Σημειώσεις
Θεωρίας Μέτρου

Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Αθηνων
Αθηνα, 2013

Πρώτη έκδοση, πιθανόν με τυπογραφικά λάθη. Εκκρεμούν σχήματα και περισσότερες ασκήσεις.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

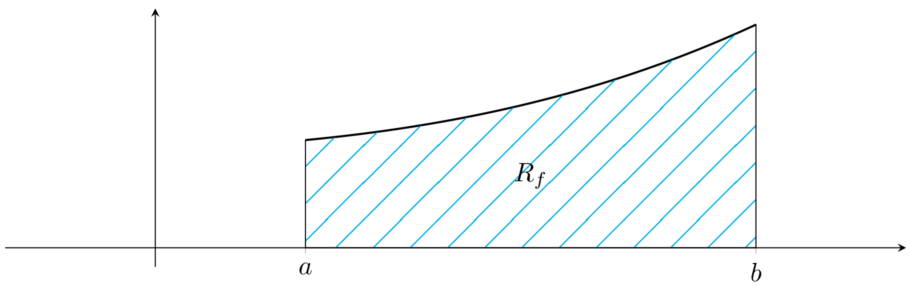
Η Θεωρία Μέτρου (και Ολοκλήρωσης) αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ου αιώνα και από τότε έχει γίνει κεντρικό εργαλείο για την Ανάλυση. Το κίνητρο για τη μελέτη αυτής της θεωρίας σήμερα είναι αρχικά η αντικατάσταση του ολοκληρώματος Riemann από το ολοκλήρωμα Lebesgue, το οποίο, όπως θα δούμε, αποτελεί μια πολύ γόνιμη γενίκευση του πρώτου.

Ας περιοριστούμε στο $\mathbb{R}$ για να έχουμε καλύτερη κατανόηση. Αν έχουμε μια μη αρνητική Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε το ολοκλήρωμα Riemann της f εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f, δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx = \text{εμβαδό}(R_f), \tag{1}$$

όπου

$$R_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ και } 0 \leq y \leq f(x)\big\}. \tag{2}$$



Σχήμα 1: Γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος

Η έννοια του ολοκληρώματος κατά τον Riemann προσεγγίζεται ως εξής:

1. Διαλέγουμε μια διαμέριση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης έστω

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

και σχηματίζουμε τις αντίστοιχες «άνω» και «κάτω» προσεγγίσεις του εμβαδού από ενώσεις ορθογωνίων, δηλαδή αν

$$m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \text{ και } M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

θεωρούμε τις ποσότητες

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \quad \text{και} \quad U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k).$$

2. Παρατηρούμε ότι όσο «εκλεπτύνουμε» τη διαμέριση P, οι ποσότητες $L(f,P)$ και $U(f,P)$ έρχονται όλο και πιο κοντά.
3. Αν, καθώς το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0, αυτές οι ποσότητες τείνουν να ταυτιστούν, λέμε την f Riemann ολοκληρώσιμη και την οριακή αυτή τιμή τη λέμε ολοκλήρωμα της f.

Η ιδέα του Lebesgue, βάσει της οποίας κατασκεύασε τη θεωρία που θα μελετήσουμε, ήταν η εξής:

Ξεκινάμε με μια διαμέριση του **πεδίου τιμών** της συνάρτησης. Δηλαδή, αν η f είναι φραγμένη[1] και $f([a,b])\subseteq[m,M]$, θεωρούμε μια διαμέριση

$$Q=\{m=y_0<y_1<y_2<...<y_t=M\}.$$

Τότε, τα αντίστοιχα «άνω» και «κάτω» αθροίσματα θα έπρεπε να έχουν τη μορφή:

$$\widetilde{L}(f,Q)=\sum_{k=0}^{t-1} y_k \ell(\{x\in[a,b]: y_k\le f(x)<y_{k+1}\})$$

και

$$\widetilde{U}(f,Q)=\sum_{k=1}^{t-1} y_{k+1} \ell(\{x\in[a,b]: y_k\le f(x)<y_{k+1}\}),$$

όπου $\ell(A)$ είναι το «μήκος» ενός συνόλου $A\subseteq\mathbb{R}$. Αν το A είναι διάστημα (ή έστω ένωση διαστημάτων) υπάρχει ένας μάλλον φυσιολογικός τρόπος να οριστεί το μήκος. Για τη γενική περίπτωση όμως, στην οποία το σύνολο A μπορεί να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο, είναι σαφές ότι χρειάζονται επιπλέον ιδέες.

Απ΄ ότι φαίνεται λοιπόν, για να αναπτυχθεί η θεωρία Ολοκλήρωσης του Lebesgue πρέπει πρώτα να θεμελιωθεί η έννοια του «μήκους» ή όπως θα λέμε, του μέτρου. Για να γίνει αυτό στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ λοιπόν, παρουσιάζεται το εξής:

Πρόβλημα. Υπάρχει μια συνάρτηση $\ell:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ ώστε για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$, το $\ell(I)$ να είναι το μήκος του (με τη συνήθη έννοια) και το οποίο να ικανοποιεί επιπλέον κάποιες «φυσιολογικές» ιδιότητες μήκους;

Η βασική ιδιότητα που θέλουμε να ικανοποιεί μια τέτοια συνάρτηση «μέτρου» είναι η *αριθμήσιμη προσθετικότητα*: αν A_n μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε

$$\ell\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ell(A_n). \tag{3}$$

Προχωρώντας στη θεωρία, θα δούμε ότι προκειμένου να έχουμε μια συνάρτηση ℓ που ικανοποιεί τα παραπάνω είμαστε αναγκασμένοι να κάνουμε κάποιες «εκπτώσεις» είτε στις ιδιότητες που αυτή θα πληροί είτε στα σύνολα που θα μπορούμε να μετρήσουμε.

Στην προσπάθεια να θεμελιώσουμε τις ιδέες του Lebesgue θα πετύχουμε τα εξής:

[1] Αυτός ο περιορισμός ξεπερνιέται πολύ εύκολα στη θεωρία.

1. Θα κατασκευάσουμε μια πολύ γενική θεωρία μέτρησης (και κατά συνέπεια ολοκλήρωσης), δηλαδή θα μπορούμε να εισάγουμε την έννοια του μέτρου (και του αντίστοιχου ολοκληρώματος) σε αυθαίρετα σύνολα. Ειδικότερα, παράλληλα με την έννοια του «μήκους» στο $\mathbb{R}$ θα μελετηθεί αυστηρά και η έννοια του «όγκου» στους χώρους $\mathbb{R}^k$.

2. Οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ που θα μπορούμε να ολοκληρώνουμε θα είναι μια *πολύ* ευρύτερη κλάση από αυτή των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

3. Το ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}$ θα μπορεί πλέον να οριστεί πάνω σε μια πολύ μεγάλη κλάση συνόλων, και όχι αναγκαστικά σε διαστήματα.

4. Θα διαπιστώσουμε ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue συμπεριφέρεται πολύ καλύτερα στις συγκλίσεις ακολουθιών συναρτήσεων από το ολοκλήρωμα Riemann.

Για να εξηγήσουμε αυτό το τελευταίο σημείο: Το ολοκλήρωμα Riemann είναι ιδιαίτερα «προβληματικό» στις συγκλίσεις ακολουθιών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν έχουμε μια ακολουθία Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση f ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$f_n(x) \to f(x), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b]$$

δε μπορούμε εν γένει να συμπεράνουμε ότι ισχύει και

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int f(x)dx.$$

Στην πραγματικότητα, είναι πιθανό η οριακή συνάρτηση f να μην είναι καν Riemann ολοκληρώσιμη.

Παράδειγμα. Έστω $\{q_n : n = 1, 2, ...\}$ μια αρίθμηση των ρητών του διαστήματος $[0, 1]$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n = \chi_{\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}} \quad \text{και}^2 \quad f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$$

Τότε παρατηρούμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο (γιατί;) και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει μόνο πεπερασμένες το πλήθος ασυνέχειες), ενώ η οριακή συνάρτηση f δεν είναι (αυτό μπορεί να ελεγχθεί με το Κριτήριο του Riemann, βλέπε Παράρτημα Α΄).

5. Τέλος, θα αποδείξουμε ότι πράγματι το ολοκλήρωμα Lebesgue αποτελεί μια γνήσια γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann: κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη και τότε τα δύο ολοκληρώματα ταυτίζονται.

Αυτές οι σημειώσεις είναι σχεδιασμένες ώστε να καλύπτουν τις ανάγκες ενός προπτυχιακού ή μεταπτυχιακού μαθήματος Θεωρίας Μέτρου. Τα πρώτα 6 κεφάλαια συνιστούν τη θεμελίωση της βασικής θεωρίας, δηλαδή των ιδεών του Lebesgue. Τα υπόλοιπα 5 κεφάλαια είναι ουσιαστικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και αφορούν πιο προχωρημένα σημεία της θεωρίας.

[2] Θυμίζουμε ότι για ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, θέτουμε $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$

Κεφάλαιο 1

σ-άλγεβρες

Όπως προϊδεάσαμε και στην Εισαγωγή, το σημείο από το οποίο πρέπει να αρχίσει η θεωρία είναι η θεμελίωση της έννοιας του «μέτρου». Πρωτού γίνει αυτό όμως, πρέπει να αποφασίσουμε ποιά ακριβώς είναι τα σύνολα που θέλουμε να μετρήσουμε. Οι ιδιότητες που πρέπει να έχει μια τέτοια οικογένεια συνόλων περιέχονται στον ορισμό της σ-άλγεβρας που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

1.1 Άλγεβρες και σ-άλγεβρες

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ καλείται *άλγεβρα* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα, δηλαδή αν για ένα σύνολο ισχύει $A \in \mathcal{A}$, τότε και $A^c \equiv X \setminus A \in \mathcal{A}$ και

(iii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ τότε είναι και $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις 1.1.2. (α′) Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις συνολοθεωρητικές διαφορές και τις πεπερασμένες ενώσεις, δηλαδή:

(iv) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε είναι και $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

(v) Αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ τότε είναι και $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Για το (iv) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $B^c \in \mathcal{A}$ από το (ii) και

$$A \setminus B = A \cap B^c. \tag{1.1}$$

Το συμπέρασμα έπεται από το (iii). Για το (v) παρατηρούμε πάλι ότι $A_j^c \in \mathcal{A}$ για όλα τα j και επιπλέον

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \left(\bigcap_{j=1}^n A_j^c\right)^c \tag{1.2}$$

από τους νόμους De Morgan. $\square$

(β′) Η ιδιότητα (i) του ορισμού 1.1.1 μπορεί να αντικατασταθει με μία από τις $\emptyset \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

(γ′) Η ιδιότητα (iii) του ορισμού 1.1.1 μπορεί να αντικατασταθεί από την (v).

Θα φανεί πολύ σύντομα όμως ότι η έννοια της άλγεβρας δεν είναι «αρκετή» για να αναπτυχθεί επιτυχώς η θεωρία. Είναι ουσιώδες να μπορούμε να «μετρήσουμε» περισσότερα σύνολα. Έτσι, οδηγούμαστε στον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.1.3. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ καλείται *σ-άλγεβρα* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα, δηλαδή αν για ένα σύνολο ισχύει $A \in \mathcal{A}$, τότε και $A^c \equiv X \setminus A \in \mathcal{A}$ και

(iii) η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές, δηλαδή αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, ...$ τότε είναι και $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Παρατηρήσεις 1.1.4. (α′) Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, θέτουμε $A_j = X \in \mathcal{A}$, για $j \geq n + 1$ και έχουμε

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

□

(β′) Παρόμοια με τα (β′) και (γ′) των Παρατηρήσεων 1.1.2 έχουμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα αν και μόνον αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες τομές ή ενώσεις.

Παραδείγματα 1.1.5. (α′) Έστω X ένα σύνολο. Τότε οι $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$ και $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρες στο X. Αν $\mathcal{A}$ μια άλλη σ-άλγεβρα στο X είναι φυσικά

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_2. \tag{1.3}$$

(β′) Έστω $X = \mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών και

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \text{ το } A \text{ ή το } A^c \text{ είναι πεπερασμένο}\} \tag{1.4}$$

Η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{N}$, αλλά όχι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$ και ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα (από τη συμμετρία του ορισμού της). Αν τώρα $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν όλα τα A_j είναι άπειρα, τότε όλα τα A_j^c είναι πεπερασμένα, άρα και η ένωσή τους

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j^c = \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)^c$$

είναι πεπερασμένη. Συνεπώς $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Αν κάποιο A_{j_0} είναι πεπερασμένο, το ίδιο ισχύει και για την τομή $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$, αφού φυσικά $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq A_{j_0}$.

Άρα, πράγματι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Δεν είναι όμως σ-άλγεβρα, αφού για τα σύνολα $A_n = \{2n\}$, $n = 1, 2, \dots$ είναι φυσικά $A_n \in \mathcal{A}$ (αφού είναι πεπερασμένα), αλλά εύκολα ελέγχεται ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \notin \mathcal{A}$. □

(γ΄) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $X = \mathbb{R}$ η οικογένεια $\mathcal{A}$ που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι άλγεβρα αλλά όχι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, είναι άμεσο ότι $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Επιπλέον, αν I_1 και I_2 δύο διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και η τομή τους $I_1 \cap I_2$ είναι διάστημα. Έτσι, αν $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ και $B = \bigcup_{j=1}^{n} J_j$ δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ είναι και

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (I_i \cap J_j) \in \mathcal{A}.$$

Συνεπώς, με μια απλή επαγωγή, η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.

Αν τώρα I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ το συμπλήρωμά του I^c είναι είτε διάστημα είτε ένωση δύο διαστημάτων του $\mathbb{R}$ και άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν τώρα $A = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ ένα στοιχείο της $\mathcal{A}$ είναι

$$A^c = \bigcap_{j=1}^{n} I_j^c \in \mathcal{A},$$

από τα παραπάνω. Άρα η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα. Δεν είναι όμως σ-άλγεβρα, αφού για κάθε n το $I_n = (2n, 2n+1)$ είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ ενώ η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$ (γιατί;). □

Έστω $\{A_n\}$ μια ακολουθία υποσυνόλων ενός συνόλου X. Η $\{A_n\}$ θα λέγεται *αύξουσα* αν $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n και *φθίνουσα* αν $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Με αυτή την ορολογία δίνουμε ένα βολικό χαρακτηρισμό των αλγεβρών που είναι επιπλέον και σ-άλγεβρες:

Πρόταση 1.1.6. *Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X αν (και μόνον αν) ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:*

(i) Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iii) Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο συνόλων της $\mathcal{A}$ ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, άρα αρκεί να δειχθεί ότι είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις ή τομές. Έστω (B_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.
Έστω ότι ισχύει η (i). Θέτουμε $A_n = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, είναι $A_n \in \mathcal{A}$ και επιπλέον $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Άρα και για την ένωση ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ από την υπόθεση. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}. \tag{1.5}$$

Αν ισχύει η (ii) θέτουμε $A_n = \bigcap_{j=1}^{n} B_j$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, είναι $A_n \in \mathcal{A}$ και επίσης $A_n \supseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Άρα και για την τομή ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}. \tag{1.6}$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (iii). Σε αυτή την περίπτωση, θέτουμε

$$A_n = B_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j \tag{1.7}$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n και ότι τα A_n είναι ξένα ανά δύο. Άρα, από τη υπόθεση ισχύει $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Εύκολα βλέπουμε όμως ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}. \tag{1.8}$$

□

Πρόταση 1.1.7. *Αν $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X που περιέχει την $\mathcal{F}$, δηλαδή αν $\mathcal{A}'$ μια άλλη σ-άλγεβρα με $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}'$ τότε είναι και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.*

Απόδειξη. Αρχικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αν $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ μια μη κενή οικογένεια από σ-άλγεβρες του X, τότε και η $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X (άσκηση). Θεωρούμε τώρα την οικογένεια σ-αλγεβρών

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{A} : \sigma\text{-αλγεβρα και } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}. \tag{1.9}$$

Φυσικά $\mathcal{C} \neq \emptyset$ (αφού $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C}$) και άρα από την παραπάνω παρατήρηση η οικογένεια (υποσυνόλων του X)

$$\mathcal{A} = \bigcap \mathcal{C} = \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathcal{C}\} \tag{1.10}$$

είναι μια σ-άλγεβρα στο X. Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και μάλιστα ότι η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη με αυτή την ιδιότητα. □

Ορισμός 1.1.8. Η (μοναδική) σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που προσδιορίζεται από την παραπάνω πρόταση λέγεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{F})$.

Δίνουμε τώρα το βασικότερο παράδειγμα σ-άλγεβρας που είναι άλλωστε αυτό που οδηγεί στη θεμελίωση του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους.

Ορισμός 1.1.9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος[1] και $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X. Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας που παράγει η $\mathcal{T}$ καλούνται *Borel* υποσύνολα του X. Η οικογένεια όλων των Borel υποσυνόλων του X συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X)$.

[1] Όλες οι ιδιότητες των συνόλων Borel που θα μελετήσουμε δουλεύουν και στο γενικότερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων.

Θυμίζουμε τους εξής ορισμούς:

Ένα $A \subseteq X$ λέγεται G_δ σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν G_n ανοικτά, $n = 1, 2, ...$ ώστε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$.

Ένα $B \subseteq X$ λέγεται F_σ σύνολο αν γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών του X, δηλαδή αν υπάρχουν F_n κλειστά, $n = 1, 2, ...$ ώστε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Προφανώς όλα τα G_δ σύνολα και τα F_σ σύνολα είναι και σύνολα Borel. Έτσι, η κλάση $\mathcal{B}(X)$ φαίνεται να περιέχει όλα τα «καλά» τοπολογικά σύνολα.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και επίσης οι οικογένειες:*

$$\Delta_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Delta_2 = \{(a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$\Delta_3 = \{(a, b) : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3). \tag{1.11}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{F}) \supseteq \sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και μετά, άμεσα, ισχύουν και οι ζητούμενες. Αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{F}$ είναι και $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Επιπλέον, κάθε σύνολο της Δ_1 είναι κλειστό, δηλαδή $\Delta_1 \subseteq \mathcal{F}$ και έτσι είναι και $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \sigma(\Delta_1)$.

Αν τώρα $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, είναι

$$(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a] \in \sigma(\Delta_1), \tag{1.12}$$

δηλαδή $\Delta_2 \subseteq \sigma(\Delta_1)$ και συνεπώς είναι και $\sigma(\Delta_1) \supseteq \sigma(\Delta_2)$. Έπειτα, αν $(a, b) \in \Delta_3$, γράφουμε

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}] \in \sigma(\Delta_2) \tag{1.13}$$

και παίρνουμε τον εγκλεισμό $\Delta_3 \subseteq \sigma(\Delta_2)$ άρα και τον $\sigma(\Delta_2) \supseteq \sigma(\Delta_3)$.

Για την απόδειξη του τελευταίου εγκλεισμού, θυμόμαστε ότι κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων [2] και έτσι, αν $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι $\mathcal{T} \subseteq \sigma(\Delta_3)$ και συνεπώς

$$\sigma(\Delta_3) \supseteq \sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπως θέλαμε. □

Χρησιμοποιώντας τις ίδιες ιδέες μπορεί να δείξει κανείς την εξής γενικότερη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση:

[2] βλέπε Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης, Π. Βαλέττας

Πρόταση 1.1.11. *Έστω $\mathcal{F}_k$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ και επίσης οι οικογένειες:*

$$\Delta_1 = \left\{ \prod_{j=1}^{k} (-\infty, b_j] : b_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., k \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ \prod_{j=1}^{k} (a_j, b_j] : a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., k \right\},$$

$$\Delta_3 = \left\{ \prod_{j=1}^{k} (a_j, b_j) : a_j < b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., k \right\}.$$

Τότε

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \sigma(\mathcal{F}_k) = \sigma(\Delta_1) = \sigma(\Delta_2) = \sigma(\Delta_3). \tag{1.14}$$

□

1.2 Κλάσεις Dynkin

Ορισμός 1.2.1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{D}$ καλείται *κλάση Dynkin* αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) αν $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \subseteq B$, τότε είναι και $B \setminus A \in \mathcal{D}$ και

(iii) η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$, τότε είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$.

Παρατηρήσεις 1.2.2. (α′) Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin.

(β′) Από το (i) της Πρόταση 1.1.6 προκύπτει εύκολα ότι αν $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin κλειστή στις πεπερασμένες τομές (ή ενώσεις) τότε η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα.

(γ′) Το αντίστροφο του (α) δεν ισχύει γενικά. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και A, B δυο μη κενά, γνήσια υποσύνολα του X για τα οποία ισχύουν

$$A \setminus B \neq \emptyset, \quad B \setminus A \neq \emptyset, \quad A \cap B \neq \emptyset.$$

Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, X, A, B, A^c, B^c\}$$

είναι μια κλάση Dynkin στο X αλλά δεν είναι ούτε καν άλγεβρα, αφού $A, B \in \mathcal{D}$ αλλά $A \cap B \notin \mathcal{D}$.

(δ′) Όμοια με την Πρόταση 1.1.7, παρατηρούμε ότι η τομή μιας μη κενής οικογένειας κλάσεων Dynkin είναι κι αυτή μια κλάση Dynkin και έτσι, για μια οικογένεια $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin $\mathcal{D}$ που περιέχει την Δ.

Ορισμός 1.2.3. Η (μοναδική) κλάση Dynkin $\mathcal{D}$ που προσδιορίζεται από την παραπάνω παρατήρηση λέγεται η κλάση Dynkin που παράγεται από την οικογένεια Δ και συμβολίζεται με $\delta(\Delta)$.

Προφανώς, για μια οικογένεια $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι

$$\delta(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta), \tag{1.15}$$

αφού η $\sigma(\Delta)$ είναι σ-άλγεβρα, άρα και κλάση Dynkin. Το επόμενο βασικό θεώρημα δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε*

$$\delta(\Delta) = \sigma(\Delta). \tag{1.16}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι αν η $\delta(\Delta)$ ήταν σ-άλγεβρα, τότε θα είχαμε $\sigma(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$ και άρα την επιθυμητή ισότητα. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(\Delta)$ είναι μια σ-άλγεβρα ή ισοδύναμα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1.2 (β), ότι η $\delta(\Delta)$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Δηλαδή, πρέπει

$$A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } A \in \delta(\Delta) \text{ και για κάθε } B \in \delta(\Delta). \tag{1.17}$$

Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\widetilde{\delta(\Delta)} = \{A \subseteq X : \quad A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } B \in \delta(\Delta)\}. \tag{1.18}$$

Παρατηρήστε ότι πρέπει να δείξουμε τον εγκλεισμό

$$\delta(\Delta) \subseteq \widetilde{\delta(\Delta)}.$$

Για να δειχθεί αυτό είναι σαφές ότι αρκεί να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

1. Ισχύει ο εγκλεισμός $\Delta \subseteq \widetilde{\delta(\Delta)}$ και επιπλέον
2. η οικογένεια $\widetilde{\delta(\Delta)}$ είναι κλάση Dynkin.

Τώρα που είδαμε το σχέδιο της απόδειξης μπορούμε να μπούμε στις λεπτομέρειες. Γενικότερα, για μια οικογένεια $P \subseteq \delta(\Delta)$ θέτουμε

$$\widetilde{P} = \{A \subseteq X : \quad A \cap B \in \delta(\Delta), \text{ για κάθε } B \in P\}. \tag{1.19}$$

Ισχυρισμός: Η $\widetilde{P}$ είναι κλάση Dynkin.
Οι ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin επαληθεύονται ως εξής:

(i) Για $B \in P$, είναι $X \cap B = B \in P \subseteq \delta(\Delta)$ και άρα $X \in \widetilde{P}$.

(ii) Έστω $A_1, A_2 \in \widetilde{P}$ με $A_2 \subseteq A_1$. Τότε, για $B \in P$, είναι

$$(A_2 \setminus A_1) \cap B = (A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \delta(\Delta),$$

αφού $A_2 \cap B, A_1 \cap B \in \delta(\Delta)$ και $A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B$. Άρα $A_2 \setminus A_1 \in \widetilde{P}$.

(iii) Έστω (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\widetilde{P}$. Τότε, για $B \in P$, είναι

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \in \delta(\Delta),$$

αφού η ακολουθία $(A_n \cap B)$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\delta(\Delta)$. Έτσι, πράγματι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \widetilde{P}$.

