215
 - ΜΕΓΙΣΤΟΣ, 210
- διγράφημα, 18
 - ισχυρά συνεκτικό, 245
- διδιαμέριση κορυφών, 209
- εικασία
 - Nash-Williams, 42
 - Vázsonyi, 42
 - Wagner, 42
- ελάχιστον γραφήματος, 24
 - τοπολογικό, 25
 - απόστασης, 187
- εμβάπτιση γραφήματος
 - επίπεδη, 28
 - 2-κελιών, 29
- εμβύθιση γραφήματος, 25
 - ισχυρή, 26
 - μοντέλο, 26

- ελαχιστικό, 26
- επιφάνεια, 29
- γένος Eüler, 29
- προσανατολισμένη
γένος Eüler, 29
- θεώρημα
- αποκλεισμένης σχάρας, 179
- για ελάσσονα, 155
- για εμβυθίσεις, 178
- για συνθλίψεις, 156
- για τοπ. ελάσσονα απόστασης,
189
- για τοπολογικά ελάσσονα, 157
- ασθενές δομικό, 121
- ελασσόνων γραφημάτων, 42
- ισχυρό δομικό, 126
- μετά-αλγοριθμικό, 66
- μοναδικής δέσμωσης, 105
- Kuratowski, 39
- ιδιότητα
- σταθερού σημείου, 71
- Erdős-Pósa, 197
- ισομορφισμός, 71
- k -ΚΑΛΥΜΜΑ ΚΟΡΥΦΩΝ, 182
- κανόνας αναγωγής, 205
- καταφύγιο, 264
- διατεταγμένο, 260
- πάχος, 260
- πάχος, 265
- κερήθρα, 157
- κλαδοαποσύνθεση, 49
- πλάτος, 50
- κλαδοπλάτος, 50
- κλάση γραφημάτων
- H -ελεύθερη-ελάσσονος, 25
- κάλυμμα, 196
- ΜΔΛ-ορίσιμη, 38
- κατά στρώσεις, 109
- πλάτος, 110
- συσκευασία, 196
- κορυφές
- απόσταση, 19
- γειτονικές, 18
- κορυφή
- βαθμός, 18
- δίσκος γύρω από, 30
- επικαλύπτουσα, 31
- σημαντική, 163
- κύκλος, 18
- μήκος, 19
- οφιαχός, 28
- κύλινδρος, 49
- λογική
- δευτεροβάθμια
- μοναδική, 36
- πρωτοβάθμια

- σύνταξη, 35
 ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΟΜΗ, 209
 μερική διάταξη, 41
 καλή, 41
 μέρος διαμέρισης, 20
 ΔΥ-μετασχηματισμός, 22
 μονοπάτι, 18
 άκρα, 19
 μήκος, 19
 μονοπάτια
 καλώς-κατεταγμένα, 19
 σύρροα, 31
 οικογένεια
 κύκλων
 εμφωλευμένη, 30
 μονοπατιών
 σύρροη, 31
 ομομορφισμός, 71
 ΟΟΙ-ΙΛΤ, 235
 ορθογώνιος σχεδιασμός, 164
 κουτί, 164
 συνδετική κορυφή, 164
 όψη επίπεδου γραφήματος, 28
 παράγοντας
 πολλαπλασιαστικός, 187
 συντελεστής έκτασης, 187
 παράμετρος
 δισδιάστατη
 ως προς ελάσσονα, 191
 ως προς συνθλίψεις, 191
 ως προς τοπολ. ελάσσονα από-
 στασης, 194
 ως προς τοπολογικά ελάσσονα,
 194
 παραμετροποίηση προβλήματος, 182
 τυπική, 183
 παρεμπόδιση
 ελασσόνων, 44
 εμβυθίσεων, 44
 περιοδεία, 28
 περίπατος, 19
 πλακόστρωση, 154
 κανονική, 155
 μονοεδρική, 155
 πλάτος μονοπατιού, 26
 πολυγράφημα, 18
 πολυσύνολο, 18
 πρόβλημα
 παραμετρικά βατό, 184
 παραμετροποιημένο, 183
 πυραμίδα, 128
 πυρήνας, 205
 γραμμικός, 205
 πολυωνυμικός, 205
 ράγες δακτυλίου, 49
 στρόβιλος, 125