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για $P = \delta(\Delta)$ αποδείχθηκε το 2. Για το 1 τώρα, παρατηρούμε ότι αφού η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές ισχύει ο εγκλεισμός $\Delta \subseteq \widetilde{\Delta}$. Όμως η $\widetilde{\Delta}$ είναι κλάση Dynkin, άρα ισχύει επιπλέον

$$\delta(\Delta) \subseteq \widetilde{\Delta}.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $A \in \delta(\Delta)$ και $B \in \Delta$ ισχύει $A \cap B \in \delta(\Delta)$ το οποίο ισοδυναμεί με τον εγκλεισμό

$$\Delta \subseteq \widetilde{\delta(\Delta)}$$

που είναι ακριβώς το 1. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Παρατήρηση 1.2.5. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, η Πρόταση 1.1.11 αναδιατυπώνεται γράφοντας

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) = \delta(\mathcal{F}_k) = \delta(\Delta_1) = \delta(\Delta_2) = \delta(\Delta_3).$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι οι οικογένειες $\mathcal{F}_k$, Δ_1, $\Delta_2 \cup \{\emptyset\}$, $\Delta_3 \cup \{\emptyset\}$ είναι κλειστές στις πεπερασμένες τομές. □

1.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

1. Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X και $C \subseteq X$. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο C.

2. Έστω X, Y δύο σύνολα, $f : X \to Y$ και $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο Y. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) στο X.

3. Έστω X ένα σύνολο και

$$\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Να περιγράψετε την $\sigma(\mathcal{C})$.

4. Έστω X ένα σύνολο και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\} \tag{1.20}$$

και

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{ το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}. \tag{1.21}$$

(α) Να δείξετε ότι

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{1.22}$$

(β) Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ενώ αν είναι φθίνουσα

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Ομάδα Β′.

5. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι υπάρχει η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει τη $\mathcal{F}$. Αυτή λέγεται η *άλγεβρα που παράγει η* $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

6. Έστω η οικογένεια

$$\overline{\mathcal{I}} = \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\overline{\mathcal{I}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

7. Έστω η οικογένεια

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

8. Έστω $X = \{x_1, x_2, ...\}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ-άλγεβρες στο X.

9. Έστω X, Y μετρικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

10. Έστω X μετρικός χώρος και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in X : \text{ υπάρχει το } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X.

11. Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται *δακτύλιος* αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις και τις συμμετρικές διαφορές. Αν επιπλέον η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, θα λέγεται σ-δακτύλιος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Οι δακτύλιοι (αντίστ. οι σ-δακτύλιοι) είναι κλειστοί στις πεπερασμένες (αντίστ. αριθμήσιμες) τομές.

(β) Ένας δακτύλιος (αντίστ. σ-δακτύλιος) $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστ. σ-άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.

(γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R}$ ή $E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R}$ για κάθε $F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

12. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ αριθμήσιμη ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ υπάρχει } \mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F} \text{ αριθμήσιμη με } A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\}$$

και αποδείξτε ότι είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Γιατί έπεται το ζητούμενο;)

13. Αν X ένα σύνολο, μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{C}$ ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, αποδείξτε το ίδιο για την $\mathcal{B}(X)$, όπου (X, d) τυχαίος διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Ομάδα Γ′.

14. Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή στις αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή στις φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X, συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει τη Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

(α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.

(β) Αν Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Βρείτε μια μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.

(δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

15. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ μια αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του X. Να δειχθεί ότι και η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (βλ. άσκηση 5) είναι αριθμήσιμη.

16. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X με άπειρα στοιχεία. Να δείξετε ότι:

(α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Έχοντας αναπτύξει τη βασική θεωρία για τις σ-άλγεβρες, μπορούμε τώρα να ορίσουμε το βασικό αντικείμενο αυτών των σημειώσεων, δηλαδή την έννοια του μέτρου. Ένα μέτρο θα αποδίδει σε κάθε σύνολο μιας σ-άλγεβρας έναν μη αρνητικό αριθμό, το «μήκος» του. Οι φυσιολογικές απαιτήσεις που θα είχε κανείς αρχικά είναι οι εξής:

1. Το κενό σύνολο $\emptyset$ να έχει φυσικά «μήκος» μηδέν και
2. αν $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια από *ξένα ανά δύο* στοιχεία, (οπού προς το παρόν δεν προσδιορίζουμε τι πρέπει να ισχύει για το σύνολο δεικτών I), τότε το «μήκος» της ένωσης τους να ισούται με το άθροισμα όλων των «μηκών».

Ο ίδιος ο ορισμός της σ-άλγεβρας «επιβάλλει» το σύνολο δεικτών I στο 2 να είναι το πολύ αριθμήσιμο, ώστε να εξασφαλίζεται ότι αν $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in I$, τότε είναι και $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$. Αυτό μπορείτε να το δείτε και ως εξής:
Ένα «φυσιολογικό» μέτρο στο $\mathbb{R}$ θα απέδιδε σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ το μήκος του $b - a$. Έτσι, κάθε μονοσύνολο θα είχε μήκος μηδέν. Αν το I στο 2 παραπάνω μπορούσε να είναι υπεραριθμήσιμο, γράφοντας

$$A = \bigcup_{x\in A} \{x\}$$

θα είχαμε ότι κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει μηδενικό μήκος και άρα ο ορισμός θα ήταν κενός νοήματος.

2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 2.1.1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται *μέτρο* αν:

(i) Ισχύει $\mu(\emptyset) = 0$ και

(ii) το μ είναι *αριθμήσιμα προσθετικό* (ή σ-προσθετικό), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{2.1}$$

Από την τελευταία ιδιότητα, ένα τέτοιο μέτρο πολλές φορές αναφέρεται και ως *αριθμήσιμα προσθετικό* (ή σ-προσθετικό) μέτρο.

Επίσης, το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται *μετρήσιμος χώρος*, η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *χώρος μέτρου* και λέμε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ ή απλά στο X. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται και $\mathcal{A}$-μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός 2.1.2. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται *πεπερασμένα προσθετικό μέτρο* αν:

(i) Ισχύει $\mu(\emptyset) = 0$ και

(ii) το μ είναι *πεπερασμένα προσθετικό*, δηλαδή αν $(A_j)_{j=1}^{n}$ μια πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε είναι

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j). \tag{2.2}$$

Είναι σαφές ότι κάθε μέτρο είναι και πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Παραδείγματα 2.1.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.

(α′) Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{αν το } A \text{ έχει } n \text{ το πλήθος στοιχεία} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{2.3}$$

Το μ είναι μέτρο:

Απόδειξη. Προφανώς $\mu(\emptyset) = 0$ και για να επαληθεύσουμε τη (ii), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $A_n \neq \emptyset$, για άπειρα το πλήθος n τότε καταλήγουμε στη σχέση $\infty = \infty$ ενώ στην αντίθετη περίπτωση έχουμε μια πεπερασμένη ξένη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Οπότε και πάλι ισχύει το ζητούμενο. □

Το μέτρο μ λέγεται *αριθμητικό μέτρο.*

(β′) Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\nu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{2.4}$$

Το ν είναι επίσης μέτρο:

Απόδειξη. Είναι $\nu(\emptyset) = 0$ και για την (ii), παρατηρούμε ότι αν ισχύει $A_n = \emptyset$ για κάθε n, τότε καταλήγουμε σε ταυτολογία της μορφής $0 = 0$ ενώ αν για κάποιο n είναι $A_n \neq \emptyset$ τότε καταλήγουμε στην $\infty = \infty$.

□

(γ′) Για $x \in X$ και $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases} \tag{2.5}$$

Το δ_x είναι μέτρο (άσκηση) και λέγεται *μέτρο Dirac στο x.*

Αν μ, ν δύο μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $\mu+\nu$ και $a \cdot \mu$, όπου $a \in \mathbb{R}$ με $a \geq 0$, όπου ορίζονται από τις σχέσεις

$$(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad (a \cdot \mu)(A) = a \cdot \mu(A), \quad A \in \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι $\nu(A) < \infty$ και $\nu(A) \leq \mu(A)$, τότε και το $\mu - \nu$ είναι μέτρο.

Εκτός από αυτές τις απλές πράξεις, υπάρχει και ο εξής τρόπος να κατασκευάζουμε καινούργια μέτρα από παλιά:
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $C \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε τότε τη συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ θέτοντας

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \text{ για } A \in \mathcal{A} \tag{2.7}$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι το μ_C είναι μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Το μ_C λέγεται ο *περιορισμός* του μ στο C. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.*

(i) Το μ είναι μονότονο, δηλαδή αν για $A, B \in \mathcal{A}$ ισχύει $A \subseteq B$, τότε είναι και $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

και παρατηρούμε ότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα μεταξύ τους. Έτσι, από την προσθετικότητα του μ είναι

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Άρα, πράγματι $\mu(B) \geq \mu(A)$ και αν επιπλέον $\mu(A) < \infty$ είναι

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A). \tag{2.8}$$

□

Παρατηρήστε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο.

Παρατήρηση 2.1.5. Το (ii) της παραπάνω πρότασης δεν έχει νόημα αν $\mu(A) = \infty$. Τότε θα είναι και $\mu(B) = \infty$ από το (i) ενώ το $\mu(B \setminus A)$ μπορεί να είναι πεπερασμένος αριθμός ή το άπειρο:
Για παράδειγμα, θεωρήστε μ το αριθμητικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και τα σύνολα $A = \{2n : n = 1, 2, ...\}$ και $A_m = \{m, m+1, ...\}$. Τότε $A, A_m \subseteq A_1 = \mathbb{N}$ και είναι

$$\mu(A_1 \setminus A) = \infty, \quad \mu(A_1 \setminus A_m) = m - 1, \quad m = 1, 2, ...$$

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ είναι αριθμήσιμα υποπροσθετικό (ή σ-υποπροσθετικό), δηλαδή αν (A_n) τυχούσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{2.9}$$

Απόδειξη. Μιμούμαστέ κάπως την απόδειξη της Πρότασης 1.1.6. Θέτουμε

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.10}$$

Τότε κάθε $B_n \in \mathcal{A}$, τα B_n είναι ξένα ανά δύο, ισχύει $B_n \subseteq A_n$ και μάλιστα

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Συνεπώς:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

λόγω της αριθμήσιμης προσθετικότητας του μ και της μονοτονίας. □

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Το μέτρο μ είναι «συνεχές» με τις εξής δύο έννοιες:*

(i) Αν (A_n) αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.11}$$

(ii) Αν A_n φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και επιπλέον $\mu(A_1) < \infty$, τότε είναι

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{2.12}$$

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τα σύνολα

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n = 1, 2, ... \tag{2.13}$$

(όπου έχουμε θέσει $A_0 = \emptyset$) τα οποία είναι ξένα ανά δύο και παρατηρούμε ότι για κάθε n είναι

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} B_j.$$

Συνεπώς:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) =$$

$$\lim_n \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

(ii) Θεωρούμε τα σύνολα

$$C_n = A_1 \setminus A_n \text{ για } n = 1, 2, .. \tag{2.14}$$

Τότε, η (C_n) είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$ με

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Από το (i), έπεται τώρα ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_n \mu(C_n)$, δηλαδή

$$\mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_1 \setminus A_n).$$

Έτσι, από την Πρόταση 2.1.4 (ii) έχουμε

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n)$$

και άρα και το ζητούμενο αφού $\mu(A_1) < \infty$.

$\square$

Η υπόθεση $\mu(A_1) < \infty$ στο (ii) της παραπάνω πρότασης είναι απαραίτητη:
Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε μ το αριθμητικό μέτρο στο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ και τη φθίνουσα ακολουθία $(A_m)_{m\geq 1}$ με $A_m = \{m, m+1, ...\}$ είναι $\mu(A_m) = \infty$ για κάθε m, ενώ $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \mu(\emptyset) = 0$.

Μάλιστα, οι ιδιότητες της Πρότασης 2.1.7 χαράκτηρίζουν εκείνα τα πεπερασμένα προσθετικά μέτρα που είναι και αριθμήσιμα προσθετικά, σύμφωνα με την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.1.8. *Έστω μ ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Το μ είναι μέτρο αν (και μόνον αν) ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) Για κάθε αύξουσα ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathcal{A}$ ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n). \tag{2.15}$$

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ ισχύει

$$\lim_n \mu(A_n) = 0. \tag{2.16}$$

Απόδειξη. Το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο και άρα μένει να δειχθεί μόνο η αριθμήσιμη προσθετικότητα. Θεωρούμε λοιπόν ακολουθία (B_n) ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$.
Έστω ότι ισχύει το (i). Θέτουμε τότε

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \tag{2.17}$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n, η (A_n) είναι αύξουσα και επιπλέον

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Έτσι, είναι:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) =$$

$$\lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n),$$

λόγω της ιδιότητας (i) για τα A_n και της πεπερασμένης προσθετικότητας του μ για τα B_n.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει το (ii). Θέτουμε τότε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \tag{2.18}$$

και παρατηρούμε ότι $A_n \in \mathcal{A}$ για κάθε n, η (A_n) είναι φθίνουσα και επιπλέον

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

(επειδή τα B_k είναι ξένα, κανένα $x \in X$ δε μπορεί να ανήκει σε άπειρα από αυτά). Για κάθε n όμως, είναι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{n-1} \cup A_n$$

και από την πεπερασμένη προσθετικότητα του μ παίρνουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) + \mu(A_n).$$

Στέλνοντας το n στο άπειρο, παίρνουμε λοιπόν

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

αφού από το (ii) έχουμε $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

□

Κλείνουμε αυτή την ενότητα, με τον ορισμό της κλάσης εκείνων των μέτρων που θα μας είναι πιο χρήσιμες στα επόμενα.

Ορισμός 2.1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μέτρο μ λέγεται:

(i) *πεπερασμένο* αν $\mu(X) < \infty$,

(ii) *μέτρο πιθανότητας* αν $\mu(X) = 1$ και

(iii) *σ-πεπερασμένο* αν υπάρχει ακολουθία (A_n) στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Αντίστοιχα, λέμε ότι ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πεπερασμένος, χώρος πιθανότητας ή χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Παρατηρήσεις 2.1.10. (α′) Αν το μ είναι πεπερασμένο, τότε έχουμε $\mu(A) < \infty$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, από τη μονοτονία του μέτρου.

(β′) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, για κάθε $C \in \mathcal{A}$ μπορούμε να γράψουμε

$$C = X \cap C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap C), \tag{2.19}$$

με $\mu(A_n \cap C) \leq \mu(A_n) < \infty$.

(γ′) Τα σύνολα A_n στον ορισμό του σ-πεπερασμένου μέτρου μπορούν να επιλεγούν και ξένα, θέτοντας $B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$ (όπως έχουμε ξανακάνει).

(δ′) Προφανώς ισχύουν οι συνεπαγωγές

$$\text{μέτρο πιθανότητας} \Rightarrow \text{ πεπερασμένο μέτρο } \Rightarrow \text{ σ-πεπερασμένο μέτρο},$$

αλλά καμία από αυτές δεν αντιστρέφεται:

Το διπλάσιο ενός μέτρου πιθανότητας είναι φυσικά πεπερασμένο, αλλά όχι μέτρο πιθανότητας. Επίσης, το αριθμητικό μέτρο στο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ είναι σ-πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο (γιατί;).

(ε′) Υπάρχουν και μέτρα που δεν είναι σ-πεπερασμένα, όπως φερ ειπείν, το μέτρο ν των Παραδειγμάτων 2.1.3: για $X \neq \emptyset$ είναι $\nu(A) = \infty$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $A \neq \emptyset$.

2.2 Μοναδικότητα

Δύο μέτρα μ και ν σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ είναι ίσα αν για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu(A) = \nu(A)$. Αλλά αυτή η συνθήκη είναι εν γένει δύσκολο να ελεγχθεί. Οπότε είναι φυσιολογικό να ρωτήσει κανείς: μήπως αν τα μ και ν ταυτίζονται σε μια «μεγάλη» υποοικογένεια της $\mathcal{A}$ μπορούμε να συνάγουμε ότι ταυτίζονται και παντού; Την απάντηση σε αυτό, για αρκετά καλά μέτρα, τη δίνει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.2.1 (Θεώρημα Μοναδικότητας)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και Δ μια οικογένεια υποσυνόλων του X κλειστή στις πεπερασμένες τομές για την οποία ισχύει $\sigma(\Delta) = \mathcal{A}$. Αν μ και ν είναι δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, ώστε*

$$\mu(D) = \nu(D), \quad \text{για κάθε } D \in \Delta$$

και ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες, τότε $\mu = \nu$:

(i) Τα μ και ν είναι πεπερασμένα και $\mu(X) = \nu(X)$.

(ii) Τα μ και μ είναι σ-πεπερασμένα και ειδικότερα υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην Δ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ και $\mu(D_n) = \nu(D_n) < \infty$ για κάθε n.

Απόδειξη. (i) Είναι σημαντικό να κατανοήσετε αυτή την απόδειξη αφού η τεχνική που χρησιμοποιείται είναι πολύ συνήθης στη Θεωρία Μέτρου. Παρατηρήστε αρχικά, ότι αφού η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.4 έχουμε

$$\delta(\Delta) = \sigma(\Delta) = \mathcal{A}.$$

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \ \mu(A) = \nu(A)\}. \tag{2.20}$$

Ο στόχος είναι να δείξουμε ότι $\mathcal{D} = \mathcal{A}$. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε σίγουρα τον εγκλεισμό:

$$\Delta \subseteq \mathcal{D}.$$

Αφού λοιπόν είναι $\mathcal{A} = \delta(\Delta)$, αρκεί να δείξουμε ότι και η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin, διοτί τότε θα έχουμε

$$\mathcal{A} = \delta(\Delta) \subseteq \mathcal{D}$$

άρα και τη ζητούμενη ισότητα. Οι ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin ελέγχονται ως εξής:

(α′) Ισχύει $X \in \mathcal{D}$ από την υπόθεση (i).

(β′) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $B \subseteq A$ είναι

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B).$$

(Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε ξανά σε αυτό το σημείο ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα.) Έτσι, $A \setminus B \in \mathcal{D}$.

(γ′) Έστω (A_n) μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$. Τότε, είναι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.7. Άρα είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Άρα πράγματι η $\mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(ii) Για $n = 1, 2, ...$ θεωρούμε τα μέτρα $\mu_n, \nu_n : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap D_n), \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap D_n), \quad \text{για } A \in \mathcal{A}, \tag{2.21}$$

δηλαδή τους περιορισμούς στο D_n των μέτρων μ και ν αντίστοιχα. Αν $D \in \Delta$, είναι

$$\mu_n(D) = \mu(D \cap D_n) = \nu(D \cap D_n) = \nu_n(D)$$

αφού η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και άρα $D \cap D_n \in \Delta$. Επίσης

$$\mu_n(X) = \mu(X \cap D_n) = \mu(D_n) = \nu(D_n) = \nu(X \cap D_n) = \nu_n(X) < \infty.$$

Έτσι, για τα μ_n και ν_n πληρούνται οι υποθέσεις του (i) και συνεπώς $\mu_n = \nu_n$, για κάθε $n = 1, 2, ...$ Αν τώρα $A \in \mathcal{A}$ τυχόν, γράφουμε:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap D_n)\right) = \lim_n \mu(A \cap D_n) = \lim_n \mu_n(A) =$$

$$\lim_n \nu_n(A) = \lim_n \nu(A \cap D_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap D_n)\right) = \nu(A),$$

δηλαδή $\mu = \nu$.

□

Εφαρμογή 2.2.2. Έστω μ και ν δύο πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((-\infty, b]) = \nu((-\infty, b])$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$. Τότε $\mu = \nu$.

Απόδειξη. Έστω η οικογένεια $\Delta = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$. Η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Πρόταση 1.1.10). Επίσης,

$$\mu(\mathbb{R}) = \lim_n \mu\left((-\infty, n]\right) = \lim_n \nu\left((-\infty, n]\right) = \nu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση λοιπόν είναι $\mu = \nu$. □

Εύκολα βλέπουμε βέβαια ότι οι υποθέσεις (i) και (ii) είναι απαραίτητες για την ισχύ του συμπεράσματος. Για παράδειγμα, αν μ το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ και $\nu = 2\mu$, αυτά συμπίπτουν στην οικογένεια Δ ενώ γενικά δεν είναι ίσα.

2.3 Πλήρωση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε σταθεροποιήσει ένα $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αν N ένα τυχόν υποσύνολο του $\mathcal{A}$ δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι $N \in \mathcal{A}$: αυτό εξαρτάται από την επιλογή της σ-άλγεβρας. Παρ᾽ όλα αυτά αν ίσχυει $N \in \mathcal{A}$ τότε σίγουρα θα είναι $\mu(N) = 0$. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: μπορούμε να επεκτείνουμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ώστε να περιέχει όλα αυτά τα «αμελητέα» σύνολα; Θα δείξουμε στα επόμενα ότι η απάντηση είναι καταφατική.

Ορισμός 2.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $N \subseteq X$. Το N καλείται *μ-μηδενικό σύνολο* αν υπάρχει ένα $A \in \mathcal{A}$ με $N \subseteq A$ και $\mu(A) = 0$.
Ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ καλείται *πλήρης* (και το μ *πλήρες μέτρο*) αν κάθε μ-μηδενικό σύνολο N ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Ορισμοί 2.3.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε τότε:

(i) την οικογένεια

$$\mathcal{A}_\mu = \{A \subseteq X : \text{ υπάρχουν } E, F \in \mathcal{A} \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = 0\}. \quad (2.22)$$

(Παρατηρήστε ότι θα είναι $\mu(E) = \mu(F)$.)

(ii) τη συνάρτηση $\overline{\mu} : \mathcal{A}_\mu \to [0, \infty]$ που ορίζεται από τη σχέση $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$ οπού το E όπως παραπάνω. (Παρατηρούμε ότι για $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ είναι $\mu(B) \leq \mu(F) = \mu(E)$ και άρα είναι

$$\overline{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}. \quad (2.23)$$

Έτσι, η $\overline{\mu}$ είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.)

Η οικογένεια $\mathcal{A}_\mu$ καλείται *πλήρωση* της $\mathcal{A}$, η συνάρτηση $\overline{\mu}$ *πλήρωση* του μ και η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ λέγονται μ-μετρήσιμα σύνολα. Είναι άμεση απόρροια του παραπάνω ορισμού ότι κάθε μ-μηδενικό σύνολο είναι και μ-μετρήσιμο. Κάπως διαισθητικά, τα στοιχεία της $\mathcal{A}_\mu$ είναι εκείνα τα υποσύνολα του X που απέχουν «μ-αμελητέα απόσταση» (δηλαδή κατά ένα μ-μηδενικό σύνολο) από στοιχεία της $\mathcal{A}$.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Τότε η πλήρωσή του έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) Η $\mathcal{A}_\mu$ είναι σ-άλγεβρα στο X και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$.

(ii) *Τό $\overline{\mu}$ είναι πλήρες μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A}_\mu)$ και ο περιορισμός του στην $\mathcal{A}$ είναι το μ, δηλαδή $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

(iii) *Το $\overline{\mu}$ είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ με $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.*

(iv) *Το μ είναι πλήρες μέτρο $\Leftrightarrow \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}$ (και άρα $\overline{\mu} = \mu$).*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν $A \in \mathcal{A}$, παίρνοντας $E = F = A$ στο (i) του ορισμού 2.2.4, έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_\mu$ και $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$. Επομένως, πράγματι $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\mu$ και $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Για τα υπόλοιπα τώρα:

(i) Είναι φυσικά $\mathcal{A}_\mu \neq \emptyset$. Αν τώρα $A \in \mathcal{A}_\mu$ βρίσκουμε $E, F \in \mathcal{A}$ ώστε

$$E \subseteq A \subseteq F \tag{2.24}$$

και $\mu(F \setminus E) = 0$. Είναι όμως επιπλέον $E^c, F^c \in \mathcal{A}$ και ισχύουν οι εγκλεισμοί:

$$F^c \subseteq A^c \subseteq E^c. \tag{2.25}$$

Αφού

$$E^c \setminus F^c = E^c \cap (F^c)^c = F \cap E^c = F \setminus E \tag{2.26}$$

είναι και $\mu(E^c \setminus F^c) = 0$ και άρα $A^c \in \mathcal{A}_\mu$, δηλαδή η $\mathcal{A}_\mu$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα.

Τέλος, αν (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}_\mu$ βρίσκουμε ακολουθίες (E_n), (F_n) στην $\mathcal{A}$ με

$$E_n \subseteq A_n \subseteq F_n \tag{2.27}$$

και $\mu(F_n \setminus E_n) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Έτσι, εχόυμε και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \tag{2.28}$$

με $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}$. Επίσης, από τον εγκλεισμό

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n) \tag{2.29}$$

έχουμε

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \setminus E_n) = 0.$$

Έπεται λοιπόν ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_\mu$ και συνεπώς η $\mathcal{A}_\mu$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα.

(ii) Είναι άμεσο ότι $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Αν (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}_\mu$, θεωρώντας τα σύνολα E_n του ορισμού έχουμε, με βάση την απόδειξη του (i) παραπάνω, ότι

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \tag{2.30}$$

και αφού και τα E_n είναι ξένα (γιατί;) είναι τελικά:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n).$$

Άρα πράγματι το $\overline{\mu}$ είναι μέτρο. Επιπλέον το $\overline{\mu}$ είναι πλήρες:
Αν A ένα $\overline{\mu}$-μηδενικό σύνολο, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\mu$ με

$$A \subseteq B \text{ και } \overline{\mu}(B) = 0.$$

Από τον ορισμό του $\overline{\mu}$ βρίσκουμε $F \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq F$ και $\mu(F) = 0$. Θέτοντας $E = \emptyset$, έχουμε

$$E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \mu(F \setminus E) = \mu(F) = 0.$$

Επομένως $A \in \mathcal{A}_\mu$.

(iii) Έστω ν ένα μέτρο στην $\mathcal{A}_\mu$ ώστε $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Τότε, για $A \in \mathcal{A}_\mu$ βρίσκουμε $E, F \in \mathcal{A}$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και έχουμε:

$$\mu(E) = \nu(E) \leq \nu(A) \leq \nu(F) = \mu(F).$$

Αφού όμως $\mu(E) = \mu(F)$ έπεται ότι $\nu(A) = \mu(E)$, δηλαδή $\nu(A) = \overline{\mu}(A)$. Επομένως $\nu = \overline{\mu}$.

(iv) ($\Leftarrow$) Αν $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu$ τότε από το (ii) έχουμε ότι $\overline{\mu} = \mu$ και το $\overline{\mu}$ είναι πλήρες. Άρα και το μ είναι πλήρες.
($\Rightarrow$) Έστω ότι το μ είναι πλήρες και $A \in \mathcal{A}_\mu$. Θα δείξουμε ότι $A \in \mathcal{A}$. Βρίσκουμε και πάλι

$$E, F \in \mathcal{A} \;\text{ με }\; E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \;\mu(F \setminus E) = 0.$$

Άρα το $A \setminus E \subseteq F \setminus E$ είναι μ-μηδενικό σύνολο και από την υπόθεση $A \setminus E \in \mathcal{A}$. Έτσι είναι και

$$A = E \cup (A \setminus E) \in \mathcal{A}. \tag{2.31}$$

□

Παραδείγματα 2.3.4. (α΄) Το αριθμητικό μέτρο μ σε οποιοδήποτε μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ είναι πλήρες, αφού το μοναδικό μ-μηδενικό σύνολο είναι το $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(β΄) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $x \in X$ ώστε $\{x\} \in \mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$. Σε αυτή την περίπτωση, το μέτρο Dirac $\mu = \delta_x$ δεν είναι πλήρες.

Απόδειξη. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{P}(X)$. Πράγματι, αν $A \subseteq X$ μπορούμε να γράψουμε

$$A = (A \cap \{x\}) \cup (A \cap \{x\}^c)$$

και $A \cap \{x\} = \emptyset$ ή $\{x\}$ και άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$ και το $A \cap \{x\}^c$ είναι μ-μηδενικό αφού περιέχεται στο $\{x\}^c$ που έχει $\mu(\{x\}^c) = 0$. Έτσι, $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X) = \mathcal{A}_\mu$ και άρα με βάση το (iv) το μ δεν είναι πλήρες. □

2.4 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n) \tag{2.32}$$

και ότι αν επιπλέον $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, τότε

$$\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n). \tag{2.33}$$

3. (1ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και (A_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Να δείξετε ότι $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

4. Αν $A \neq \emptyset$ και $a : A \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση, θέτουμε

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} a(x) : F \subseteq A,\ F \neq \emptyset \text{ και } F \text{ πεπερασμένο} \right\}. \tag{2.34}$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x \in \emptyset} a(x) = 0$. Έστω λοιπόν σύνολο $X \neq \emptyset$ και μια συνάρτηση $a : X \to [0, \infty]$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x \in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. (Υπόδειξη:

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : a(x) > \frac{1}{n}\}.)$$

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x \in A} a(x)$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η *σημειακή κατανομή που επάγεται από την* a και ο $a(x)$ είναι η *μάζα* του x.

5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$. Να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

(β) Αν επιπλέον κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, τότε και η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι επίσης μέτρο πιθανότητας.

6. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, να δείξετε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Ομάδα Β′.

8. Δώστε παράδειγμα σ-πεπερασμένου μέτρου μ στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((a,b)) = \infty$ για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ το σύνολο $J_A = \{i \in I : \mu(A \cap A_i) > 0\}$ είναι το αριθμήσιμο.

11. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα σε ένα σύνολο X και μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \triangle F) < \varepsilon,$$

όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$.

12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται *ημιπεπερασμένο* αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $B \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu(B) < \infty$. Να δείξετε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Ομάδα Γ′.

13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Να δείξετε ότι:

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το *ημιπεπερασμένο μέρος* του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Για δύο σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ γράφουμε $A \sim B$ αν $\mu(E \triangle F) = 0$. Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{A}$.

(β) Για $A, B \in \mathcal{A}$ ορίζουμε $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{A}/\sim$.

15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $E \subseteq X$ λέγεται *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\overline{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X : \ E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Να δείξετε ότι $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ και ότι η $\overline{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα. Αν $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *κορεσμένος* χώρος μέτρου.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, τότε $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$.

(γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ με $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ για $A \in \mathcal{A}$ και $\overline{\mu}(A) = \infty$ για $A \in \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει επιτυχώς την έννοια του μέτρου και έχουμε αποδείξει μερικές βασικές του ιδιότητες. Παρ᾽ όλα αυτά, τα παραδείγματα μέτρων που έχουμε κατασκευάσει είναι αρκετά στοιχειώδη και όχι τόσο ενδιαφέροντα.
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε πρώτα ένα «μηχανισμό» κατασκευής μέτρων μέσω του Θεωρήματος του Καραθεοδωρή. Η πορεία αυτής της κατασκευής είναι με λίγα λόγια η εξής:

1. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ η οποία ικανοποιεί κάποιες ασθενέστερες ιδιότητες από αυτές ενός μέτρου (και άρα είναι ευκολότερο να κατασκευαστεί). Μια τέτοια συνάρτηση θα τη λέμε *εξωτερικό μέτρο*.
2. Περιορίζουμε την φ σε κατάλληλη σ-άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ώστε ο περιορισμός αυτός να είναι μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$.

Σαν εφαρμογή αυτής της διαδικασίας θα κατασκευάσουμε το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* στον $\mathbb{R}^k$ που θα μας οδηγήσει αργότερα στη γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann.

Τέλος, θα παρουσιάσουμε το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή που δίνει μια ουσιαστικά αντίστροφη διαδικασία κατασκευής μέτρων. Πιο συγκεκριμένα:

1. Κατασκευάζουμε μια συνάρτηση μ που «μοιάζει με μέτρο» και ορίζεται σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$.
2. Επεκτείνουμε την συνάρτηση αυτή στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγει η $\mathcal{A}_0$.

Η τελευταία αυτή τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Είναι για παράδειγμα δομικό εργαλείο για τη θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

3.1 Ορισμός και το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Ορισμός 3.1.1. Έστω X ένα σύνολο. Μια συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται *εξωτερικό μέτρο* αν:

(i) Ισχύει $\varphi(\emptyset) = 0$,

(ii) η φ είναι *μονότονη*, δηλαδη αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ και

(iii) η φ είναι *αριθμήσιμα υποπροσθετική* (ή σ-υποπροσθετική), δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε είναι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n). \tag{3.1}$$

Με βάση τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου είναι σαφές ότι κάθε μέτρο είναι και εξωτερικό μέτρο.

Παραδείγματα 3.1.2. (α′) Η συνάρτηση $\varphi_1 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\varphi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.2}$$

είναι εξωτερικό μέτρο:

Απόδειξη. Οι συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού ικανοποιούνται προφανώς. Για την (iii) τώρα, αν $A_n = \emptyset$ για κάθε n ισχύει προφανώς η ισότητα 0=0, ενώ αν κάποιο A_{n_0} είναι μη κενό, τότε $\varphi_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_1(A_n) \geq \varphi_1(A_{n_0}) = 1$, όπως θέλαμε. □

Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι αν $|X| \geq 2$, η φ_1 δεν είναι μέτρο.

(β′) Η συνάρτηση $\varphi_2 : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\varphi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{3.3}$$

είναι εξωτερικό μέτρο:

Απόδειξη. Η συνθήκη (i) ικανοποιείται αφού φυσικά το $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για την (ii), αν $A \subseteq B$ και το B είναι υπεραριθμήσιμο, ισχύει $\varphi_2(A) \leq \varphi_2(B) = 1$, αφού η φ_2 λαμβάνει μόνο τις τιμές 0 και 1. Αν το B είναι αριθμήσιμο πάλι, και το A είναι άριθμήσιμο, άρα $\varphi_2(A) = \varphi_2(B) = 0$. Για την (iii), αν κάποιο A_{n_0} είναι υπεραριθμήσιμο, η ανισότητα ισχύει προφανώς όπως και στο (ii). Αν πάλι όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα, τότε και η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμη και άρα

$$\varphi_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_2(A_n).$$

Άρα πράγματι το φ_2 είναι εξωτερικό μέτρο. □

Ερώτημα: Είναι το φ_2 μέτρο;[1]

[1] Ίσως χρειαστείτε την υπόθεση του συνεχούς.

3.1.1 Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ^* στο $\mathbb{R}$. Είναι φυσιολογικό, αν $I = (a, b)$ ένα ανοικτό διάστημα να θέλουμε να ισχύει

$$\lambda^*(I) = b - a. \tag{3.4}$$

Αν τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ τυχόν, μπορούμε πάντα να καλύψουμε το A από αριθμήσιμα το πλήθος ανοικτά διαστήματα, δηλαδή να βρούμε ακολουθία $(I_n)_n$, με $I_n = (a_n, b_n)$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (γιατί;). Τότε, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ δίνει μια «από πάνω» εκτίμηση για το «μήκος» του A και άρα είναι λογικό λοιπόν να ζητήσουμε

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1]}^{\infty}(b_n - a_n), \text{ για οποιαδήποτε τέτοια } \textit{κάλυψη } (I_n)_n \text{ του } A. \tag{3.5}$$

Οδηγούμαστε λοιπόν φυσιολογικά στον εξής ορισμό:

Ορισμός 3.1.3. Το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) : \ a_n, b_n \in \mathbb{R}, \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \right\}, \tag{3.6}$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$.

Οι βασικές ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου Lebesgue περιέχονται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.1.4. *(i) Το $\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ είναι πράγματι ένα εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$.*

(ii) Για $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$ είναι

$$\lambda^*([a, b]) = \lambda^*([a, b)) = \lambda^*((a, b]) = \lambda^*((a, b)) = b - a. \tag{3.7}$$

(iii) Αν I μη φραγμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda^*(I) = \infty$,

Απόδειξη. (i) Οι ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου ελέγχονται ως εξής:

(α′) Για κάθε $\varepsilon > 0$, είναι $\emptyset \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Έτσι, με βάση τον ορισμό του λ^* (θέτουμε $a_1 = -\varepsilon, b_1 = \varepsilon$ και $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq 2$) είναι

$$\lambda^*(\emptyset) \leq 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, είναι $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

(β′) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, τότε κάθε ακολουθία διαστηματών που καλύπτει το B θα καλύπτει και το A. Έτσι, το $\lambda^*(A)$ θα είναι μικρότερο αφού παίρνουμε infimum σε περισσότερα σύνολα. Πιο φορμαλιστικά, αν $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, τότε είναι και $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$. Δηλαδή

$$\left\{ ((a_n, b_n))_n : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \right\} \subseteq \left\{ ((a_n, b_n))_n : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \right\}, \tag{3.8}$$

και αρα

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n): B\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right\}\geq\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n): A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right\}.$$

Έτσι, $\lambda^*(A)\leq\lambda^*(B)$, δηλαδή το λ^* είναι μονότονο.

(γ′) Έστω τώρα ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(A_n).$$

Αν $\sum_n\lambda^*(A_n)=\infty$, το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n\lambda^*(A_n)<\infty$. Άρα είναι και $\lambda^*(A_n)<\infty$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon>0$. Από τον ορισμό του λ^*, για κάθε n βρίσκουμε ακολουθία $(I_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ με $I_{n,j}=(a_{n,j},b_{n,j})$ ώστε

$$A_n\subseteq\bigcup_j I_{n,j}$$

και

$$\sum_{j=1}^{\infty}(b_{n,j}-a_{n,j})<\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τότε, η οικογένεια $(I_{n,j})_{(n,j)}$ είναι αριθμήσιμη (αφού το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο) και ισχύει

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n,j=1}^{\infty}I_{n,j}.$$

Άρα

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n,j}(b_{n,j}-a_{n,j})=\sum_n\left(\sum_j(b_{n,j}-a_{n,j})\right)\leq$$

$$\leq\sum_n\left(\lambda^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\sum_n\lambda^*(A_n)+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται και η ζητούμενη.

Άρα, πράγματι το λ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(ii) Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a\leq b$. Θα δείξουμε ότι $\lambda^*([a,b])=b-a$. Έστω $\varepsilon>0$. Είναι $[a,b]\subseteq\left(a-\frac{\varepsilon}{2},b+\frac{\varepsilon}{2}\right)$, άρα $\lambda^*([a,b])\leq b-a+\varepsilon$. Αφού ξεκινήσαμε με τυχαίο $\varepsilon>0$, είναι

$$\lambda^*([a,b])\leq b-a.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα τώρα, θεωρούμε ακολουθία ανοικτών διαστημάτων $I_n=(a_n,b_n)$, $n=1,2,\ldots$ με $[a,b]\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\geq b-a.$$

Το διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές σύνολο, άρα το ανοικτό κάλυμμα $(I_n)_n$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε $[a,b]\subseteq\bigcup_{n=1}^{m}(a_n,b_n)$.

Ισχυρισμός. Είναι $\sum_{n=1}^{m}(b_n - a_n) \geq b - a$.

Θα αποδειχθεί με επαγωγή στο m. Για $m = 1$ ο ισχυρισμός είναι προφανής. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $m = k$ και για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{k+1}(a_n, b_n).$$

Τότε υπάρχει $1 \leq i \leq k+1$ ώστε $a \in (a_i, b_i)$. Δίχως βλάβη υποθέτουμε ότι $i = 1$, δηλαδή ότι ισχύει $a_1 < a < b_1$. Αν $b_1 \geq b$, τότε $(a, b) \subseteq (a_1, b_1]$ και άρα

$$b - a < b_1 - a_1 \leq \sum_{n=1}^{k+1}(b_n - a_n).$$

Αν πάλι $b_1 < b$ είναι

$$[b_1, b] \subseteq \bigcup_{n=2}^{k+1}(a_n, b_n)$$

και άρα, από την επαγωγική υπόθεση

$$b - b_1 \leq \sum_{n=2}^{k+1}(b_n - a_n).$$

Έτσι, έχουμε

$$b - a < b - a_1 = (b_1 - a_1) + (b - b_1) \leq \sum_{n=1}^{k+1}(b_n - a_n),$$

όπως θέλαμε. Πράγματι λοιπόν ο ισχυρισμός αληθεύει.

Άρα προφανώς είναι και $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \geq \sum_{n=1}^{m}(b_n - a_n) \geq b - a$, και τελικά $\lambda^*([a, b]) = b - a$.

Για το ανοικτό διάστημα (a, b) τώρα, αν $a < b$ είναι και $a + \frac{1}{n} \leq b - \frac{1}{n}$ για μεγάλες τιμές του n. Έτσι, $\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right] \subseteq (a, b) \subseteq [a, b]$ και από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου

$$\lambda^*\left(\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]\right) = b - a - \frac{2}{n} \leq \lambda^*((a, b)) \leq b - a.$$

Στέλνοντας το n στο ∞ έχουμε λοιπόν $\lambda^*((a, b)) = b - a$. Από τη μονοτονία του λ^* τώρα, είναι άμεσες και οι άλλες δύο ισότητες.

(iii) Κάθε μη φραγμένο διάστημα I περιέχει φραγμένα διαστήματα οσοδήποτε μεγάλου μήκους, δηλαδή για κάθε φυσικό n υπάρχει $a_n \in \mathbb{R}$ ώστε $(a_n, a_n + n) \subseteq I$. Έτσι $\lambda^*(I) \geq n$ για κάθε n και έπεται το ζητούμενο.

□

Με τις ίδιες ιδέες αλλά λίγο περισσότερο κόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε και το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$. Ένα *ανοικτό φραγμένο διάστημα* στον $\mathbb{R}^k$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$I = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_k, b_k) \tag{3.9}$$

όπου $a_j < b_j \in \mathbb{R}$. Ο *όγκος* του διαστήματος I είναι η ποσότητα

$$\mathrm{v}(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_k - a_k). \tag{3.10}$$

Γενικότερα, ένα *διάστημα* στον $\mathbb{R}^k$ είναι ένα σύνολο της μορφής $I = \prod_{j=1}^{k} I_j$, όπου $I_1, I_2, ..., I_k$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$ και ο όγκος του είναι το γινόμενο των μηκών των διαστημάτων I_j (όπου κάνουμε τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$). Γενικεύοντας λοιπόν τον Ορισμό 3.1.3 διατυπώνουμε τον ακόλουθο:

Ορισμός 3.1.5. Το *εξωτερικό μέτρο Lebesgue* $\lambda_k^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ στον $\mathbb{R}^k$ ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_k^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) : \ I_n \subseteq \mathbb{R}^k \text{ ανοικτό φραγμένο διάστημα } \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}, \tag{3.11}$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$.

Είναι σαφές από τον ορισμό ότι $\lambda_1^* = \lambda^*$. Μερικές φορές, χάριν απλότητας, γράφουμε και $\lambda_k^* = \lambda^*$.

Για να αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του λ_k^* (δηλαδή τα ανάλογα της Πρότασης 3.1.4) θα χρειαστούμε το ακόλουθο γεωμετρικό Λήμμα:

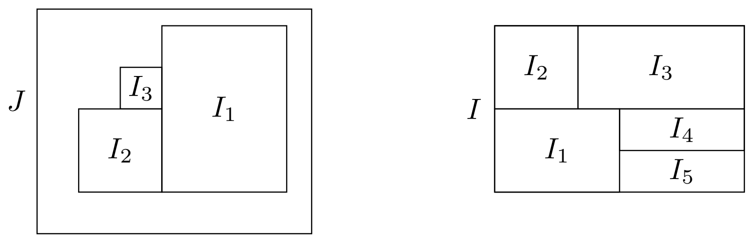
Λήμμα 3.1.6. *(i) Η οικογένεια Δ των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ που γράφονται ως πεπερασμένες ξένες ενώσεις διαστημάτων είναι μια άλγεβρα στον $\mathbb{R}^k$.*

(ii) Έστω I_j, $j = 1, 2, ..., n$ ξένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$, $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ η ένωσή τους και J ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ ώστε $I \subseteq J$. Τότε

$$\sum_{j=1}^{n} v(I_j) \leq v(J) \tag{3.12}$$

και αν επιπλέον το I είναι διάστημα είναι και

$$\sum_{j=1}^{n} v(I_j) = v(I). \tag{3.13}$$



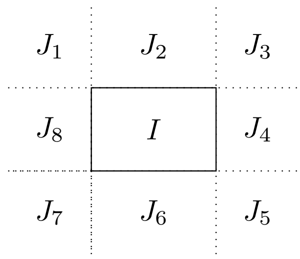
Σχήμα 3.1: Λήμμα 3.1.6 (ii)

Απόδειξη. (i) Είναι εμφανές ότι $\Delta \neq \emptyset$. Έστω $A, B \in \Delta$. Τότε, γράφουμε $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ και $B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$, όπου $(I_i)_i$ και $(J_j)_j$ οικογένειες ξένων διαστημάτων στο $\mathbb{R}^k$. Τότε

$$A \cap B = \bigcup_{i,j} I_i \cap J_j$$

όπου η $(I_i \cap J_j)_{(i,j)}$ είναι επίσης οικογένεις ξένων διαστημάτων στον $\mathbb{R}^k$. Έτσι $A \cap B \in \Delta$, δηλαδή η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.

Για τα συμπληρώματα τώρα, παρατηρούμε ότι αν I ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ τότε $I^c \equiv \mathbb{R}^k \setminus I \in \Delta$.



Σχήμα 3.2: Για κάθε διάστημα I είναι $I^c \in \Delta$.

Έτσι, $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} I_i^c \in \Delta$ από τα παραπάνω. Άρα πράγματι η Δ είναι άλγεβρα.

Παρατήρηση 3.1.7. Έστω $\Delta' \supseteq \Delta$ η οικογένεια των πεπερασμένων ενώσεων διαστημάτων στον $\mathbb{R}^k$ (όχι αναγκαστικά ξένων). Τότε $\Delta = \Delta'$, αφού η Δ είναι άλγεβρα που περιέχει τα διαστήματα και συνεπώς $\Delta' \subseteq \Delta$. Έτσι, κάθε πεπερασμένη ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$ μπορεί να γραφεί και ως πεπερασμένη *ξένη* ένωση διαστημάτων.

(ii) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = m$ και θα το αποδείξουμε για $n = m + 1$. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τον $\mathbb{R}^k$ σε δύο ημίχωρούς, ώστε η τομή του I με τον καθέναν από αυτούς να είναι ένωση m διαστημάτων, αντί για $m + 1$, και να εφαρμόσουμε εκεί την επαγωγική υπόθεση.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I_j \neq \emptyset$ για κάθε j, αφού στην αντίθετη περίπτωση βρισκόμαστε στο $n = m$. Για κάθε $j = 1, 2, ..., m + 1$ γράφουμε

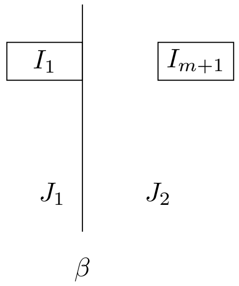
$$I_j = \prod_{\lambda=1}^{k} I_{j,\lambda},$$

όπου $I_{j,\lambda}$ διαστήματα στο $\mathbb{R}$. Τότε

$$I_1 \cap I_{m+1} = \left(\prod_{\lambda=1}^{k} I_{1,\lambda} \right) \cap \left(\prod_{\lambda=1}^{k} I_{m+1,\lambda} \right) = \prod_{\lambda=1}^{k} (I_{1,\lambda} \cap I_{m+1,\lambda}) = \emptyset.$$

Άρα, υπάρχει $1 \leq \lambda_0 \leq k$ ώστε $I_{1,\lambda_0} \cap I_{m+1,\lambda_0} = \emptyset$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το I_{1,λ_0} είναι «αριστερά» του I_{m+1,λ_0}. Αν β το δεξί άκρο του I_{1,λ_0}, θέτουμε

$J_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : \; x_{\lambda_0} < \beta\}$ και $J_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : \; x_{\lambda_0} > \beta\}$.



Σχήμα 3.3: Τα I_1 και I_{m+1} διαχωρίζονται από το υπερεπίπεδο $x_{\lambda_0} = \beta$.