- συνεκτικότητα γραφήματος, 23
- σύνθλιψη
 - ακμής, 22
 - γραφήματος, 24
 - μοντέλο κορυφής, 24
 - στρωτή, 132
- συνιστώσα
 - συνεκτική, 21
- σύνολο
 - αδερφών κορυφών, 93
 - ακμών, 17
 - ανάδρασης
 - κορυφών, 196
 - κορυφών, 17
 - κυριαρχίας, 36
 - παρεμπόδισης
 - ελασσόνων, 44
 - εμβυθίσεων, 44
- σχάρα, 31
 - γωνία, 31
 - κορυφή
 - εσωτερική, 32
 - εξωτερική, 32
 - τριγωνοποιημένη, 127
 - φορτωμένη γωνία, 127
- σχέση
 - ελάσσονος, 24
 - ελαχιστικό μοντέλο, 25
 - μοντέλο, 25
 - εμβύθισης, 25
 - σύνθλιψης, 24
 - στρωτή, 132
 - τοπολογικού ελάσσονος, 25
 - απόστασης, 187
 - υπογραφήματος, 24
 - εναγόμενου, 23
 - παραγόμενου, 24
 - υποδιαίρεσης, 25
- σχίσμα, 46
- ταίριασμα, 229
 - κορεσμένο, 229
- τάξη κύκλου, 249
- isc-TEΠΕ-ανίχνευση, 250, 251
 - k* ανιχνευτών, 252
 - isc-διάδοχος, 251
 - επιτυχής
 - για τον φυγά, 252
 - για τους ανιχνευτές, 252
 - isc-θέση, 251
 - μονότονη, 252
 - πλήρης, 252
 - σταθμευμένων ανιχνευτών, 252
 - isc-στρατηγική, 252
 - στρατηγική φυγά, 253
 - επιτυχής, 253
 - συνεπής, 253

i-TEΠΕ-ανίχνευση, 250, 251

k ανιχνευτών, 252

i-διάδοχος, 251

επιτυχής

για τον φυγά, 252

για τους ανιχνευτές, 252

i-θέση, 250

μονότονη, 252

πλήρης, 252

σταθμευμένων ανιχνευτών, 252

i-στρατηγική, 252

στρατηγική φυγά, 253

επιτυχής, 253

συνεπής, 253

vsc-TEΠΕ-ανίχνευση, 250, 251

k ανιχνευτών, 252

vsc-διάδοχος, 251

επιτυχής

για τον φυγά, 252

για τους ανιχνευτές, 252

vsc-θέση, 251

μονότονη, 252

πλήρης, 252

σταθμευμένων ανιχνευτών, 252

vsc-στρατηγική, 252

στρατηγική φυγά, 253

επιτυχής, 253

συνεπής, 253

v-TEΠΕ-ανίχνευση, 250, 251

k ανιχνευτών, 252

v-διάδοχος, 251

επιτυχής

για τον φυγά, 252

για τους ανιχνευτές, 252

v-θέση, 251

μονότονη, 252

πλήρης, 252

σταθμευμένων ανιχνευτών, 252

v-στρατηγική, 252

στρατηγική φυγά, 253

επιτυχής, 253

συνεπής, 253

TEΠΕ-άσυλο, 261

τάξη, 261

τοίχος, 32

γειτονικά τούβλα, 33

γωνίες, 32

αντιδιαμετρικά ζεύγη, 32

ισόπεδος, 128

κορυφές

πρωταρχικές, 33

υποδιαίρεσης, 32

μονοπάτι

ανατολικότερο, 34

βορειότερο, 34

δυτικότερο, 34

- κάθετο, 34
- νοτιότερο, 34
- οριζόντιο, 34
- περίμετρος, 33
- περιφέρεια, 35
- περιφερειακή διαίρεση, 129
 - εσωτερικό πτερύγιο, 130
 - πτερύγιο, 130
- στρώμα, 33
 - i*-οστό, 33
- σφικτός, 163
- τούβλο, 33
- υποδιαιρεμένος, 32
- ύψος, 32
- τομή γραφήματος, 209
 - μέγεθος, 209
- τροχιά ομάδας
 - αυτομορφισμών, 83
- υπερακμή, 210
 - χωρισμένη, 218
- r*-υπεργράφημα, 210
- υπεργράφημα, 18
 - επίπεδο, 28
 - συνεκτικό, 217
 - ως προς διαμερίσεις, 217
- υπερδέντρο, 218
- υπογράφημα, 24
 - εναγόμενο, 23
 - παραγόμενο, 24
- υποδιαίρεση γραφήματος, 25
- υπόθεση εκθετικού χρόνου, 207
- k*-υποσύνολο, 17
- φυγάς, 244
 - σοφός, 244
- χορδή, 20
- χρώμα, 21
- k*-ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ, 182
- χρωματισμός
 - γραφήματος, 21
 - έγκυρος, 21
 - υπεργραφήματος, 218
- ψευδό-συνάρτηση Boole, 219