Τότε, αφού $J_1 \cap I_{m+1} = \emptyset$ είναι

$$J_1 \cap I = \bigcup_{j=1}^{m} (J_1 \cap I_j) \subseteq J_1 \cap J$$

και όμοια, αφού $J_2 \cap I_1 = \emptyset$

$$J_2 \cap I = \bigcup_{j=2}^{m+1} (J_2 \cap I_j) \subseteq J_2 \cap J.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε τις σχέσεις

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{v}(J_1 \cap I_j) \leq \mathrm{v}(J_1 \cap J) \quad \text{και} \quad \sum_{j=2}^{m+1} \mathrm{v}(J_2 \cap I_j) \leq \mathrm{v}(J_2 \cap J)$$

άρα

$$\mathrm{v}(J) = \mathrm{v}(J_1 \cap J) + \mathrm{v}(J_2 \cap J) \geq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{v}(J_1 \cap I_j) + \sum_{j=2}^{m+1} \mathrm{v}(J_2 \cap I_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} \mathrm{v}(J_1 \cap I_j) + \sum_{j=1}^{m+1} \mathrm{v}(J_2 \cap I_j) = \sum_{j=1}^{m+1} (\mathrm{v}(J_1 \cap I_j) + \mathrm{v}(J_2 \cap I_j) = \sum_{j=1}^{m+1} \mathrm{v}(I_j),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\mathrm{v}(\emptyset) = 0$ και

$$\mathrm{v}(K) = \mathrm{v}(K \cap J_1) + \mathrm{v}(K \cap J_2) \tag{3.14}$$

για κάθε K διάστημα του $\mathbb{R}^k$.

Αν τώρα το I είναι διάστημα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $J_1 \cap I$ και $J_2 \cap I$. Έτσι, από την επαγωγική υπόθεση πάλι, είναι

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{v}(J_1 \cap I) = \mathrm{v}(J_1 \cap I) \quad \text{και} \quad \sum_{j=2}^{m+1} \mathrm{v}(J_2 \cap I_j) = \mathrm{v}(J_2 \cap I). \tag{3.15}$$

Αθροίζοντας όπως και παραπάνω έπεται ότι $\mathrm{v}(I) = \sum_{j=1}^{m+1} \mathrm{v}(I_j)$, άρα και το ζητούμενο. $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτό το (τεχνικό) Λήμμα, έχουμε το εξής ανάλογο της Πρότασης 3.1.4:

Πρόταση 3.1.8. *(i) Το $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to [0,\infty]$ είναι πράγματι ένα εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}^k$.*

(ii) Για κάθε I διάστημα του $\mathbb{R}^k$ ισχύει $\lambda^*(I) = v(I)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτή διαφέρει από την απόδειξη της Πρότασης 3.1.4 μόνο στον ισχυρισμό που διαμορφώνεται ως εξής:

Ισχυρισμός: Αν $K = \prod_{\lambda=1}^k [a_\lambda, b_\lambda]$ ένα συμπαγές διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και $I_1, I_2, ..., I_n$ ανοικτά φραγμένα διαστήματα με $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j$, τότε

$$\mathrm{v}(K) \leq \sum_{j=1}^n \mathrm{v}(I_j). \tag{3.16}$$

Για την απόδειξη του Ισχυρισμού, θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.7 (i) ώστε να «σπάσουμε» το $\bigcup_{j=1}^n I_j$ σε ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων και έπειτα το (ii) ώστε να πάρουμε το ζητούμενο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τα σύνολα

$$E_j = I_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} I_i, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.17}$$

και παρατηρούμε ότι είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της Δ (βλέπε το προηγούμενο Λήμμα), $E_j \subseteq I_j$ για κάθε j και επιπλέον ισχύει $\bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{j=1}^n I_j$. Έτσι, από το Λήμμα 3.1.7 (i), κάθε E_j γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$. Έστω J_t, $t = 1, 2, ..., m$ μια αρίθμηση όλων αυτών των διαστημάτων. Τότε, τα J_t είναι ξένα ανά δύο (γιατί;) και

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j = \bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{t=1}^m J_t.$$

Έτσι, είναι $K = \bigcup_{t=1}^m (K \cap J_t)$, όπου τα $K \cap J_t$ είναι ξένα ανά δύο διαστήματα. Έτσι, από το (ii) του προηγούμενου Λήμματος έχουμε

$$\mathrm{v}(K) = \sum_{t=1}^m \mathrm{v}(K \cap J_t) \leq \sum_{t=1}^m \mathrm{v}(J_t) = \sum_{j=1}^n \sum_{\{t : J_t \subseteq I_j\}} \mathrm{v}(J_t) = \sum_{j=1}^n \mathrm{v}(E_j) \leq \sum_{j=1}^n \mathrm{v}(I_j),$$

όπως θέλαμε.

□

Πρόταση 3.1.9. *Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ένα αριθμήσιμο σύνολο τότε $\lambda^*(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $A = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$. Τότε, για $\varepsilon > 0$ είναι

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \prod_{\lambda=1}^k \left(x_n(\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \tag{3.18}$$

και άρα, από τον ορισμό του λ^* είναι

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \prod_{\lambda=1}^k \Big((x_n(\lambda) + \frac{\varepsilon}{2^n}) - (x_n(\lambda) - \frac{\varepsilon}{2^n}) \Big) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(2\varepsilon)^k}{2^{nk}} = \frac{\varepsilon^k}{1 - 1/2^k}.$$

Αφού ξεκινήσαμε με τυχαίο $\varepsilon > 0$ έχουμε πράγματι $\lambda^*(A) = 0$. □

3.1.2 Κατασκευή εξωτερικών μέτρων

Η ιδέα της κατασκευής του εξωτερικού μέτρου Lebesgue είναι ουσιαστικά να καλύψουμε κάθε σύνολο με μια αριθμήσιμη ένωση «καλών» συνόλων (διαστημάτων στη συγκεκριμένη περίπτωση) των οποίων γνωρίζουμε το «μέτρο» και στη συνέχεια να δούμε πόσο καλή μπορεί αυτή η προσέγγιση να γίνει. Αυτή η διαδικασία μπορεί να γενικευθεί ώστε να μας δώσει ένα «μηχανισμό» κατασκευής εξωτερικών μέτρων. Χρειαζόμαστε πρώτα έναν Ορισμό:

Ορισμός 3.1.10. Έστω $X \neq \emptyset$. Μια οικογένεια $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ υποσυνόλων του X λέγεται *σ-κάλυψη* του X αν

(i) $\emptyset \in \mathcal{C}$ και

(ii) υπάρχουν $X_1, X_2, ... \in \mathcal{C}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Θεώρημα 3.1.11 (Κατασκευής εξωτερικών μέτρων)**.** *Έστω $X \neq \emptyset$, $\mathcal{C}$ μια σ-κάλυψη του X και $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ μια συνάρτηση με $\tau(\emptyset) = 0$. Η συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ με*

$$\varphi(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \ C_n \in \mathcal{C} \textit{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\} \tag{3.19}$$

για $A \subseteq X$ είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο X.

Πριν την απόδειξη του Θεωρήματος, παρατηρήστε ότι αφού η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη η συνάρτηση φ είναι καλά ορισμένη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά αυτούσια με την απόδειξη της Πρότασης 3.1.4 (i) και άρα είναι καλό να προσπαθήσετε να την κάνετε ως άσκηση. Την συμπληρώνουμε για λόγους πληρότητας.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 ελέγχονται ως εξής:

(i) Για το κενό σύνολο είναι $\emptyset \subseteq \bigcup_n \emptyset$ και άρα $\varphi(\emptyset) \leq \sum_n \tau(\emptyset) = 0$. Άρα $\varphi(\emptyset) = 0$.

(ii) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε, κάθε κάλυψη του B από στοιχεία της $\mathcal{C}$ είναι και κάλυψη του A, δηλαδή

$$\left\{ (C_n)_n : C_n \in \mathcal{C} \text{ και } B \subseteq \bigcup_n C_n \right\} \subseteq \left\{ (C_n)_n : C_n \in \mathcal{C} \text{ και } A \subseteq \bigcup_n C_n \right\}.$$

Συνεπώς, πράγματι $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ (γιατί;).

(iii) Μένει να δείξουμε μόνο την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του φ. Έστω $(A_n)_n$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Θα δειξουμε ότι $\varphi\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \varphi(A_n)$.

Αν $\sum_n \varphi(A_n) = \infty$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_n \varphi(A_n) < \infty$ και άρα είναι και $\varphi(A_n) < \infty$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n λοιπόν, βρίσκουμε ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{C}$, $(C_{n,j})_j$ ώστε $C_n \subseteq \bigcup_j C_{n,j}$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_{n,J}) \leq \varphi(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Τότε $\bigcup_n C_n \subseteq \bigcup_{n,j} C_{n,j}$ και άρα (αφού το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο) είναι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\tau(C_{n,j})\right) \leq \sum_n \varphi(C_n) + \varepsilon.$$

Άρα, για $\varepsilon \to 0$ ισχύει και το ζητούμενο.

□

3.2 Μετρήσιμα σύνολα

Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, αναζητούμε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X ώστε ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{A}}$ να είναι μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Μια τέτοια σ-άλγεβρα υπάρχει πάντα (η τετριμμένη $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$), όμως χρειαζόμαστε να ψάξουμε για μια αρκετά πιο «πλούσια» από αυτή. Ένα «μηχανισμό» για να το πετύχουμε αυτό δίνει ο ακόλουθος ορισμός των *φ-μετρήσιμων συνόλων* σε συνδυασμό με το Θεώρημα του Καραθεοδωρή 3.2.3.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο σε ένα σύνολο X. Ένα $B \subseteq X$ λέγεται *φ-μετρήσιμο* αν «κόβει σωστά» κάθε άλλο υποσύνολο του X, δηλαδή

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B), \tag{3.20}$$

για κάθε $A \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_\varphi$ την οικογένεια όλων των φ-μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Παρατηρήσεις 3.2.2. (α΄) Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου η σχέση $\varphi(A) \leq \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c)$ ισχύει πάντα. Έτσι, για να δειχθεί ότι ένα $B \subseteq X$ είναι φ-μετρήσιμο αρκεί να ελεγχθεί η ανισότητα

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B), \quad \text{για κάθε } \ A \subseteq X. \tag{3.21}$$

Όμως, η ανισότητα αυτή είναι προφανής στην περίπτωση που $\varphi(A) = \infty$. Συνεπώς, αρκεί να κοιτάξουμε μόνο εκείνα τα $A \subseteq X$ με $\varphi(A) < \infty$.

(β΄) Από το (α΄) προκύπτει ότι κάθε $B \subseteq X$ με $\varphi(B) = 0$ είναι φ-μετρήσιμο, αφού από τη μονοτονία του φ έχουμε $\varphi(A \cap B) = 0$ και $\varphi(A \setminus B) \leq \varphi(A)$.

Θεώρημα 3.2.3 (Καραθεοδωρή)**.** *Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X. Τότε η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X και ο περιορισμός $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ του φ στη $\mathcal{M}_\varphi$ είναι πλήρες μέτρο.*

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι άλγεβρα.
Αν $A \subseteq X$ είναι

$$\varphi(A \cap X) + \varphi(A \setminus X) = \varphi(A) + \varphi(\emptyset) = \varphi(A).$$

Άρα $X \in \mathcal{M}_\varphi$.
Αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και $A \subseteq X$, είναι

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cap B^c) = \varphi(A \cap B^c) + \varphi(A \cap (B^c)^c),$$

δηλαδή $B^c \in \mathcal{M}_\varphi$.

Θεωρούμε τώρα $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ και θα δείξουμε ότι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$. Έστω $A \subseteq X$. Αφού $B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ είναι

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_1^c)$$

και αφού $B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$

$$\varphi(A \cap B_1) = \varphi(A \cap B_1 \cap B_2) + \varphi(A \cap B_1 \cap B_2^c).$$

Όμως, $B_1 \setminus B_2 = B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)$ και $B_1^c \subseteq (B_1 \cap B^2)^c$, άρα

$$\varphi(A \cap B_1 \cap B_2^c) + \varphi(A \cap B_1^c) = \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c \cap B_1) + \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c \cap B_1^c).$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω και ότι $B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ έχουμε ότι

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)) + \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c \cap B_1) + \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c \cap B_1^c) =$$

$$= \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)) + \varphi(A \cap (B_1 \cap B_2)^c).$$

Συνεπώς, πράγματι $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$.

Βήμα 2. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα και $A \subseteq X$, τότε

$$\varphi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_2). \tag{3.22}$$

Ειδικότερα, το $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο, δηλαδή για $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ ξένα ισχύει

$$\varphi(B_1 \cup B_2) = \varphi(B_1) + \varphi(B_2). \tag{3.23}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ και $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, παίρνουμε

$$\varphi(A \cap (B_1 \cup B_2)) = \varphi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1) + \varphi(A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1^c) = \varphi(A \cap B_1) + \varphi(A \cap B_2).$$

Το δεύτερο συμπέρασμα έπεται θέτοντας $A = X$.

Παρατήρηση 3.2.4. Από το παραπάνω βήμα, έπεται με απλή επαγωγή ότι

$$\varphi\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap B_j) \tag{3.24}$$

για κάθε $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{M}_\varphi$ ξένα ανά δύο και $A \subseteq X$.

Βήμα 3. Η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ-άλγεβρα και το $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι μέτρο.

Σύμφωνα με το (iii) της Πρότασης 1.1.6, αρκεί να δειχθεί ότι αν (B_n) ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{M}_\varphi$ και $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ τότε $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και επιπλέον

$$\varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n). \tag{3.25}$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A \cap B_n) + \varphi(A \setminus B). \tag{3.26}$$

Από την πρώτη ισότητα έπεται ότι $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και από τη δεύτερη θέτοντας $A = B$ έπεται και η (3.25).

Εφαρμόζοντας την Παρατήρηση παραπάνω για τα σύνολα $B_1, B_2, ..., B_n$ και $\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)^c$ που είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{M}_\varphi$ με ένωση το X έπεται ότι για κάθε $A \subseteq X$ είναι

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap X) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap B_j) + \varphi\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right)^c\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap B_j) + \varphi(A \cap B^c).$$

Στέλνοντας το n στο ∞ στην παραπάνω λοιπόν, έχουμε

$$\varphi(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A \cap B_j) + \varphi(A \setminus B) \geq \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B) \geq \varphi(A),$$

όπου για τις τελευταίες χρησιμοποιήσαμε την σ-υποπροσθετικότητα του φ. Άρα τελικά ισχύει η πρώτη ζητούμενη ισότητα, δηλαδή $B \in \mathcal{M}_\varphi$. Θέτοντας $A = X$ στην τελευταία παίρνουμε και τη δεύτερη ισότητα.

Βήμα 4. Το $\varphi|_{\mathcal{M}_\varphi}$ είναι πλήρες μέτρο.

Έστω $B \subseteq X$ ώστε να υπάρχει $C \in \mathcal{M}_\varphi$ με $B \subseteq C$ και $\varphi(C) = 0$. Τότε, από τη μονοτονία του φ, είναι $\varphi(B) = 0$ και άρα $B \in \mathcal{M}_\varphi$ από την Παρατήρηση 3.2.2 (β′). □

Ορισμός 3.2.5. Τα στοιχεία της σ-άλγεβρας $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ λέγονται *Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.*

Εν γένει, το να ελεγχθεί κατά πόσο ένα δοσμένο σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο είναι ιδιαίτερα δύσκολο. Προς το παρόν, τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που γνωρίζουμε είναι μόνο το $\mathbb{R}^k$ και τα «αμελητέα», δηλαδή εκείνα που έχουν εξωτερικό μέτρο μηδέν. Η ακόλουθη Πρόταση δείχνει ότι η οικογένεια $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι ιδιαίτερα πλούσια.

Πρόταση 3.2.6. *Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι και Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.*

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$\Delta = \left\{ \prod_{j=1}^{k} (-\infty, b_j] : \ b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.27}$$

γνωρίζουμε (Πρόταση 1.1.11) ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Συνεπώς, αφού η $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ είναι σ-άλγεβρα, για να δείξουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Θεωρούμε λοιπόν ένα $B = \prod_{j=1}^{k}(-\infty, b_j] \in \Delta$ και θα δείξουμε ότι είναι Lebesgue μετρήσιμο, δηλαδή ότι

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B), \text{ για κάθε } A \subseteq \mathbb{R}^k \text{ με } \lambda^*(A) < \infty.$$

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(A) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του λ^*, βρίσκουμε ακολουθία (I_n) ανοικτών φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}^k$ ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon. \tag{3.28}$$

Για κάθε n το $I_n \cap B$ είναι φραγμένο διάστημα (όχι απαραίτητα ανοικτό) ενώ το $I_n \setminus B$ γράφεται ως πεπερασμένη ξένη ένωση φραγμένων διαστημάτων από το Λήμμα 3.1.6 (i), δηλαδή

$$I_n \setminus B = \bigcup_{j=1}^{k_n} I_{n,j}, \text{ όπου } I_{n,j},\ j = 1, 2, ..., k_n \text{ ξένα φραγμένα διαστήματα.} \tag{3.29}$$

Είναι εμφανές, ότι για κάθε φραγμένο διάστημα I του $\mathbb{R}^k$ μπορούμε να βρούμε ένα ανοικτό φραγμένο διάστημα J ώστε $I \subseteq J$ και η διαφορά $\mathrm{v}(J) - \mathrm{v}(I)$ να είναι οσοδήποτε μικρή. Βρίσκουμε λοιπόν ανοικτά και φραγμένα διαστήματα J_n και $J_{n,j}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $j = 1, 2, ..., k_n$ ώστε

$$I_n \cap B \subseteq J_n \text{ και } I_{n,j} \subseteq J_{n,j}$$

και

$$\mathrm{v}(J_n) + \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(J_{n,j}) < \mathrm{v}(I_n \cap B) + \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(I_{n,j}) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \mathrm{v}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, \tag{3.30}$$

σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.6 (ii). Τότε όμως

$$A \cap B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \text{ και } A \setminus B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} J_{n,j}$$

και συνεπώς

$$\lambda^*(A \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(J_n) \text{ και } \lambda^*(A \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(J_{n,j}).$$

Άρα τελικά,

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{v}(J_n) + \sum_{j=1}^{k_n} \mathrm{v}(J_{n,j}) \right) <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) + \varepsilon < \lambda^*(A) + 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ που αρχίσαμε ήταν τυχαίο έπεται και η ζητούμενη.

□

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση του $\mathbb{R}$, δηλαδή για $k = 1$, το $I_n \setminus B$ είναι φραγμένο διάστημα και άρα η απόδειξη απλουστεύεται αρκετά.

Ορισμός 3.2.7. Ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue λ_k^* στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}_{\lambda_k^*}$ λέγεται *μέτρο Lebesgue* και συμβολίζεται με λ_k ή απλά με λ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το λ είναι πλήρες μέτρο. Μερικές φορές, και ο περιορισμός του λ_k^* στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ θα λέγεται μέτρο Lebesgue.

Μια περιγραφή του εξωτερικού μέτρου Lebesgue με βάση τον περιορισμό του στην $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ δίνεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.2.8. *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), B \supseteq A\} = \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό με } G \supseteq A\}. \tag{3.31}$$

Απόδειξη. Για $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $B \supseteq A$ είναι $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = \lambda(B)$. Συνεπώς

$$\lambda^*(A) \leq \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), B \supseteq A\} \leq \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό με } G \supseteq A\}.$$

Έτσι, αν $\lambda^*(A) = \infty$ η ζητούμενη είναι προφανής. Θεωρούμε λοιπόν A με $\lambda^*(A) < \infty$, $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό με

$$\lambda^*(G) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Από τον ορισμό του λ^* βρίσκουμε ακολουθία (I_n) ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και $\sum_n \mathrm{v}(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon$. Θέτουμε $G = \bigcup_n I_n$. Το G είναι ανοικτό, περιέχει το A και επιπλέον

$$\lambda(G) = \lambda\left(\bigcup_n I_n\right) \leq \sum_n \mathrm{v}(I_n) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Έτσι, $\inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό με } G \supseteq A\} \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$ και για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

3.3 Εσωτερικό και εξωτερικό μέτρο

Το αποτέλεσμα της τελευταίας Πρότασης μας δίνει την εξής κατάσταση: το εξωτερικό μέτρο ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^k$ ταυτίζεται με την «από πάνω» προσέγγιση του από το μέτρο συνόλων Borel και ανοικτών συνόλων. Η ιδέα αυτή οδηγεί στον εξής Ορισμό:

Ορισμός 3.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για $A \subseteq X$ τυχόν ορίζουμε:

(i) το *εξωτερικό μέτρο του A ως προς μ*:

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ και } B \supseteq A\} \tag{3.32}$$

(ii) το *εσωτερικό μέτρο του A ως προς μ*:

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{A} \text{ και } B \subseteq A\}. \tag{3.33}$$

Είναι άμεσο από τη μονοτονία του μ ότι για κάθε $A \subseteq X$ είναι $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ και αν επιπλέον $A \in \mathcal{A}$, τότε $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το εξωτερικό μέτρο μ^* του μ έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) Για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$ και $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(ii) Η συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ είναι πράγματι ένα εξωτερικό μέτρο (σύμφωνα με τον ορισμό 3.1.1).

Απόδειξη. (i) Αν $\mu^*(A) = \infty$ είναι και $\mu(X) = \infty$ (από τον ορισμό του μ^*) και άρα για $B = X$ έχουμε τη ζητούμενη.

Ας υποθέσουμε ότι $\mu^*(A) < \infty$ τώρα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε $B_n \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B_n$ και

$$\mu(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε το σύνολο $B = \bigcap_n B_n \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι $A \subseteq B$ και άρα $\mu^*(A) \leq \mu(B)$. Όμως, για $n \in \mathbb{N}$ είναι και $B \subseteq B_n$ και άρα $\mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Έτσι,

$$\mu^*(A) \leq \mu(B) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, ...$$

και άρα, παίρνοντας $n \to \infty$ έχουμε πράγματι $\mu(B) = \mu^*(A)$.

(ii) Οι ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 ελέγχονται ως εξής:

(α′) Προφανώς $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(β′) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, κάθε στοιχείο της $\mathcal{A}$ που καλύπτει το A_2 καλύπτει και το A_1, άρα είναι $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ (γιατί;). Άρα το μ^* είναι μονότονο.

(γ′) Μένει να δείξουμε ότι το μ^* είναι υποπροσθετικό. Αν (A_n) ακολυθία υποσυνόλων του X θα δείξουμε ότι

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{3.34}$$

Για κάθε n βρίσκουμε, σύμφωνα με το (i) σύνολο $B_n \in \mathcal{A}$ με $A_n \subseteq B_n$ και $\mu^*(A_n) = \mu(B_n)$. Τότε $\bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n B_n \in \mathcal{A}$ και άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_n B_n\right) \leq \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n),$$

όπως θέλαμε.

□

Παρατήρηση 3.3.3. Αν λ το μέτρο Lebesgue στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ τότε το εξωτερικό μέτρο που ορίζει το λ σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 ταυτίζεται με το γνωστό μας εξωτερικό μέτρο Lebesgue (Ορισμός 3.1.5).

Πρόταση 3.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < \infty$. Τότε*

$$A \in \mathcal{A}_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu_*(A) = \mu^*(A). \tag{3.35}$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Από τον ορισμό της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_\mu$ υπάρχουν $E, F \in \mathcal{A}$ ώστε $E \subseteq A \subseteq F$ και $\mu(F \setminus E) = 0$. Τότε

$$\mu(E) \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) \leq \mu(F)$$

που μαζί με τη σχέση $\mu(E) = \mu(F)$ δίνει τη ζητούμενη: $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$. Τότε, συνδυάζοντας τους δύο ορισμούς 3.3.1, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε σύνολα $E_n, F_n \in \mathcal{A}$ με $E_n \subseteq A \subseteq F_n$ και

$$\mu(F_n) - \mu(E_n) = \mu(F_n \setminus E_n) < \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε τα σύνολα $E = \bigcup_n E_n$ και $F = \bigcap_n F_n$ και παρατηρούμε ότι $E \subseteq A \subseteq F$ και επιπλέον, για κάθε n:

$$\mu(F \setminus E) \leq \mu(F_n \setminus E_n) < \frac{1}{n}$$

από τη μονοτονία του μ. Έτσι, $\mu(F \setminus E) = 0$ και άρα $A \in \mathcal{A}_\mu$. □

Παρατήρηση 3.3.5. Από την απόδειξη της τελευταίας Πρότασης, προκύπτει ότι για $A \in \mathcal{A}_\mu$ είναι $\mu_*(A) = \mu^*(A) = \overline{\mu}(A)$.

3.4 Το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή

Όπως είπαμε και στην Εισαγωγή του Κεφαλαλαίου, το θεώρημα επέκτασης δείχνει μια αντίστροφη ουσιαστικά διαδικασία κατασκευής μέτρων από το Θεώρημα 3.2.3 του Καραθεοδωρή. Δίνουμε πρώτα τον εξής Ορισμό:

Ορισμός 3.4.1. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}_0$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Μια συνάρτηση $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ λέγεται *premeasure* στο σύνολο X αν:

(i) Ισχύει $\mu_0(\emptyset) = 0$ και

(ii) Αν $A_1, A_2, \ldots$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}_0$ για τα οποία επιπλέον ισχύει $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_0$, τότε

$$\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n). \tag{3.36}$$

Ειδικότερα, κάθε premeasure είναι πεπερασμένα προσθετικό στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$.

Θεώρημα 3.4.2 (Θεώρημα Επέκτασης)**.** *Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A}_0$ μια άλγεβρα στο X, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ η σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{A}_0$ και μ_0 ένα premeasure στην $\mathcal{A}_0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n) : A_n \in \mathcal{A}_0 \text{ και } A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n\right\} \tag{3.37}$$

για $A \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η μ^* είναι ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X.

(ii) Για $A \in \mathcal{A}_0$ είναι $\mu^*(A) = \mu_0(A)$.

(iii) Αν $\mathcal{M}_{\mu^*}$ η σ-άλγεβρα των μ^*-μετρήσιμων συνόλων τότε ισχύει

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}. \tag{3.38}$$

Συνεπώς το $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ είναι ένα μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που επεκτείνει το μ_0. Επιπλέον, ισχύει και η ακόλουθη μορφή μοναδικότητας:

(iv) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, δηλαδή αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}_0$ με $X = \bigcup_n F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε n, τότε το μ είναι το μοναδικό μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που επεκτείνει το μ_0.

Απόδειξη. (i) Είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.1.11 (κατασκευής εξωτερικών μέτρων).

(ii) Έστω $A \in \mathcal{A}_0$. Είναι σαφές ότι $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$, αφού η ακολουθία $A, \emptyset, \emptyset, \ldots$ είναι μια κάλυψη του A από στοιχεία της $\mathcal{A}_0$. Για την αντίστροφη ανισότητα τώρα, θεωρούμε μια ακολουθία $(A_n)_n$ στην $\mathcal{A}_0$ με $A \subseteq \bigcup_n A_n$ και θα δείξουμε ότι

$$\mu_0(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right), \ n = 1, 2, \ldots$$

Τότε $B_n \in \mathcal{A}_0$ για κάθε n, τα B_n είναι ξένα ανά δύο, $B_n \subseteq A_n$ για κάθε n και $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n$. Άρα:

$$\mu_0(A) = \mu_0 \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n),$$

όπως θέλαμε. Άρα, πράγματι $\mu^*|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$.

(iii) Γνωρίζουμε (Θεώρημα Καραθεοδωρή 3.2.3) ότι η $\mathcal{M}_{\mu^*}$ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και επομένως αφού $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A}_0)$ για να δειχθεί ο εγκλεισμός (3.38) αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Έστω λοιπόν $A \in \mathcal{A}_0$ και $B \subseteq X$ με $\mu^*(B) < \infty$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε μια ακολουθία (B_n) στην $\mathcal{A}_0$ με $B \subseteq \bigcup_n B_n$ και επιπλέον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Αφού το μ_0 είναι premeasure όμως, έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(B_n \cap A^c) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A),$$

αφού $B_n \cap A, B_n \cap A^c \in \mathcal{A}_0$ για κάθε n. Άρα τελικά

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$$

και για $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

(iv) Για τη μοναδικότητα τώρα, θεωρούμε ένα μέτρο ν στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ με $\nu|_{\mathcal{A}_0} = \mu_0$ και θα δείξουμε ότι $\nu = \mu$. Για $A \in \mathcal{A}$, αν $A \subseteq \bigcup_n A_n$ με $A_n \in \mathcal{A}_0$ είναι

$$\nu(A) \leq \nu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Κατά συνέπεια είναι και $\nu(A) \leq \mu(A)$ από τον ορισμό του μ^*. Για την αντίστροφη ανισότητα τώρα, δείχνουμε πρώτα το εξής:

Ισχυρισμός. Αν $F \in \mathcal{A}$ με $\mu(F) < \infty$, τότε είναι $\mu(F) = \nu(F)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε ακολουθία (B_n) στην $\mathcal{A}_0$ ώστε $F \subseteq \bigcup_n B_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(F) + \varepsilon. \tag{3.39}$$

Αν $B = \bigcup_n B_n$, τότε χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του μ, την σχέση (3.39) και το γεγονός ότι $\mu(F) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(B \setminus F) \leq \varepsilon. \tag{3.40}$$

Παρατηρούμε όμως ότι:

$$\nu(B) = \lim_n \nu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \lim_n \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \mu(B),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\bigcup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}_0$ για κάθε n. Συνεπώς, είναι:

$$\mu(F) \leq \mu(B) = \nu(B) = \nu(F) + \nu(B \setminus F) \leq \nu(F) + \mu(B \setminus F) \leq \mu(F) + \varepsilon.$$

Άρα πράγματι $\mu(F) \leq \nu(F)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Για $A \in \mathcal{A}$ τυχόν τώρα, γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap F_n)$$

και άρα είναι

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap F_n) = \lim_n \nu(A \cap F_n) = \nu(A),$$

όπως θέλαμε. Έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

3.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A^o \neq \emptyset$. Να δείξετε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

2. Έστω X ένα σύνολο. Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi_j : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, $j = 1, 2, 3, 4$ με

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ 1, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases}, \quad \phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ \infty, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases},$$

$$\phi_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{υπεραριθμήσιμο} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_4(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα και να βρείτε τις $\mathcal{M}_{\phi_j}$.

3. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\phi(A) = \limsup_n \frac{1}{n}|\{E \cap \{1, \ldots, n\}|$ (όπου $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο.

4. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ-κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(A)$ για $A \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε τα μ^*-μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{N}$.

5. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ένα $A \subseteq X$. Δείξτε ότι υπάρχει $A_0 \in \mathcal{A}$ με $A_0 \subseteq A$ και $\mu_*(A) = \mu(A_0)$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν (A_n) μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X, τότε

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu^*(A_n).$$

Ομάδα Β′.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

10. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Να δείξετε ότι και για το $A' = \{x^2 : x \in A\}$ ισχύει $\lambda(A') = 0$.

11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X).$$

12. Δείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\lambda^*((a, b)) = \lambda^*((a, b) \cap A) + \lambda^*((a, b) \setminus A), \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ και $\alpha \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(A \cap I) > \alpha\lambda(I).$$

14. Να δείξετε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I.

15. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα premeasure στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής:

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι $\phi-$μετρήσιμο αν και μόν αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι $\sigma-$πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

16. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται *$\phi-$μετρήσιμο κάλυμα* του E αν:

$$E \subseteq G,\ G \in \mathcal{M}_\phi \text{ και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

(α) Αν G_1 και G_2 δύο $\phi-$μετρήσιμα καλύματα του ίδιου $E \subseteq X$, δείξτε ότι $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$.

(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G)$, να δείξετε ότι το G είναι ένα $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα του E.

17. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_n \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει υπακολουθία (A_{k_n}) της (A_n) ώστε

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

Ομάδα Γ΄.

18. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

19. Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) < \infty$ και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του A ώστε $\lambda(A_n) \geq c$ για κάποιο $c > 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

20. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ως προς το μέτρο Lebesgue) έχει την εξής ιδιότητα:

$$\text{υπάρχει } k = k(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε για κάθε } n \geq k \text{ να ισχύει } |x - q_n| \geq 1/n^2.$$

21. Λέμε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $a > 0$, το σύνολο $\{x \in A : |x| > a\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε

$$\phi(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο χώρις σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο με σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{M}_\phi = \{A \subseteq \mathbb{R} : \ A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έχει κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ $\phi-$μετρήσιμο κάλυμα;

22. Έστω Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύξαμε μερικούς τρόπους κατασκευής εξωτερικών μέτρων και μέτρων δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^k$. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue και θα το χαρακτηρίσουμε βάσει αυτών. Στη συνέχεια θα στραφούμε στη μελέτη των εγκλεισμών

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$$

που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ιδιαίτερα «παθολογικά» σύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμα και Lebesgue μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel.

4.1 Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Ορισμός 4.1.1. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X ώστε $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}(X)$ και μ ένα μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Το μέτρο μ λέγεται *κανονικό μέτρο* αν:

(i) $\mu(K) < \infty$ για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.

(ii) Το μ ικανοποιεί τη συνθήκη *εξωτερικής κανονικότητας*, δηλαδή

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \text{ ανοικτό στο } X \text{ και } G \supseteq A\}, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}. \quad (4.1)$$

(iii) Το μ ικανοποιεί τη συνθήκη *εσωτερικής κανονικότητας*, δηλαδή

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq G\}, \text{ για κάθε } G \subseteq X \text{ ανοικτό}. \quad (4.2)$$

Η συνθήκη κανονικότητας ενός μέτρου μ εκφράζει μια συμβιβαστότητα του μ με τη δομή του X ως μετρικού χώρου (ουσιαστικά, με την τοπολογία του).

Πρόταση 4.1.2. *Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό μέτρο. Επιπλέον, ισχύει*

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \tag{4.3}$$

(όχι μόνο για τα ανοικτά).

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.6 είναι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και κατά συνέπεια έχει νόημα να ελέγξουμε τις ιδιότητες (i)-(iii) του Ορισμού 4.1.1:

(i) Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^k$ συμπαγές σύνολο. Τότε, μπορούμε να βρούμε ένα μεγάλο φραγμένο διάστημα J του $\mathbb{R}^k$ ώστε $K \subseteq J$. Άρα, από τη μονοτονία του λ είναι

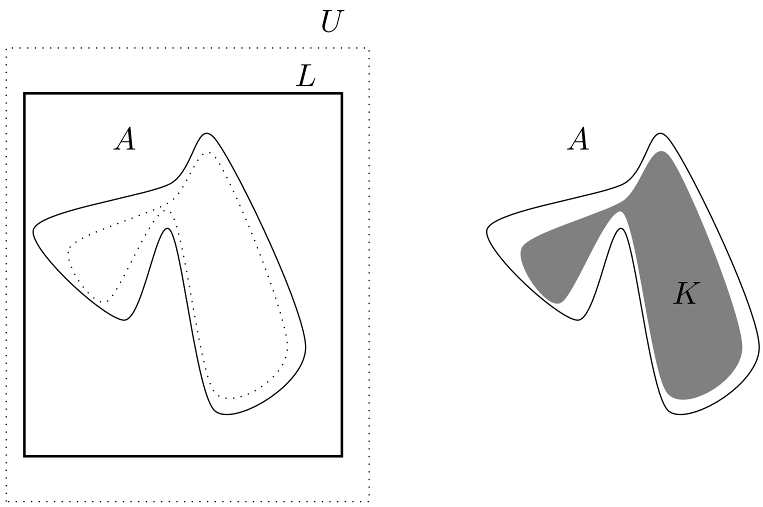
$$\lambda(K) \le \lambda(J) = \mathrm{v}(J) < \infty.$$

(ii) Αυτή είναι ακριβώς η ιδιότητα που αποδείξαμε στην Πρόταση 3.2.8 για Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(iii) Για την εσωτερική κανονικότητα τώρα, λόγω της μονοτονίας του λ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda(A) \le \sup\{\lambda(K) : \ K \subseteq A \text{ συμπαγές}\}.$$

Θα υποθέσουμε αρχικά ότι το A είναι φραγμένο. Για να αποδείξουμε τη ζητούμενη ψάχνουμε ένα κλειστό[1] σύνολο K μεσα στο A που να είναι «πολύ κοντά» στο A. Ισοδύναμα, ψάχνουμε ένα ανοικτό σύνολο G μεγαλύτερο από το A^c που να είναι πάλι «πολύ κοντά» στο A^c (ουσιαστικά $G = K^c$). Όμως, το A είναι φραγμένο οπότε αντί να βρούμε ένα τέτοιο ανοικτό G μας αρκεί να περιοριστούμε σε ένα μεγάλο συμπαγές σύνολο L με $L \supseteq A$, να βρούμε ένα ανοικτό U «λίγο μεγαλύτερο» από τη διαφορά $L \setminus A$ και στη συνέχεια να θέσουμε K εκείνο το τμήμα του A που δεν τέμνει το U. Αυτό θα είναι αναγκαστικά «κοντά» στο A.



Σχήμα 4.1: Απόδειξη της εσωτερικής κανονικότητας για φραγμένα σύνολα

[1] αφού το A είναι φραγμένο, θα είναι αυτόματα συμπαγές

Γράφοντας τα παραπάνω πιο φορμαλιστικά, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε L συμπαγές με $L \supseteq A$ και U ανοικτό με $L \setminus A \subseteq U$ και επιπλέον

$$\lambda(U \setminus (L \setminus A)) < \varepsilon.$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $K = A \setminus U$. Παρατηρούμε ότι $K \subseteq A$ και $K = L \setminus U$ (γιατί;), συνεπώς το K είναι κλειστό. Επιπλέον, $A \setminus K \subseteq U \setminus (L \setminus A)$ και κατά συνέπεια

$$\lambda(A \setminus K) \leq \lambda(U \setminus (L \setminus A)) < \varepsilon.$$

Στη γενική περίπτωση τώρα (το A όχι απαραίτητα φραγμένο), θέτουμε

$$A_n = A \cap B(0,n), \text{όπου } B(0,n) = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 < n\},\ n = 1, 2, ... \tag{4.4}$$

Τότε, η ακολουθία (A_n) είναι αύξουσα και κάθε A_n είναι φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$. Έτσι:

$$\lambda(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) = \sup_n \sup\{\lambda(K) : K \subseteq A_n \text{ συμπαγές}\} \leq$$
$$\leq \sup\{\lambda(K) : \ K \subseteq A \text{ συμπαγές}\}.$$

□

Χρησιμοποιώντας την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue είμαστε σε θέση να καταλάβουμε καλύτερα τη σχέση μεταξύ του χώρου μέτρου $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*}, \lambda)$ και του $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda)$. Αποδείξαμε στην Πρόταση 3.2.6 ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$, αλλά στην πραγματικότητα ισχύει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.1.3. *Το μέτρο Lebesgue στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$.*

Απόδειξη. Αφού πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο μέτρο στη μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{M}_{\lambda^*} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ ή ισοδύναμα:

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχουν } E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \text{ με } E \subseteq A \subseteq F \text{ και } \lambda(F \setminus E) = 0. \tag{4.5}$$

($\Rightarrow$) Έστω $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\lambda(A) < \infty$. Τότε, από την παραπάνω πρόταση βρίσκουμε ακολουθίες (K_n), (G_n) με K_n συμπαγή και G_n ανοικτά, $K_n \subseteq A \subseteq G_n$ και

$$\lambda(G_n) - \lambda(K_n) = \lambda(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε (όπως έχουμε ξανακάνει) $E = \bigcup_n K_n$ και $F = \bigcap_n G_n$. Τότε, $E \subseteq A \subseteq F$, $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και

$$\lambda(F \setminus E) \leq \lambda(G_n \setminus K_n) < \frac{1}{n}, \text{ για κάθε } n = 1, 2, ...$$

Άρα $\lambda(F \setminus E) = 0$, δηλαδή $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$.

Αν τώρα $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ τυχόν γράφουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \text{όπου } A_n = A \cap B(0,n).$$

Τότε, κάθε A_n είναι μετρήσιμο και φραγμένο και άρα από τα παραπάνω $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$. Αφού όμως η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ είναι σ-άλγεβρα, είναι και $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)_\lambda$ και άρα η ($\Rightarrow$) αποδείχθηκε.

($\Leftarrow$) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ώστε να υπάρχουν $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ με $E \subseteq A \subseteq F$ και $\lambda(F \setminus E) = 0$, γράφουμε $A = E \cup (A \setminus E)$. Τότε, $\lambda(A \setminus E) = 0$ από τη μονοτονία του λ και άρα $A \setminus E \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και επιπλέον $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Άρα και $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

□

Παρατήρηση 4.1.4. Στην πραγματικότητα ισχύουν οι εξής ισχυρότερες ισοδυναμίες:

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } E \supseteq A \;\; G_\delta \text{ σύνολο με } \lambda(E \setminus A) = 0 \tag{4.6}$$

και

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } F \subseteq A \;\; F_\sigma \text{ σύνολο με } \lambda(A \setminus F) = 0, \tag{4.7}$$

η απόδειξη των οποίων αφήνεται ως άσκηση.

Ορισμός 4.1.5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Κάθε μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B}(X))$ λέγεται *μέτρο Borel* στον X.

Πρόταση 4.1.6. *Το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ με*

$$\lambda(I) = v(I), \;\; \text{για κάθε } I \text{ διάστημα στον } \mathbb{R}^k. \tag{4.8}$$

Απόδειξη. Πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος Μοναδικότητας (Πρόταση 2.2.1). Θεωρούμε την οικογένεια

$$\Delta = \{I \subseteq \mathbb{R}^k : I \text{ διάστημα}\}.$$

Η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ κατά τα γνωστά. Αν μ ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ με $\mu(I) = \mathrm{v}(I)$ για κάθε $I \in \Delta$, τότε είναι $\mu(I) = \lambda(I)$ για κάθε $I \in \Delta$. Επιπλέον $\mathbb{R}^k = \bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]^k$, όπου η $([-n,n]^k)_n$ είναι αύξουσα ακολουθία στην Δ και $\mu([-n,n]^k) = \lambda([-n,n]^k) = (2n)^k < \infty$ για κάθε n. Έτσι, από την Πρόταση 2.2.1 είναι τελικά $\lambda = \mu$.

□

Παρατήρηση 4.1.7. Παρατηρήστε κάθε πρόταση της μορφής

«Το λ είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα (P)»

συνεπάγεται την αντίστοιχη

«Το λ είναι το μοναδικό μέτρο στο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$ ώστε να ισχύει η ιδιότητα (P)»

από τη μοναδικότητα της πλήρωσης (Πρόταση 2.3.3 (iii)). Οπότε, όταν στα παρακάτω μια Πρόταση θα μας εξασφαλίζει ότι το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα θα γνωρίζουμε ότι αυτόματα έχουμε και την αντίστοιχη μοναδικότητα στο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_{\lambda^*})$.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα αποτέλεσμα που εντάσσεται στις λεγόμενες «3 Αρχές του Littlewood»[2]. Το αποτέλεσμα αυτό λέει «χοντρικά» ότι

[2] Οι άλλες δύο είνα τα θεωρήματα του Egorov και του Luzin και θα αποδειχθούν στα Κεφάλαια 7 και 8 αντίστοιχα.

Κάθε μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ είναι σχεδόν ίσο με πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Φυσικά, μένει να διευκρινιστεί τι σημαίνει «σχεδόν ίσο». Η αυστηρή διατύπωση είναι ως εξής:

Πρόταση 4.1.8. *Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα $J_1, J_2, ..., J_m$ ώστε*

$$\lambda(A \triangle (J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_m)) < \varepsilon.^3 \tag{4.9}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, βρίσκουμε ακολουθία $(I_n)_n$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η σειρά των $\mathrm{v}(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) \setminus A \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \setminus A. \tag{4.10}$$

Κατά συνέπεια

$$\lambda\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) \right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} I_n \right) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n \right) \setminus A \right) \leq \lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \setminus A \right) =$$

$$= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.6 (i) όμως, μπορούμε να βρούμε ακολουθία ξένων ανά δύο διαστημάτων $J_1, J_2, ..., J_m$ ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{N} I_n = \bigcup_{n=1}^{m} J_m$$

[3] Υπενθυμίζουμε ότι η *συμμετρική διαφορά* $\triangle$ δυο συνόλων X και Y ορίζεται ως

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

και επιπλέον, αφού
$$\lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m} J_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{m} J_n^o\right)\right) = 0$$
τα $J_1, J_2, ..., J_m$ μπορούν να υποτεθούν και ανοικτά. Έτσι, πράγματι
$$\lambda(A \triangle (J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_m)) = \lambda\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right)\right) + \lambda\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \setminus A\right) < \varepsilon.$$
□

4.2 Μέτρο Lebesgue και μετασχηματισμοί

Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ θέτουμε
$$A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}, \tag{4.11}$$
το *άθροισμα* των A, B. Αν $B = \{x\}$, γράφουμε $A + x$ αντί του $A + \{x\}$, δηλαδή
$$A + x = \{a + x : a \in A\}, \tag{4.12}$$
η μετάθεση του A κατά x. Για $x \in \mathbb{R}^k$ θεωρούμε την απεικόνιση $T_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ με $T_x(y) = y + x$, $y \in \mathbb{R}^k$. Η T_x είναι 1-1 και επί με αντίστροφη την T_{-x}. Από τη σχέση $A + x = T_x(A)$, συμπεραίνουμε τα εξής:

(i) $(\bigcup_n A_n) + x = \bigcup_n (A_n + x)$,

(ii) $(\bigcap_n A_n) + x = \bigcap_n (A_n + x)$ (αφού η T_x είναι 1-1),

(iii) $(A \setminus B) + x = (A + x) \setminus (B + x)$ και

(iv) $B^c + x = (B + x)^c$.

Επιπλέον, η T_x είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς για $A \subseteq \mathbb{R}^k$ το A είναι ανοικτό αν και μόνον αν $A + x$ ανοικτό, για $x \in \mathbb{R}^k$.

Παρατήρηση 4.2.1. Για ένα $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει η ισοδυναμία:
$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \quad \Leftrightarrow \quad A + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k). \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Προφανώς, αρκεί να δείξουμε μόνο τη συνεπαγωγή ($\Rightarrow$), αφού $A = (A + x) - x$. Θέτουμε
$$\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) : B + x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}. \tag{4.14}$$
Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στην $\mathcal{F}$ και από τις σχέσεις (i)-(iv) εύκολα βλέπει κανείς ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα. Έτσι $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ όπως θέλαμε. □

Πρόταση 4.2.2. *(i) Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue λ^* είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ είναι*
$$\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A). \tag{4.15}$$

(ii) Το μέτρο Lebesgue λ είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή:

(α΄) Για $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ είναι

$$A \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \quad \Leftrightarrow \quad A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*} \tag{4.16}$$

και

(β΄) για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^k$ είναι

$$\lambda(A + x) = \lambda(A). \tag{4.17}$$

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε αρχικά ότι αν I ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ τότε και οι μεταθέσεις $A \pm x$ αυτού είναι επίσης ανοικτά και φραγμένα διαστήματα με $\mathrm{v}(I) = \mathrm{v}(I \pm x)$. Έτσι, για $A \subseteq \mathbb{R}^k$ και $x \in \mathbb{R}^k$ τυχόν είναι:

$$\lambda^*(A+x) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n) : I_n \text{ ανοικτό και φραγμένο διάστημα με } A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(I_n - x) : I_n - x \text{ ανοικτό και φραγμένο διάστημα με } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n - x) \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(J_n) : J_n \text{ ανοικτό και φραγμένο διάστημα με } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\} = \lambda^*(A).$$

(ii) Για το (α΄), θεωρούμε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}^k$ και για $B \subseteq \mathbb{R}^k$ θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap (A + x)) + \lambda^*(B \setminus (A + x)). \tag{4.18}$$

Είναι λοιπόν:

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B - x) = \lambda^*((B - x) \cap A) + \lambda^*((B - x) \setminus A) =$$

$$= \lambda^*((B \cap (A+x)) - x) + \lambda^*((B \setminus (A+x)) - x) = \lambda^*(B \cap (A+x)) + \lambda^*(B \setminus (A+x)),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε αρκετές φορές το (i). Άρα πράγματι $A + x \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$. Το (β΄) προκύπτει τώρα άμεσα από το (i) και το (α΄).

□

Με βάση το (i) της παραπάνω Πρότασης και την Παρατήρηση 3.2.1 είναι άμεσο ότι το μέτρο Lebesgue στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ είναι επίσης αναλλοίωτο στις μεταθέσεις. Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι το λ είναι *ουσιαστικά* το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ που έχει αυτή την ιδιότητα. Για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα που είναι ένα ανάλογο της Πρότασης:

Κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Παρατηρήστε ότι επιπλέον το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί αν βελτιωθεί ως εξής:

Αν D ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων με άκρα στο σύνολο D.

Η απόδειξη του τελευταίου αυτού ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Λήμμα 4.2.3. *Κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}^k$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων της μορφής:*

$$\Delta(n, p_1, p_2, ..., p_k) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : \frac{p_i}{2^n} \leq x_i < \frac{p_1+1}{2^n}, i = 1, 2, ..., k\right\}, \tag{4.19}$$

για $n \in \mathbb{N}$ και $p_1, p_2, ..., p_k \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό. Θα γράψουμε το G ως αριθμήσιμη ξένη ένωση συνόλων της μορφής (4.19). Για $n \in \mathbb{N}$ σταθερό θεωρούμε την οικογένεια Δ_n υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ με

$$\Delta_n = \{\Delta(n, p_1, p_2, ..., p_k) : p_1, p_2, ..., p_k \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.20}$$

Τα στοιχεία της Δ_n ορίζουν ένα «πλέγμα» στον $\mathbb{R}^k$ που επάγει μια διαμέριση αυτού σε k-διάστατους κύβους όγκου $1/2^{nk}$. Επίσης, για $n < m$ η διαμέριση Δ_m είναι *λεπτότερη* από την Δ_n, με την εξής έννοια: αν $A \in \Delta_n$ και $B \in \Delta_m$ με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $B \subseteq A$ (γιατί;).

Θα «εξαντλήσουμε» το σύνολο G από μέσα με τέτοιους κύβους. Ξεκινάμε με τους μεγαλύτερους ($n = 1$): θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E}_1 = \{A \in \Delta_1 : A \subseteq G\}. \tag{4.21}$$

Η $\mathcal{E}_1$ είναι σίγουρα αριθμήσιμη (αφού περιέχεται στην Δ_1), αλλά πιθανώς να είναι κενή. Στη συνέχεια, ψάχνουμε τους αμέσως μικρότερους κύβους ($n = 2$) που περιέχονται στο G, αλλά δεν τέμνουν αυτούς που βρήκαμε πριν (θυμηθείτε ότι θέλουμε ξένη ένωση). Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\mathcal{E}_2 = \{A \in \Delta_2 : A \subseteq G \text{ και } A \cap B = \emptyset \text{ για κάθε } B \in \mathcal{E}_1\}. \tag{4.22}$$

Γενικά, αν οι $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_n$ έχουν οριστεί, θεωρούμε την οικογένεια των αμέσως μικρότερων κύβων

$$\mathcal{E}_{n+1} = \left\{A \in \Delta_{n+1} : A \subseteq G \text{ και } A \cap B = \emptyset \text{ για κάθε } B \in \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j\right\}. \tag{4.23}$$

Κάθε $\mathcal{E}_n$ είναι φυσικά αριθμήσιμη και $\mathcal{E}_n \subseteq \Delta_n$, συνεπώς

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Έτσι, η $\mathcal{E}$ αποτελείται από αριθμήσιμα το πλήθος διαστήματα της μορφής (4.19) που περιέχονται στο G. Θα δείξουμε ότι

$$G = \bigcup \mathcal{E} = \bigcup \{A : A \in \mathcal{E}\}. \tag{4.24}$$

Έστω $x \in G$. Το G είναι ανοικτό, άρα υπάρχει μπάλα κέντρου x που περιέχεται στο G και συνεπώς υπάρχουν και σύνολα $C \in \bigcup_n \Delta_n$ ώστε $C \subseteq G$ και $x \in C$. Θεωρώ n_0 τον ελάχιστο φυσικό ώστε να υπάρχει $A \in \Delta_{n_0}$ με $A \subseteq G$ και $x \in A$. Τότε, είναι $A \in \mathcal{E}_{n_0}$, διότι αν υπήρχε $l < n_0$ και $B \in \Delta_l$ ώστε $A \cap B \neq \emptyset$ θα ήταν $A \subseteq B$ και άρα $x \in B$: άτοπο από την επιλογή του n_0. Έτσι, $x \in \bigcup \mathcal{E}_{n_0} \subseteq \bigcup \mathcal{E}$. Άρα, πράγματι ισχύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω μ ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ αναλλοίωτο στις μεταθέσεις διαστημάτων, δηλαδή με*

$$\mu(I+x)=\mu(I),\ \text{για κάθε } I \text{ διάστημα και } x\in\mathbb{R}^k$$

και $\mu(K)<\infty$ για κάθε $K\subseteq\mathbb{R}^k$ συμπαγές. Τότε υπάρχει $a\geq 0$ ώστε $\mu=a\cdot\lambda$, δηλαδή

$$\mu(A)=a\cdot\lambda(A),\ \text{για κάθε } A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ζητούμενη. Τότε, για το σύνολο

$$D=\{(x_1,x_2,...,x_k)\in\mathbb{R}^k: 0\leq x_i<1, i=1,2,...,k\}$$

είναι $\mu(D)\leq\mu(\overline{D})<\infty$ (αφού το $\overline{D}$ είναι συμπαγές) και $\mu(D)=a\cdot\lambda(D)=a\geq 0$. Θέτουμε λοιπόν $a=\mu(D)<\infty$.

Αν $a=0$, είναι $\mu(\mathbb{R}^k)=0$, αφού το $\mathbb{R}^k$ γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση μεταθέσεων του D (γιατί;). Άρα και $\mu=0$ από τη μονοτονία του μέτρου.

Αν $a>0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\nu:\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\to[0,\infty]$ με $\nu(A)=\frac{1}{a}\cdot\mu(A)$ για $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. Εύκολα βλέπουμε ότι το ν είναι μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ που είναι επιπλέον αναλλοίωτο στις μεταθέσεις διαστημάτων. Θα δείξουμε ότι $\nu=\lambda$. Για $n\in\mathbb{N}$, το $[-n,n)^k$ γράφεται ως ξένη ένωση $(2n)^k$ το πλήθος μεταθέσεων του D και άρα από την υπόθεση

$$\nu([-n,n)^k)=(2n)^k\nu(D)=(2n)^k=\lambda([-n,n)^k)$$

και συνεπώς, από το θεώρημα Μοναδικότητας (Πρόταση 2.2.1) αρκεί να δείξουμε ότι $\nu(G)=\lambda(G)$ για κάθε $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ανοικτό. Συνεπώς, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\nu(\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k))=\lambda(\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k))$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $p_1,p_2,...,p_k\in\mathbb{Z}$. Για $n\in\mathbb{N}$ και $p_1,p_2,...,p_k\in\mathbb{Z}$ το $\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k)$ είναι μια μετάθεση του $\Delta(n,0,0,...,0)$ και άρα

$$\nu(\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k))=\nu(\Delta(n,0,0,...,0)).$$

Όμως, το D γράφεται ως ξένη ένωση 2^{nk} αντιτύπων του του $\Delta(n,0,0,...,0)$ και άρα

$$1=\nu(D)=2^{nk}\nu(\Delta(n,0,0,...,0)).$$

Άρα, τελικά

$$\nu(\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k))=\frac{1}{2^{nk}}=\lambda(\Delta(n,p_1,p_2,...,p_k))$$

όπως θέλαμε.

□

Για $A\subseteq\mathbb{R}^k$ και $\rho\in\mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho\cdot A=\{\rho\cdot a: a\in A\}. \tag{4.25}$$

Για την πράξη αυτή ισχύουν όλες οι ιδιότητες (i)-(iv) που αναφέραμε και για το άθροισμα δύο συνόλων. Μπορούμε να δείξουμε ακριβώς όπως πριν ότι οι σ-άλγεβρες $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ διατηρούνται αναλλοίωτες από την πράξη αυτή (άσκηση).

Πρόταση 4.2.5. *Αν* $A \subseteq \mathbb{R}^k$ *και* $\rho \in \mathbb{R}$ *τότε ισχύει η σχέση*

$$\lambda^*(\rho \cdot A) = |\rho|^k \cdot \lambda^*(A). \tag{4.26}$$

Απόδειξη. Για $\rho = 0$ η ζητούμενη είναι προφανής. Για $\rho \neq 0$, παρατηρούμε ότι για ένα ανοικτό και φραγμένο διάστημα

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_k, b_k)$$

είναι

$$\rho \cdot I = (|\rho|a_1, |\rho|b_1) \times (|\rho|a_2, |\rho|b_2) \times ... \times (|\rho|a_k, |\rho|b_k)$$

και άρα $\mathrm{v}(\rho \cdot I) = |\rho|^k \mathrm{v}(I)$. Η συνέχεια είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.2 (i). $\square$

Γενικότερα, αν $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός και $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ μπορεί να δειχθεί ότι και $T(A) \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ (αφήνεται ως άσκηση). Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι την εξής γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας του T: αν $D = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq x_i < 1, i = 1, 2, ..., k\}$ τότε

$$\mathrm{v}(T(D)) = |\det(T)|. \tag{4.27}$$

Η απλή αυτή ιδιότητα γενικεύεται ως εξής:

Πρόταση 4.2.6. *Αν* $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *ένας γραμμικός μετασχηματισμός και* $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$*, τότε*

$$\lambda(T(A)) = |\det(T)| \cdot \lambda(A). \tag{4.28}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\det(T) \neq 0$ και θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα μοναδικότητας 4.2.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \to [0, \infty]$ με $\mu(A) = \lambda(T(A))$. Εύκολα βλέπουμε ότι το μ είναι ένα μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^k$ και επιπλέον για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $x \in \mathbb{R}^k$ είναι:

$$\mu(A + x) = \lambda(T(A + x)) = \lambda(T(A) + T(x)) = \lambda(T(A)) = \mu(A)$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταφορές και τη γραμμικότητα της T. Άρα από το Θεώρημα 4.2.4 είναι

$$\mu(A) = a \cdot \lambda(A)$$

όπου $a = \mu(D) = \lambda(T(D)) = |\det(T)|$. Έτσι, έχουμε τη ζητούμενη.
Αν τώρα $\det(T) = 0$, θα δείξουμε ότι $\mu = 0$ ή ισοδύναμα ότι $\lambda(T(\mathbb{R}^k)) = 0$. Αφού $\det(T) = 0$ ο T δεν είναι επί και άρα υπάρχει $m < n$ ώστε (δίχως βλάβη αλλάζουμε τη σειρά των μεταβλητών)

$$T(\mathbb{R}^k) = \{(x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0) : x_1, x_2, ..., x_m \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \tag{4.29}$$

όπου

$$J_n = [-n, n] \times [-n, n] \times ... \times [-n, n] \times \{0\} \times ... \times \{0\}.$$

Έτσι

$$\lambda(T(\mathbb{R}^k)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{v}(J_n) = 0,$$

όπως θέλαμε. Άρα πράγματι $\mu = 0$. $\square$

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με ένα θεώρημα που δείχνει κάπως τη δομη των συνόλων θετικού μέτρου Lebesgue. Η πρώτη εντύπωση που ίσως έχει κανείς είναι ότι ένα σύνολο θετικού μέτρου Lebesgue αναγκαστικά περιέχει μια ανοικτή μπάλα, το οποίο φυσικά είναι λάθος (για παράδειγμα το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα). Παρ' όλα αυτά, το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ισχύει κάτι ασθενέστερο αλλά παρ' όλα αυτά ιδιαίτερα χρήσιμο.

Θεώρημα 4.2.7 (Steinhaus). *Αν A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$B(0, \delta) \subseteq A - A. \tag{4.30}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$. Στην περίπτωση που ισχύει $\lambda(A) = \infty$ μπορούμε να βρούμε (από την εσωτερική κανονικότητα για παράδειγμα) $B \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ με $B \subseteq A$ και $0 < \lambda(B) < \infty$. Έτσι, αν για κάποιο $\delta > 0$ ισχύει $B(0, \delta) \subseteq B - B$ θα είναι σίγουρα και $B(0, \delta) \subseteq A - A$.

Υποθέτυμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ λοιπόν. Θα χρησιμοποιήσουμε την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.2, υπάρχουν $K \subseteq \mathbb{R}^k$ συμπαγές και $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό ώστε $K \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon, \quad \lambda(K) > \lambda(A) - \varepsilon. \tag{4.31}$$

Τότε $K \subseteq G$ και άρα ορίζεται καλά η απόσταση

$$\delta := \operatorname{dist}(K, G^c) > 0. \tag{4.32}$$

Έτσι, για $z \in K$ είναι $B(z, \delta) \subseteq G$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι το δ που ψάχνουμε. Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ με $\|x\| < \delta$ γράφεται ως διαφορά δύο στοιχείων του A. Θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο:

Ισχυρισμός. Είναι $B(0, \delta) \subseteq K - K$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^k$ με $\|x\| < \delta$. Θα βρούμε $z_1, z_2 \in K$ ώστε $x = z_1 - z_2$. Ισοδύναμα, ψάχνουμε $z \in K$ τέτοιο ώστε $x + z \in K$. Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο, είναι $K \cap (K + x) = \emptyset$ και άρα:

$$\lambda(K \cup (K + x)) = \lambda(K) + \lambda(K + x) = 2\lambda(K) > 2\lambda(A) - 2\varepsilon$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταθέσεις. Όμως $K \subseteq G$ και επιπλέον $K + x \subseteq G$, αφού αν $y \in K + x$, υπάρχει $z \in K$ ώστε $\|y - z\| = \|x\| < \delta$ και άρα $y \in G$. Συνεπώς,

$$\lambda(K \cup (K + x)) \leq \lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon.$$

Τελικά, είναι:

$$2\lambda(A) - 2\varepsilon < \lambda(A) + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda(A) < 3\varepsilon.$$

Εφ' όσον το $\varepsilon > 0$ με το οποίο ξεκινήσαμε ήταν τυχαίο, έχουμε $\lambda(A) = 0$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

□

4.3 Μη μετρήσιμα σύνολα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ και παρατηρήσαμε τους εγκλεισμούς

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k).$$

Το ερώτημα όμως αν αυτοί οι δύο εγκλεισμοί είναι γνήσιοι (δηλαδή, αν υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι μετρήσιμα και αν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel) δεν είναι καθόλου απλό. Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε παράδειγμα μη μετρήσιμου συνόλου. Η κατασκευή βασίζεται στο «αξίωμα της επιλογής» από την Θεωρία Συνόλων, το οποίο αποδεχόμαστε.

Αξίωμα της Επιλογής: Έστω $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ μια μη κενή οικογένεια ξένων, μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Τότε, υπάρχει ένα σύνολο E που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο x_a από κάθε σύνολο X_a. Δηλαδή, υπάρχει **συνάρτηση επιλογής** $f : A \to \Omega$ με $f(a) \in X_a$ για κάθε $a \in A$.

Σημείωση. Το Αξίωμα της Επιλογής, αν και φαίνεται «αθώο», αποδεικνύεται ανεξάρτητο από τα αξιώματα (Zermelo-Fraenkel) της Θεωρίας Συνόλων.

Θεώρημα 4.3.1 (Vitali). *Υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{4.33}$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in \mathbb{Q}\}. \tag{4.34}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.
Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.35}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$. Πράγματι, αν υπήρχαν $y_a, y_b \in E$ ώστε $y_a + q_n = y_b + q_m$, τότε θα είχαμε $0 \neq y_a - y_b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο ορισμού του E.
2. $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q}$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Ας υποθέσουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$+\infty = \lambda(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E).$$

Συνεπώς, $\lambda(E) > 0$. Από το Θεώρημα Steinhaus, το $E - E$ περιέχει διάστημα $(-\delta, \delta)$ για κάποιον $\delta > 0$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι το $E - E$ δεν μπορεί να περιέχει ρητό διαφορετικό από το 0: αν $x \neq y$ στο E τότε ο $x - y$ είναι άρρητος, από τον τρόπο ορισμού του E. Έπεται ότι το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο. □

Παρατήρηση 4.3.2. Μιμούμενοι αυτή την απόδειξη μπορούμε να δείξουμε το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου, τότε υπάρχει μη μετρήσιμο $E \subseteq A$.

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Μπορούμε, με παρόμοιο τρόπο, να αποδείξουμε την ύπαρξη μη μετρήσιμου $E \subseteq [0, 1]$, αποφεύγοντας την χρήση του Θεωρήματος Steinhaus.

Δεύτερη απόδειξη. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $[0, 1]$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}. \tag{4.36}$$

Παρατηρήστε ότι, αναγκαστικά, $x - y \in [-1, 1]$. Η $\sim$ χωρίζει το $[0, 1]$ σε κλάσεις ισοδυναμίας

$$E_x = \{y \in [0, 1] \mid y = x + q \text{ για κάποιον } q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}\}. \tag{4.37}$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{X} = \{X_a : a \in A\}$ την οικογένεια των διαφορετικών κλάσεων ισοδυναμίας, το αξίωμα της επιλογής μας λέει ότι υπάρχει ένα σύνολο $E = \{y_a : a \in A\} \subset [0, 1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο y_a από κάθε κλάση X_a. Ειδικότερα, αν $a \neq b$ στο A τότε $y_a - y_b \notin \mathbb{Q}$.
Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ και θεωρούμε την ακολουθία συνόλων

$$E_n := E + q_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.38}$$

Τα σύνολα E_n ικανοποιούν τα εξής:

1. $E_n \subseteq [-1, 2]$.
2. Αν $n \neq m$ τότε $E_n \cap E_m = \emptyset$.
3. $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Πράγματι, αν $x \in [0, 1]$ τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $x \in X_a$. Αυτό σημαίνει ότι $x = y_a + q$ για κάποιον $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Όμως, τότε υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $q = q_n$, δηλαδή, $x = y_a + q_n \in E_n$.

Υποθέτουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Τότε, το $E_n = E + q_n$ είναι μετρήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda(E_n) = \lambda(E)$. Από τις ιδιότητες των E_n και από τη μονοτονία και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου, παίρνουμε

$$1 = \lambda([0, 1]) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E) \leq 3,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το τελευταίο άθροισμα είναι είτε ίσο με 0 (αν $\lambda(E) = 0$) είτε με $+\infty$ (αν $\lambda(E) > 0$). Συνεπώς, το E δεν είναι μετρήσιμο σύνολο.

4.4 Μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε τον πρώτο εγκλεισμό για τον οποίο μιλήσαμε παραπάνω. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνήσιος, δηλαδή ότι υπάρχουν μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που δεν είναι Borel. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις για αυτό τον ισχυρισμό, μια συνολοθεωρητική που χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των διατακτικών αριθμών και μια κατασκευαστική που βασίζεται στη συνάρτηση Cantor-Lebesgue που ορίζουμε στην παράγραφο 4.4.2. Και για τις δύο αυτές αποδείξεις χρειαζόμαστε μερικές βασικές ιδιότητες του συνόλου του Cantor το οποίο θα κατασκευάσουμε.

4.4.1 Το σύνολο του Cantor

§1. Κατασκευή του συνόλου του Cantor

Θεωρούμε το διάστημα $C_0 = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\big(1/3, 2/3\big)$. Ονομάζουμε C_1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_1 = \big[0, 1/3\big] \cup \big[2/3, 1\big].$$

Το C_1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\big[0, 1/3\big]$ και $\big[2/3, 1\big]$ σε τρία ίσα διαστήματα και, από καθένα από αυτά, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε C_2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$C_2 = \big[0, 1/9\big] \cup \big[2/9, 1/3\big] \cup \big[2/3, 7/9\big] \cup \big[8/9, 1\big].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο C_n έτσι ώστε η ακολουθία (C_n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$.
2. Το C_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $1/3^n$.

Το *σύνολο του Cantor* είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{4.39}$$

Σημείωση. Τα διαστήματα της μορφής $\big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

§2. Ιδιότητες του συνόλου του Cantor

Το C είναι σίγουρα μη κενό, αφού περιέχει τα άκρα όλων των τριαδικών διαστημάτων που απαρτίζουν κάθε C_n (όπως θα δούμε παρακάτω περιέχει και πολλά άλλα σημεία). Επίσης το C είναι κλειστό, αφού η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Επιπλέον, το C έχει τις εξής ιδιότητες:

(1) *Το C είναι τέλειο σύνολο*, δηλαδή είναι κλειστό και κάθε σημείο του C είναι σημείο συσσώρευσης του C.

Απόδειξη. Είδαμε ότι το C είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C παρατηρούμε ότι για το τυχόν $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Οι ακολουθίες $(\alpha_n(x))$ και $(\delta_n(x))$ των αριστερών και δεξιών άκρων των $I_n(x)$ αντίστοιχα περιέχονται στο C, καθεμία από αυτές συγκλίνει στο x, και η μία τουλάχιστον από τις δύο δεν είναι τελικά σταθερή. Άρα, το x είναι σημείο συσσώρευσης του C. □

(2) *Το C έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με* 0.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $C \subset C_n$ και $\lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$, αφού το C_n είναι ένωση 2^n ξένων ανά δύο κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα,

$$\lambda^*(C) \leq \lambda^*(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda^*(C) = 0$. □

Παρατήρηση. Ειδικότερα, το C δεν περιέχει κανένα διάστημα.

(3) *Το C είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Από ένα γενικό θεώρημα της Τοπολογίας, κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αφού δείξαμε ότι το C είναι τέλειο, έπεται ο ισχυρισμός. Θα δώσουμε όμως μια δεύτερη απόδειξη, η οποία μάς δίνει την αφορμή να δούμε μια διαφορετική περιγραφή του συνόλου C που παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον.

Μπορούμε να ορίσουμε μία ένα προς ένα και επί απεικόνιση Φ του C στο σύνολο

$$\{0, 2\}^{\mathbb{N}} = \big\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{για κάθε } n,\ \alpha_n = 0 \text{ ή } \alpha_n = 2\big\}. \tag{4.40}$$

Το $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ είναι υπεραριθμήσιμο (θυμηθείτε το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor). Άρα, το C είναι υπεραριθμήσιμο. Η απεικόνιση Φ ορίζεται ως εξής:

Για κάθε $x \in C$ υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, ώστε: $I_1(x) \supset I_2(x) \supset \cdots$, και για κάθε n, $x \in I_n(x)$ και το $I_n(x)$ είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n.

Με βάση αυτήν την ακολουθία διαστημάτων ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $\alpha_1^x = 0$ αν $I_1(x) = \big[0, 1/3\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[0, 1/3\big]$) και $\alpha_1^x = 2$ αν $I_1(x) = \big[2/3, 1\big]$ (δηλαδή, αν $x \in \big[2/3, 1\big]$).

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Για κάθε n, αν $I_n(x) = \big[k/3^n, (k+1)/3^n\big]$ τότε το $I_{n+1}(x)$ είναι ένα από τα δύο διαστήματα $\big[k/3^n, (k/3^n)+(1/3^{n+1})\big]$, $\big[(k/3^n)+(2/3^{n+1}), (k+1)/3^n\big]$: εκείνο που περιέχει το x. Θέτουμε $\alpha_{n+1}^x = 0$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το πρώτο διάστημα, και $\alpha_{n+1}^x = 2$ αν $I_{n+1}(x)$ είναι το δεύτερο διάστημα.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq y$, τότε για κάποιο n θα ισχύει $I_n(x) \neq I_n(y)$, αλλιώς θα έπρεπε να έχουμε $|x - y| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν n_0 είναι ο πρώτος φυσικός για τον οποίο $I_{n_0}(x) \neq I_{n_0}(y)$, τότε από τον ορισμό των α_n^x βλέπουμε ότι $\alpha_{n_0}^x \neq \alpha_{n_0}^y$, άρα οι δύο ακολουθίες $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha_n^y)_{n=1}^{\infty}$ είναι διαφορετικές. Αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $\Phi : C \to \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ με $\Phi(x) = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty}$ είναι ένα προς ένα.

Αντίστροφα, αν $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία από 0 ή 2, η ακολουθία αυτή ορίζει μοναδική ακολουθία τριαδικών διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ με $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, ώστε για κάθε n το I_n να είναι ένα από τα τριαδικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^n}$ που απαρτίζουν το C_n:

(α) $n = 1$: Θέτουμε $I_1 = \big[0, 1/3\big]$ αν $\alpha_1 = 0$ ή $I_1 = \big[2/3, 1\big]$ αν $\alpha_1 = 2$.

(β) Γενικά, το I_{n+1} ορίζεται να είναι ένα από τα δύο τριαδικά υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n+1}}$ του I_n που περιέχονται στο C_{n+1}: το αριστερό αν $\alpha_{n+1} = 0$, ή το δεξιό αν $\alpha_{n+1} = 2$.

Αφού τα μήκη των διαστημάτων I_n φθίνουν στο 0, η τομή τους είναι μονοσύνολο: έστω

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(Θυμηθείτε ότι η τομή είναι μη κενή λόγω του θεωρήματος των κιβωτισμένων διαστημάτων). Αφού $I_n \subset C_n$ για κάθε n, είναι φανερό ότι $x \in C$. Επίσης, $I_n(x) = I_n$ για κάθε n, και από τον τρόπο ορισμού των I_n έχουμε

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} = \Phi(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η Φ είναι επί του $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, άρα το C είναι υπεραριθμήσιμο. $\square$

Ο τρόπος ορισμού της Φ μάς οδηγεί σε μια άλλη περιγραφή του συνόλου του Cantor.

§3. Τριαδική παράσταση αριθμού

Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $x \in [0,1]$. Αν $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ με $a_n \in \{0,1,2\}$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ (ή η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$) λέγεται **τριαδική παράσταση** του x. Γράφουμε $x = (a_1, a_2, \ldots)$ αντί της $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Κάθε αριθμός x στο διάστημα $[0,1]$ έχει τριαδική παράσταση. Η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μπορεί να επιλεγεί ως εξής: Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/3]$, $(1/3,2/3)$ και $[2/3,1]$. Θέτουμε

$$a_1 = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1/3] \\ 1 & , x \in (1/3,2/3) \\ 2 & , x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

Με αυτόν τον ορισμό, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\frac{a_1}{3} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}. \tag{4.41}$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in [0,1/3]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $[0,1/9]$, $(1/9,2/9)$, $[2/9,1/3]$ και θέτουμε $a_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το a_2 όταν $x \in (1/3,2/3)$ ή $x \in [2/3,1]$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} \leq x \leq \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}. \tag{4.42}$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των a_n με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}. \tag{4.43}$$

Αφού λοιπόν

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n},$$

έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ συγκλίνει στον x, δηλαδή

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Είναι φανερό ότι αν $x \neq y$ τότε η τριαδική παράσταση του x είναι διαφορετική από αυτήν του y, αφού μια σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια.

Υπάρχουν όμως αριθμοί $x \in [0,1]$ που έχουν δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις. Για παράδειγμα, αν $x = 1/3$ τότε

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0}{3^k} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k}.$$

(Με τον τρόπο επιλογής της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θα βρίσκαμε την δεύτερη παράσταση).

Γενικότερα, ισχύει το εξής: Ο $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικές τριαδικές παραστάσεις αν και μόνο αν ο x είναι τριαδικός ρητός: δηλαδή αν $x = k/3^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $1 \leq k \leq 3^n$ (αφήνεται ως άσκηση).

Το Θεώρημα που ακολουθεί δίνει έναν άλλο τρόπο περιγραφής του συνόλου του Cantor.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω $x \in [0,1]$. Τότε, $x \in C$ αν και μόνο αν ο x έχει μία τριαδική παράσταση η οποία περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2.* □

Απόδειξη. Έστω $x \in [0,1]$. Αν η ακολουθία (a_n) επιλεγεί με τον τρόπο που παρουσιάσαμε παραπάνω, τότε ισχύει το εξής: $x \in C$ αν και μόνο αν $a_n \neq 1$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $x \in C$ τότε ο x έχει μία τριαδική παράσταση που περιέχει μόνο τα ψηφία 0 και 2. Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται ως άσκηση. □

§4. Υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού χρειαζόμαστε το εξής συνολοθεωρητικό Λήμμα:

Λήμμα 4.4.2. *Αν X είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε $|\mathcal{B}(X)| \leq \mathfrak{c}$, όπου $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ το συνεχές. Πιο συγκεκριμένα, αν $X = \mathbb{R}$, έχουμε $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο $D = \{x_1, x_2, ...\}$ στο X. Τότε, η οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{B(x_n, q_m) : n, m = 1, 2, ...\},$$

όπου $\{q_m : m = 1, 2, ...\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X, δηλαδή κάθε ανοικτό σύνολο στο X γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{C}$ - εξηγήστε γιατί. Κατά συνέπεια, κάθε ανοικτό σύνολο ανήκει στην $\sigma(\mathcal{C})$ και άρα $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C})$. Για κάθε αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό α ορίζουμε υποοικογένειες $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}(X)$ ως εξής: $\mathcal{B}_0 = \mathcal{C}$,

$$\mathcal{B}_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{B}_\alpha$$

για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό β και $\mathcal{B}_{\alpha+1}$ την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων και των συμπληρωμάτων στοιχείων της $\mathcal{B}_\alpha$. Αποδεικνύεται τότε ότι κάθε $\mathcal{B}_\alpha$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το συνεχές και ότι

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \text{ αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός}\}.$$

Επομένως, πράγματι, η $\mathcal{B}(X)$ έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο από το συνεχές, δηλαδή $|\mathcal{B}(X)| \leq \mathfrak{c}$.

Στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ τώρα, η απεικόνιση $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\phi(x) = (-\infty, x)$ είναι φυσικά $1-1$ και άρα $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}(\mathbb{R})|$. Η ισότητα $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ έπεται τώρα από το Θεώρημα Schröder-Bernstein. □

Πρόταση 4.4.3. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι Borel.*

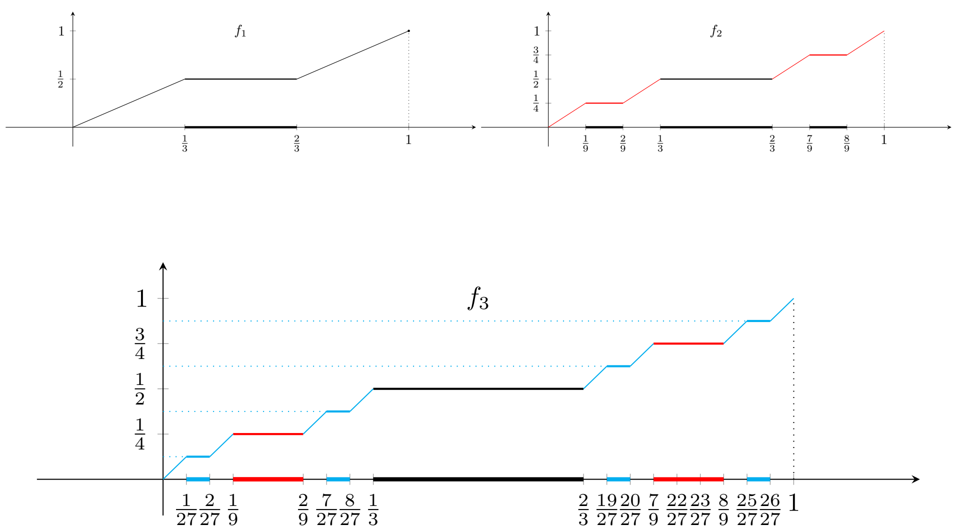
Απόδειξη. Αν C το σύνολο του Cantor, από την πληρότητα του λ και τη σχέση $\lambda(C) = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}.$$

Συνεπώς, είναι $|\mathcal{M}_{\lambda^*}| \geq |\mathcal{P}(C)| > |C| = \mathfrak{c}$. Ο ζητούμενος γνήσιος εγκλεισμός έπεται από το προηγούμενο Λήμμα: είναι $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$. □

4.4.2 Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.



Σχήμα 4.2: Κατασκευή της συνάρτησης Cantor-Lebesgue

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3]\cup[2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3,2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0)=0$ και $f(1/3)=1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3)=1/2$ και $f(1)=1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1]\setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0)=0$ και $f_2(1)=1$.

Πρόταση 4.4.4. *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C))=1$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$.
2. Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και
$$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots$$
στο J_k^n.
3. Ισχύει
$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n=1,2,3,\ldots.$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m>n$ τότε
$$\|f_m-f_n\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1}\|f_{k+1}-f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$
όταν $m,n\to\infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n\to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0)=0$ και $f_n(1)=1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C)=[0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y\in[0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x\in C$. Από την $f(C)=[0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C))=1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1]\setminus C)=1$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x\notin C$. Πράγματι, αν $x\notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x)=0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 4.4.5. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{R}$, το $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}. \tag{4.44}$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 4.4.6. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1] \setminus C$ στο $\{f(J)\} + J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1] \setminus C)) = \sum \lambda(J) = 1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C)) = 1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 4.4.5 το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

4.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α′.

1. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

2. Δώστε παράδειγμα ενός Lebesgue μετρήσιμου υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $\pi_1(A)$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμο, όπου $\pi_1(x,y) = x$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη.

3. Αν C το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $\frac{1}{4} \in C$, παρόλο που το $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα διαστήματα που ορίζουν το σύνολο του Cantor.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \geq \delta$.

Ομάδα Β′.

5. Έστω E, F δυο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K με $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = a$.

6. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

(β) Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{m}$ ανοικτών διαστημάτων με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} I_n \quad \text{ισχύει} \quad \sum_{n=1}^{m} \lambda(I_n) \geq 1.$$

7. Έστω $\{q_n\}_{n\geq 1}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο B με $\lambda(B) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$ να έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $|x - q_n| \geq 1/n^2$.

8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

(i) Δείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(ii) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

(β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

9. (α) Έστω G φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

10. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

11. Αν C το σύνολο του Cantor δείξτε ότι $C - C = [-1,1]$. Συνάγετε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus.

12. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με την διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

Ομάδα Γ΄.

13. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.

14. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

15. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} \lambda(E \cap (E+t)) = \lambda(E).$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

16. Έστω μ ένα μη αρνητικό μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F) = 1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(F) < 1$.

17. Έστω E, F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείξτε ότι το $E + F$ περιέχει διάστημα.

18. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι $\lambda(E) = 0$.

19. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0,1] : \text{ υπάρχει } x \in [0,1] \text{ ώστε } f(x+t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα και μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0,1] : \ 1 - t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0,1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\lambda(A) \geq 1/2$.

20. Αποδείξτε ότι: αν $\lambda(E) > 0$ και για κάθε $x, y \in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x+y) \in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

21. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\right) = 0.$$

22. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0,1]$ ισχύει

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Σε κάθε κλάδο των Μαθηματικών, εκτός από τα διάφορα αντικείμενα που μελετάμε ασχολούμαστε και με τις «καλές» συναρτήσεις μεταξύ αυτών, δηλαδή εκείνες τις συναρτήσεις που σέβονται τη δομή των αντικειμένων. Στην Τοπολογία αυτές είναι οι συνεχείς συναρτήσεις, στη Διαφορική Γεωμετρία οι διαφορίσιμες συναρτήσεις, στη Θεωρία Ομάδων οι ομομορφισμοί ομάδων κ.ο.κ.. Το αντίστοιχο αντικείμενο στη Θεωρία Μέτρου είναι οι *μετρήσιμες συναρτήσεις*. Οι μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αυτές για τις οποίες θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Θυμηθείτε, από την Εισαγωγή, ότι η βασική ιδέα του Lebesgue ήταν να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_X f$ μιας συνάρτησης f σε ένα σύνολο X από αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{t-1} y_k \mu(\{x \in X : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}) \tag{5.1}$$

όπου $\{y_0 < y_1 < ... < y_t\}$ μια διαμέριση του πεδίου τιμών της f. Για μια τέτοια συνάρτηση λοιπόν, καταλαβαίνουμε ότι απαιτούνται τα εξής:

1. Η f θα πρέπει να ορίζεται σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και να λαμβάνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$.
2. Τα σύνολα
$$B_k = \{x \in X : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}$$
πρέπει να είναι μετρήσιμα (για οποιαδήποτε επιλογή των y_k, y_{k+1}), δηλαδή στοιχεία της $\mathcal{A}$.

Φυσικά, στη συνέχεια που θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θα απαιτούμε και την ύπαρξη ενός μέτρου μ στο $(X, \mathcal{A})$ για να ορίζονται καλά τα αθροίσματα (5.1), αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο προς το παρόν.

5.1 Πραγματικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Οδηγούμαστε λοιπόν στον εξής Ορισμό:

Ορισμός 5.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος.

(i) Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *μετρήσιμη ως προς* $\mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$-μετρήσιμη) αν

$$[f \leq b] := f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

(ii) Αν μ ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ η f λέγεται *μ-μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη.

(iii) Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{R}^k$ κάθε λ-μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται *Lebesgue μετρήσιμη*.

(iv) Αν ο X είναι μετρικός χώρος και η f είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη, τότε η f λέγεται *Borel μετρήσιμη*.

Μερικοί απλοί χαρακτηρισμοί της μετρησιμότητας δίνονται στην ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 5.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.*
2. *$[f < b] = \{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*
3. *$[f \geq b] = \{x \in X : f(x) \geq b\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*
4. *$[f > b] = \{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Για $b \in \mathbb{R}$, γράφουμε

$$[f < b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[f \leq b - \frac{1}{n}\right] \quad (5.3)$$

αφού, για $x \in X$ είναι $f(x) < b$ αν και μόνον αν υπάρχει n ώστε $f(x) \leq b - \frac{1}{n}$. Άρα $[f < b] \in \mathcal{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f \geq b] = [f < b]^c \quad (5.4)$$

και άρα $[f \geq b] \in \mathcal{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Όπως και στην πρώτη συνεπαγωγή, για $b \in \mathbb{R}$ γράφουμε

$$[f > b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[f \geq b + \frac{1}{n}\right] \quad (5.5)$$

και συνεπώς $[f > b] \in \mathcal{A}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f \leq b] = [f > b]^c \quad (5.6)$$

άρα $[f \leq b] \in \mathcal{A}$ και κατά συνέπεια η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

□

Παραδείγματα 5.1.3. (α΄) Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $B \subseteq X$. Η συνάρτηση $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ με

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases} \tag{5.7}$$

είναι η *χαρακτηριστική συνάρτηση* του συνόλου B. Η χ_B είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν και μόνον αν $B \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον υπολογισμό

$$[\chi_B \le b] = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } b < 0 \\ B^c, & \text{αν } 0 \le b < 1 \\ X, & \text{αν } b \ge 1. \end{cases} \tag{5.8}$$

□

(β΄) Αν $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ τότε

$$f \text{ συνεχής } \Rightarrow f \text{ Borel μετρήσιμη } \Rightarrow f \text{ Lebesgue μετρήσιμη.} \tag{5.9}$$

Απόδειξη. Αν η f είναι συνεχής, τότε για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το $[f \le b] = f^{-1}((-\infty, b])$ θα είναι κλειστό σύνολο (αφού το $(-\infty, b]$ είναι κλειστό) άρα και σύνολο Borel. (Παρατηρήστε ότι προκύπτει και από το Λήμμα 4.4.5 σε συνδυασμό με την προηγούμενη πρόταση.) Η δεύτερη συνεπαγωγή έπεται άμεσα από τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$. □

(γ΄) Αν I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση τότε η f είναι Borel μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$a = \sup[f \le b] = \sup\{x \in I : f(x) \le b\}.$$

Αφού f αύξουσα, αν $t, s \in I$ με $f(t) \le b$ και $s < t$ τότε είναι και $f(s) \le b$. Κατά συνέπεια

$$[f \le b] = \begin{cases} I \cap (-\infty, a], & \text{αν } a \in I \text{ και } f(a) \le b \\ I \cap (-\infty, a), & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{5.10}$$

Σε κάθε περίπτωση $[f \le b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Φυσικά το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για φθίνουσες συναρτήσεις.

Για να αναφερθούμε στους περιορισμούς μετρήσιμων συναρτήσεων χρειαζόμαστε τον εξής Ορισμό:

Ορισμός 5.1.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $C \subset X$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}. \tag{5.11}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{A}_C$ είναι μια σ-άλγεβρα στο C (άσκηση) που λέγεται *ίχνος* (ή περιορισμός) της $\mathcal{A}$ στο C.

Μια συνάρτηση $f : C \to [-\infty, \infty]$ λέγεται *μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_C$-μετρήσιμη, δηλαδή αν

$$[f \leq b] \in \mathcal{A}_C, \quad \text{για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Αν όμως $C \in \mathcal{A}$ παρατηρούμε ότι $\mathcal{A}_C = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq C\}$ και άρα

$$f \text{ μετρήσιμη} \quad \Leftrightarrow \quad [f \leq b] \in \mathcal{A}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Σχετικά ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$.*

(i) Αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και $C \subseteq X$ τότε και η $f|_C$ είναι $\mathcal{A}_C$-μετρήσιμη.

(ii) Αν (C_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, τότε

$$f \ \mathcal{A}\text{–μετρήσιμη} \quad \Leftrightarrow \quad f|_{C_n} \ \mathcal{A}_{C_n}\text{–μετρήσιμη για κάθε } n. \tag{5.12}$$

Απόδειξη. (i) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f|_C \leq b] = \{x \in C : f(x) \leq b\} = C \cap [f \leq b] \in \mathcal{A}_C.$$

Άρα η $f|_C$ είναι πράγματι μετρήσιμη.

(ii) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f \leq b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap [f \leq B]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f|_{C_n} \leq b] \in \mathcal{A},$$

δηλαδή η f είναι μετρήσιμη.

□

Πρόταση 5.1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $Y \subseteq X$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{B}(Y)$ και

(ii) Αν μια $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι Borel μετρήσιμη τότε και η $f|_Y : Y \to [-\infty, \infty]$ είναι Borel μετρήσιμη.

Απόδειξη. (i) Πρέπει να δείξουμε ότι ένα $B \subseteq Y$ είναι σύνολο Borel στο $Y \Leftrightarrow$ υπάρχει A σύνολο Borel στο X με $B = A \cap Y$. Γνωρίζουμε ότι τα ανοικτά σύνολα στο Y είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής $G \cap Y$ με $G \subseteq X$ ανοικτό.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \cap Y \in \mathcal{B}(Y)\}. \tag{5.13}$$

Εύκολα δείχνει κανείς (άσκηση) ότι η $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X που περιέχει τα ανοικτά του X. Άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$, δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) παραπάνω. Για την αντίστροφη, παρατηρούμε ότι αν U ανοικτό στο Y τότε $U = G \cap Y$ για κάποιο G ανοικτό στο X και άρα $U \in \mathcal{B}(X)_Y$. Έτσι η $\mathcal{B}(X)_Y$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά του Y και κατά συνέπεια κάθε Borel σύνολο στο Y ανήκει στην $\mathcal{B}(X)_Y$, δηλαδή ισχύει η ζητούμενη.

(ii) Σύμφωνα με το (i) της προηγούμενης Πρότασης η $f|_Y$ είναι $\mathcal{B}(X)_Y$ μετρήσιμη και από το (i) που μόλις δείξαμε είναι και Borel μετρήσιμη.

□

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μερικές ακόμη ιδιότητες των μετρήσιμων συναρτήσεων που θα οδηγήσουν αργότερα σε έναν αρκετά γενικότερο ορισμό της μετρησιμότητας.

Πρόταση 5.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Για μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Είναι $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ για κάθε $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό.

(iii) Είναι $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$ για κάθε $F \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό.

(iv) Είναι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq [-\infty, \infty] : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}. \tag{5.14}$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $[-\infty, \infty]$. Η απόδειξη αυτού αφήνεται ως άσκηση. Οι προτάσεις (i)-(iv) έχουν τις εξής ισοδύναμες:

(i)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$.

(ii)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(iii)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(iv)′ Η $\mathcal{F}$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Όμως, επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$, τα ανοικτά σύνολα και τα κλειστά σύνολα και επιπλέον η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα, πράγματι η (iv)′ είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις (i)′-(iii)′ όπως θέλαμε. □

5.2 Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Ξεκινάμε τώρα να μελετάμε τις πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων. Θα δείξουμε στα παρακάτω ότι το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων συμπεριφέρεται «φυσιολογικά» ως προς τις συνήθεις πράξεις καθώς και τα όρια ακολουθιών.

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) $[f < g] = \{x \in X : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$,

(ii) $[f \leq g] = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{A}$ και

(iii) $[f = g] = \{x \in X : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. (i) Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι: για ένα $x \in X$

$$f(x) < g(x) \text{ αν και μόνο αν υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ με } f(x) < q < g(x).$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$[f < g] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big([f < q] \cap [g > q]\big) \tag{5.15}$$

το οποίο είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ αφού οι f, g είναι μετρήσιμες και το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Είναι

$$[f \leq g] = [g < f]^c$$

το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο από το (i).

(iii) Είναι

$$[f = g] = [f \leq g] \setminus [f < g]$$

το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο από τα (i) και (ii).

□

Πρόταση 5.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε*

(i) Οι συναρτήσεις $f \vee g = \max\{f, g\}$ και $f \wedge g = \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες.

(ii) Οι συναρτήσεις $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$ είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. (i) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f \vee g \leq b] = [f \leq b] \cap [g \leq b] \in \mathcal{A} \tag{5.16}$$

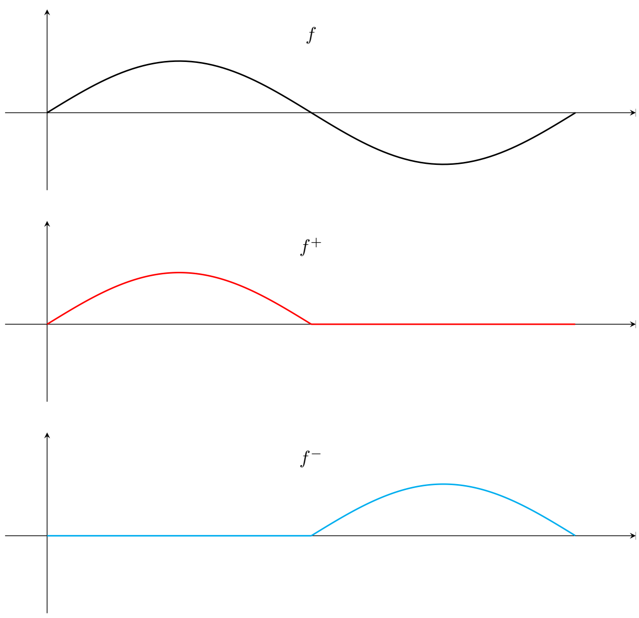
και

$$[f \wedge g \leq b] = [f \leq b] \cup [g \leq b] \in \mathcal{A}. \tag{5.17}$$

Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έπεται άμεσα από το (i) αφού οι 0 και $-f$ είναι μετρήσιμες.

□



Σχήμα 5.1: Οι συναρτήσεις f^+ και f^-

Παρατήρηση 5.2.3. Οι συναρτήσεις f^+ και f^- είναι ιδιαίτερα σημαντικές και θα μας φανούν πολύ χρήσιμες στα παρακάτω. Είναι το θετικό και το αρνητικό μέρος της συνάρτησης f. Για μια οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^- \tag{5.18}$$

η απόδειξη των οποίων αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 5.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

(i) Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.

(ii) Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.

(iii) Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. (i) Για $b \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε

$$[\sup_n f_n \le b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n \le b] \in \mathcal{A} \tag{5.19}$$

και

$$[\inf_n f_n < b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [f_n < b] \in \mathcal{A} \tag{5.20}$$

και έτσι το ζητούμενο έπεται.

(ii) Γνωρίζουμε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία αριθμών τότε

$$\limsup_n a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\ge n} a_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\ge n} a_k \right) \tag{5.21}$$

και άρα

$$\limsup_n f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\ge n} f_k \right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\ge n} f_k \right).$$

Συνεπώς, από το (i) οι $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(iii) Αν $f = \lim_n f_n$, τότε είναι φυσικά και $f = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$ η οποία είναι μετρήσιμη από το (ii).

□

Η τελευταία ιδιότητα της παραπάνω Πρότασης είναι εξαιρετικά σημαντική. Σύμφωνα με αυτή αν μια ακολουθία συναρτήσεων «ολοκληρώνεται» (δηλαδή είναι μετρήσιμες), τότε το ίδιο θα ισχύει και για το κατά σημείο όριο τους. Θυμηθείτε ότι αυτή είναι μια ιδιότητα που φυσικά δεν ίσχυε για το ολοκλήρωμα Riemann και άρα έχουμε ένα πρώτο δείγμα της γενικότητας στην οποία εφαρμόζεται η Θεωρία Ολοκλήρωσης του Lebesgue.

Ορισμός 5.2.5. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *Baire-1 συνάρτηση* αν υπάρχει ακολουθία $f_n : X \to \mathbb{R}$ συνεχών συναρτήσεων ώστε η f να είναι το κατά σημείο όριο των f_n.

Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *Baire-2 συνάρτηση* αν είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Baire-1 συναρτήσεων και γενικότερα για $n \geq 2$ λέγεται *Baire-n συνάρτηση* αν είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας Baire-(n-1) συναρτήσεων.

Με μια απλή επαγωγή, χρησιμοποιώντας ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι Borel μετρήσιμες και το (iii) της τελευταίας Πρότασης, έχουμε ότι κάθε Baire-n συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη.

Εφαρμογή 5.2.6. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

Απόδειξη. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} n\big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\big)$$

από την Αρχή της Μεταφοράς. Άρα η f' είναι Baire-1 συνάρτηση και άρα Borel μετρήσιμη. □

Επιστρέφουμε στις πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων και αποδεικνύουμε τα εξής:

Πρόταση 5.2.7. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος, $f,g : X \to [0,\infty]$ δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και ένα $a \geq 0$. Τότε:*

(i) Η $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(ii) Η $f+g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση

Απόδειξη. (i) Αν $a = 0$ η $a \cdot f$ είναι η μηδενική συνάρτηση που είναι προφανώς μετρήσιμη. Αν $a > 0$ τώρα, για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[af \leq b] = \left[f \leq \frac{b}{a}\right] \in \mathcal{A}$$

και άρα η $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Για $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$[f+g<b] = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big([f<q] \cap [g<b-q]\big)$$

σκεπτόμενοι ακριβώς όπως στο (i) της Πρότασης 5.2.1. Άρα, πράγματι και η $f+g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

□

Πρόταση 5.2.8. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος, $f,g : X \to \mathbb{R}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $a \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) Η συνάρτηση $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Οι συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$ είναι μετρήσιμες.

(iii) Οι συναρτήσεις f^2 και $f \cdot g$ είναι μετρήσιμες.

(iv) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.

(v) Η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη είναι ίδια με το (i) της προηγούμενης Πρότασης εκτός από την περίπτωση $a < 0$. Τότε για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[a \cdot f \leq b] = \left[f \geq \frac{b}{a}\right] \in \mathcal{A}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Αποδεικνύεται ακριβώς όπως το (ii) της προηγούμενης Πρότασης, αφού και η $-g$ είναι μετρήσιμη.

(iii) Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό για την f^2. Αν $b \leq 0$ είναι

$$[f^2 < b] = \emptyset$$

ενώ αν $b > 0$ είναι

$$[f^2 < b] = [f < \sqrt{b}] \cap [f > -\sqrt{b}] \in \mathcal{A}. \tag{5.22}$$

Άρα, πράγματι η f^2 είναι μετρήσιμη. Για την $f \cdot g$ τώρα, γράφουμε

$$f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \tag{5.23}$$

και άρα από τα παραπάνω είναι κι αυτή μετρήσιμη.

(iv) Λόγω του (iii) αρκεί να δειχθεί ότι η $1/g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το σύνολο $A = [g > 0] \in \mathcal{A}$ και για $b \in \mathbb{R}$ γράφουμε

$$\left[\frac{1}{g} \leq b\right] = ([bg \geq 1] \cap A) \cup ([bg \leq 1] \cap A^c) \in \mathcal{A}, \tag{5.24}$$

αφού και η $b \cdot g$ είναι μετρήσιμη. Άρα και η $1/g$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(v) Γράφουμε

$$|f| = f^+ + f^-$$

(θυμηθείτε την Παρατήρηση 5.2.3) και συμπεραίνουμε ότι η $|f|$ είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 5.2.2 και το (ii).

□

5.3 Απλές συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες απλές συναρτήσεις που έχουν στη Θεωρία Ολοκλήρωσης του Lebesgue τη θέση που είχαν οι κλιμακωτές συναρτήσεις στην ολοκλήρωση κατά Riemann. Ξεκινάμε με τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *απλή* αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Κάθε απλή συνάρτηση γράφεται στη μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \tag{5.25}$$

όπου $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι μια οικογένεια μετρήσιμων υποσυνόλων του X και $a_j \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, είναι εμφανές ότι κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής είναι απλή.

Φυσικά, δεν υπάρχει μοναδική τέτοια παράσταση της s, αλλά μπορούμε να «ξεχωρίσουμε» μια. Αν θέσουμε $s(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ με $a_i \neq a_j$ για $i \neq j$ και στη συνέχεια $A_j = \{x \in X : s(x) = a_j\}$ τότε η $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι μια διαμέριση του X σε μη κενά σύνολα και είναι πάλι

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}.$$

Η τελευταία αυτή παράσταση της s θα λέγεται *κανονική μορφή* της s και είναι μοναδική.

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου (Θεώρημα 5.3.3) δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι το κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών συναρτήσεων. Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 5.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.*

(i) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο P του $[0, \infty)$ με $0 \in P$, ας πούμε

$$P = \{0 = a_0 < a_1 < ... < a_n\},$$

θέτουμε

$$s^P = \sum_{j=0}^{n} a_j \chi_{A_j}, \tag{5.26}$$

όπου $A_j = [a_j \leq f < a_{j+1}]$ για $0 \leq j \leq n-1$ και $A_n = [f \geq a_n]$. Τότε η s^P είναι μια απλή συνάρτηση με $0 \leq s^P \leq f$ και για $x \in X$ με $f(x) < a_n$ ισχύει η ανισότητα

$$0 \leq f(x) - s^P(x) < \|P\|, \tag{5.27}$$

όπου $\|P\| = \max\{a_{j+1} - a_j : 0 \leq j \leq n-1\}$.

(ii) Για κάθε $P, Q \subseteq [0, \infty)$ πεπερασμένα με $0 \in P$ και $P \subseteq Q$ ισχύει $s^P \leq s^Q$.

Απόδειξη. Πριν μπούμε στις λεπτομέρειες της απόδειξης πρέπει να καταλάβουμε την ιδέα της κατασκευής των συναρτήσεων s^P. Όπως είπαμε και πριν, για μια δεδομένη μη αρνητική και μετρήσιμη συνάρτηση f ψάχνουμε μια αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών συναρτήσεων που να την προσεγγίζει (αναγκαστικά «από κάτω»). Οι συναρτήσεις s^P κατασκευάστηκαν λοιπόν ως εξής:

1. Διαλέξαμε μια αυθαίρετη «διαμέριση»[1] $P = \{0 = a_0 < a_1 < ... < a_n\}$ του $[0, \infty]$ και διαμερίζουμε το σύνολο X ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει η f. Έτσι κατασκευάζουμε τα σύνολα A_j.

[1] Δεν είναι διαμέριση με τη γνωστή έννοια βέβαια, αφού θα έπρεπε να περιέχει και την «τιμή» ∞.

2. Σε καθένα από τα σύνολα $A_j = [a_j \leq f < a_{j+1}]$ δώσαμε στην s^P τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει εκεί η f, δηλαδή την τιμή a_j. Έτσι, έχουμε πράγματι μια «από κάτω» προσέγγιση της f.

Για την απόδειξη τώρα:

(i) Είναι εμφανές ότι η s^P είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση. Μάλιστα, αφού τα $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ συνιστούν μια διαμέριση του X είναι εκείνη η απλή συνάρτηση που στο A_j λαμβάνει την τιμή a_j. Για $x \in A_j$, $0 \leq j \leq n$ είναι

$$s^P(x) = a_j \leq f(x),$$

από τον ορισμό του A_j και αν επιπλέον $j < n$ (δηλαδή $f(x) < a_n$) είναι

$$f(x) - s^P(x) = f(x) - a_j < a_{j+1} - a_j \leq \|P\|$$

από τον ορισμό της $\|P\|$.

(ii) Έστω ότι η s^P δίνεται από τη σχέση (5.26). Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $Q = P \cup \{\hat{a}\}$ για κάποιο $\hat{a} > 0$, $\hat{a} \notin P$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή στο $|Q \setminus P|$. Διακρίνουμε τότε τις περιπτώσεις:

Αν $a_j < \hat{a} < a_{j+1}$ για κάποιο $j = 0, 1, ..., n-1$, η παράσταση της s^Q διαφέρει από αυτην της s^P μόνο στον όρο του αθροίσματος που περιέχει το A_j. Αντί του προσθεταίου $a_j \chi_{A_j}$ εμφανίζεται το άθροισμα

$$a_j \chi_{A_j^1} + \hat{a} \chi_{A_j^2}, \quad \text{όπου } A_j^1 = [a_j \leq f < \hat{a}] \text{ και } A_j^2 = [\hat{a} \leq f < a_{j+1}]. \tag{5.28}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\chi_{A_j} = \chi_{A_j^1} + \chi_{A_j^2}$ έχουμε ότι

$$s^Q - s^P = a_j \chi_{A_j^1} + \hat{a} \chi_{A_j^2} - a_j \chi_{A_j} = (\hat{a} - a_j) \chi_{A_j^2} \geq 0,$$

όπως θέλαμε.

Αν πάλι $\hat{a} > a_n$, η παράσταση της s^Q διαφέρει από αυτή της s^P μόνο στον τελευταίο όρο που περιέχει το A_n. Αντί του προσθεταίου $a_n \chi_{A_n}$ εμφανίζεται το άθροισμα

$$a_n \chi_{A_n^1} + \hat{a} \chi_{A_n^2}, \quad \text{όπου } A_n^1 = [a_n \leq f < \hat{a}] \text{ και } A_n^2 = [f \geq \hat{a}]. \tag{5.29}$$

Άρα

$$s^Q - s^P = a_n \chi_{A_n^1} + \hat{a} \chi_{A_n^2} - a_n \chi_{A_n} = (\hat{a} - a_n) \chi_{A_n^2} \geq 0.$$

Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη.

□

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$ ώστε*

$$s_n \nearrow f.$$

Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία «διαμερίσεων» P_n του $[0,\infty]$ όπως στο προηγούμενο Λήμμα και σύμφωνα με αυτό η αντίστοιχη ακολουθία $\{s_n\}$ θα είναι αύξουσα και θα προσεγγίζει «καλά» την f αν $\|P_n\| \to 0$.
Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < ... < \frac{n2^n}{2^n} = n\right\} \tag{5.30}$$

και $s_n = s^{P_n}$ όπως στο προηγούμενο Λήμμα, δηλαδή

$$s_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n}\chi_{B_{n,j}} + n\chi_{C_n}, \tag{5.31}$$

όπου

$$B_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n} \le f < \frac{j+1}{2^n}\right],\ j = 0,1,...,n2^n - 1 \text{ και } C_n = [f \ge n]. \tag{5.32}$$

Τότε, από το Λήμμα, κάθε s_n είναι απλή συνάρτηση με $0 \le s_n \le f$ και για εκείνα τα $x \in X$ με $f(x) < n$ είναι

$$0 \le f(x) - s_n(x) < \|P_n\| = \frac{1}{2^n}.$$

Επιπλέον $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και άρα από το (ii) του Λήμματος η ακολουθία (s_n) είναι πράγματι αύξουσα.

Έστω $x \in X$. Αν $f(x) < \infty$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να είναι $f(x) < n$ και άρα $f(x) - s_n(x) < 1/2^n$. Έτσι, πράγματι $s_n(x) \to f(x)$. Αν πάλι $f(x) = \infty$ τότε $s_n(x) = n$ για κάθε n και άρα πάλι $s_n(x) \to f(x)$.

Αν η f είναι φραγμένη τώρα, υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \ge n_0$ και $x \in X$ να είναι $f(x) < n$, Άρα $0 \le f(x) - s_n(x) < 1/2^n$ για κάθε x και $n \ge n_0$. Έτσι, πράγματι $s_n \to f$ ομοιόμορφα.

□

Πόρισμα 5.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία $(s_n)_n$ απλών συναρτήσεων με*

$$0 \le |s_1| \le |s_2| \le ... \le |f| \tag{5.33}$$

και $s_n \to f$. Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.2.3 μπορούμε να γράψουμε $f = f^+ - f^-$ όπου οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες. Άρα, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $\{\sigma_n\}_n$ και $\{\tau_n\}_n$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων ώστε $\sigma_n \to f^+$ και $\tau_n \to f^-$. Αν θέσουμε $s_n = \sigma_n - \tau_n$, τότε η s_n είναι απλή και επιπλέον $s_n \to f^+ - f^- = f$.
Παρατηρήστε ότι αν $A = [f > 0]$ τότε για κάθε n έχουμε $\tau_n = 0$ στο A και $\sigma_n = 0$ στο A^c. Συνεπώς

$$|s_n| = |\sigma_n - \tau_n| = \max\{\sigma_n, \tau_n\} \le \max\{\sigma_{n+1}, \tau_{n+1}\} = |s_{n+1}|,$$

και άρα αφού $|s_n| \to |f|$ έπεται η (5.31).

Τέλος, αν η f είναι φραγμένη, τότε το ίδιο ισχύει και για τις f^+ και f^-. Συνεπώς, οι $\{\sigma_n\}$ και $\{\tau_n\}$ μπορούν να επιλεγούν ώστε να συγκλίνουν ομοιόμορφα σε αυτές από το παραπάνω Θεώρημα. Συνεπώς είναι και $s_n \to f$ ομοιόμορφα.

□

5.4 Μιγαδικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Η έννοια της μετρησιμότητας που μελετήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους μπορεί να αναπτυχθεί σε πολύ πιο γενικό πλαίσιο από αυτό στο οποίο τη θέσαμε μέχρι τώρα.[2] Χωρίς επιπρόσθετη δυσκολία όμως, μπορούμε να μελετήσουμε μετρήσιμες συναρτήσεις που παίρνουν μιγαδικές τιμές.

Ορισμός 5.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος .

(i) Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *μετρήσιμη ως προς* $\mathcal{A}$ (η $\mathcal{A}$-μετρήσιμη) αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

(ii) Αν μ ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ η f λέγεται μ-*μετρήσιμη* αν είναι $\mathcal{A}_\mu$-μετρήσιμη.

(iii) Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{R}^k$ κάθε λ-μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται *Lebesgue μετρήσιμη.*

(iv) Αν ο X είναι μετρικός χώρος και η f είναι $\mathcal{B}(X)$-μετρήσιμη, τότε η f λέγεται *Borel μετρήσιμη.*

Μπορεί και σε εδώ να αποδειχθεί το ανάλογο της Πρότασης 5.1.7, δηλαδή ότι μια $f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν αντιστρέφει τα ανοικτά (αντίστοιχα τα κλειστά) σε $\mathcal{A}$-μετρήσιμα σύνολα.

Πρόταση 5.4.2. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ με $u = Ref$ και $v = Imf$. Τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν οι u και v είναι μετρήσιμες.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Για $b \in \mathbb{R}$ είναι

$$[u \le b] = \{x \in X : u(x) \le b\} = \{x \in X : f(x) \in (-\infty, b] \times \mathbb{R}\} = f^{-1}\left((-\infty, b] \times \mathbb{R}\right) \in \mathcal{A}$$

αφού $(-\infty, b] \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Τελείως όμοια και η v είναι μετρήσιμη.
($\Leftarrow$) Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. Από το Λήμμα 3.1.7 (διάσπαση των ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^k$ σε διαστήματα) μπορούμε να βρούμε ακολουθίες (I_n) και (J_n) διαστημάτων του $\mathbb{R}$ ώστε $G = \bigcup_n (I_n \times J_n)$. Συνεπώς

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n \times J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (u^{-1}(I_n) \cap v^{-1}(J_n)) \in \mathcal{A},$$

αφού οι u και v είναι μετρήσιμες. Έπεται λοιπόν ότι και η f είναι μετρήσιμη.

□

Πρόταση 5.4.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Γράφουμε $f_n = u_n + iv_n$ και $f = u + iv$ όπου $u_n = \mathrm{Re} f_n$, $v_n = \mathrm{Im} f_n$, $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. Αφού $f = \lim_n f_n$ έπεται ότι $u = \lim_n u_n$ και $v = \lim_n v_n$. Έτσι, από την Πρόταση 5.2.4 οι u και v είναι μετρήσιμες και άρα από την προηγούμενη Πρόταση το ίδιο ισχύει και για την f. □

[2] Βλέπε την §8.1.

Παρατήρηση 5.4.4. Αν $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις τότε και η $\varphi \circ f : X \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη[3]

Απόδειξη. Για $B \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ παρατηρούμε ότι

$$(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(\varphi^{-1}(B)\big),$$

το οποίο είναι μετρήσιμο σύνολο επειδή $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ και στη συνέχεια από τη μετρησιμότητα της f. $\square$

Αποδεικνύεται και εδώ, όπως και στην πραγματική περίπτωση, ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel μετρήσιμη και κατά συνέπεια η Παρατήρηση ισχύει ειδικότερα για συνεχείς συναρτήσεις $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Πρόταση 5.4.5. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος, $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και $a \in \mathbb{C}$. Τότε*

(i) Η συνάρτηση $a \cdot f$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Οι συναρτήσεις $f + g$ και $f - g$ είναι μετρήσιμες.

(iii) Οι συναρτήσεις f^2 και $f \cdot g$ είναι μετρήσιμες.

(iv) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι μετρήσιμη.

(v) Η συνάρτηση $|f|$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Αν γράψουμε $f = u + iv$, $g = w + iz$ με $u = \mathrm{Re}f$, $v = \mathrm{Im}f$, $w = \mathrm{Re}g$ και $z = \mathrm{Im}g$ έχουμε:

$$f+g = (u+w)+i(v+z),\ f \cdot g = (uw - vz)+i(uz+vw),\ \frac{1}{g} = \frac{w}{w^2+z^2} + i\frac{-z}{w^2+z^2}.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας επανειλλημένα τις Προτάσεις 5.2.8 και 5.4.2 έπονται τα συμπεράσματα (i)-(iv). Για το (v) τώρα, είναι

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

η οποία είναι μετρήσιμη ως σύνθεση της μετρήσιμης συνάρτησης $u^2 + v^2$ και της συνεχούς $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \sqrt{x}$. $\square$

Συνεχίζουμε με τον ορισμό των απλών συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές και το αντίστοιχο θεώρημα προσέγγισης.

Ορισμός 5.4.6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *απλή* αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Παρατηρούμε ότι μια συνάρτηση $s : X \to \mathbb{C}$ είναι απλή αν και μόνον αν οι $\mathrm{Re}s$ και $\mathrm{Im}s$ είναι απλές συναρτήσεις (γιατί;). Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών απλών συναρτήσεων υπάρχει μια μοναδική κανονική μορφή κάθε απλής μιγαδικής συνάρτησης s.

Πρόταση 5.4.7. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία $\{s_n\}_n$ απλών συναρτήσεων με $s_n \to f$. Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.*

[3] Η ιδιότητα αυτή είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 8.1.2 που θα δούμε παρακάτω.

Απόδειξη. Έστω $f = u + iv$, όπου $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$. Από το Πόρισμα 5.3.4 βρισκουμε ακολουθίες $\{r_n\}$ και $\{t_n\}$ απλών πραγματικών συναρτήσεων ώστε $r_n \to u$ και $t_n \to v$. Τότε, η $s_n = r_n + it_n$ είναι απλή και είναι προφανώς $s_n \to u + iv = f$.

Αν η f είναι φραγμένη τώρα, το ίδιο ισχύει και για τις u και v και κατά συνέπεια $r_n \to u$ και $t_n \to v$ ομοιόμορφα. Έπεται ότι και η σύγκλιση της (s_n) στην f είναι ομοιόμορφη. □

5.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄.

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $[f \leq q] \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι μετρήσιμη και το σύνολο $[f \neq g]$ να είναι $\lambda-$μηδενικό. Δείξτε ότι και η g είναι μετρήσιμη.

4. Έστω μια συνάρτηση $f : (a, b) \to [-\infty, \infty]$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$ ο περιορισμός $f|_{(a, b-\varepsilon)}$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $\{s_n\}$ μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Ομάδα Β΄.

6. Δώστε παράδειγμα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη, ενώ οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ μια αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}$ που αποτελείται από αύξουσες απλές συναρτήσεις με $s_n \nearrow f$.

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{E_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

(α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mu(\{x : \chi_{E_n}(x) \nrightarrow 0\}) = 0$. (Υπόδειξη: θυμηθείτε το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli.)

(β) Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα με την ασθενέστερη υπόθεση $\mu(E_n) \to 0$;

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει και $\lambda(f(A)) = 0$.

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ μας δίνεται ένα μετρήσιμο σύνολο $E_\alpha \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε:

(i) Για $\alpha < \beta$ είναι $E_\alpha \subseteq E_\beta$,
(ii) ισχύει $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha = X$ και
(iii) $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$.

Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα εξής: αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leq \alpha$ ενώ αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geq \alpha$.

11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ και $M > 0$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) < \varepsilon \ \text{ και για κάθε } x \in A : \ \sup_n |f_n(x)| \leq M.$$

12. Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor-Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_n \nearrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_n} \nearrow \omega_f$.

Ομάδα Γ΄.

14. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \alpha\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_n f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \in Z^c$.

15. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}\right) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in Z^c$.

16. Έστω $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια *χωριστά συνεχής* συνάρτηση, δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

17. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι υπαρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_n) και σύνολο $Z \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in Z^c.$$

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

Σε αυτό το Κεφάλαιο ο στόχος είναι να κατασκευαστεί το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες συναρτήσεις. Βρισκόμαστε λοιπόν σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και μελετάμε πραγματικές (ή μιγαδικές αργότερα) μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}$. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί το ολοκλήρωμα είναι οι εξής:

(i) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $\int \chi_A \, d\mu = \mu(A)$, όπου χ_A η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g μετρήσιμες συναρτήσεις και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε
$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu.$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό» αν f μετρήσιμη συνάρτηση με $f \geq 0$, τότε και $\int f d\mu \geq 0$. Η ιδιότητα αυτή είναι φυσικά ισοδύναμη με τη μονοτονία: αν f, g μετρήσιμες συναρτήσεις και $f \geq g$, τότε και $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

Η κατασκευή αυτή θα γίνει σε τρία βήματα:

(i) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές απλές συναρτήσεις βασιζόμενοι στα (i) και (ii) παραπάνω.

(ii) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσες βασιζόμενοι στη μονοτονία και στην προσέγγιση τέτοιων συναρτήσεων από απλές.

(iii) Ορίζουμε το ολοκλήρωμα γενικά χρησιμοποιώντας τη σχέση $f = f^+ - f^-$ και τη γραμμικότητα.

Παράλληλα με αυτή την πορεία θα αποδείξουμε μερικές πολύ βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue και ιδιαίτερα κάποια αποτελέσματα σχετικά με τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος Lebesgue ως προς τη σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων.

6.1 Απλές μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια απλή μη αρνητική συνάρτηση με κανονική μορφή
$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j) \tag{6.1}$$

Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f να είναι η ποσότητα

$$\int f\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j), \tag{6.2}$$

όπου έχουμε κάνει τη σύμβαση $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Παρατηρήσεις 6.1.2. (α΄) Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $\int f\ d\mu \geq 0$ και αν $A \in \mathcal{A}$ τότε:

$$\int \chi_A d\mu = \mu(A). \tag{6.3}$$

(β΄) Σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε $\int f\ d\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$.

Για να αποδείξουμε τώρα τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος με βάση τον παραπάνω ορισμό χρειαζόμαστε το εξής:

Λήμμα 6.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια απλή συνάρτηση που γράφεται ως:*

$$f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j} \tag{6.4}$$

για κάποια $b_1, b_2, ..., b_m$ και $B_1, B_2, ..., B_m$ μετρήσιμα και ξένα ανά δύο. Τότε:

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j). \tag{6.5}$$

Απόδειξη. Δίχως βλάβη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\bigcup_{j=1}^m B_j = X$ (αλλιώς, θέτοντας $B_{m+1} = X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j$ και $b_{m+1} = 0$ δεν αλλάζει κάτι). Έστω λοιπόν ότι η f έχει κανονική μορφή

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

Αφού η f είναι απλή συνάρτηση, αν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ είναι φυσικά $a_i = b_j$ και επιπλέον ισχύουν οι εξής ταυτότητες:

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \ \text{ και } B_j = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j), \tag{6.6}$$

όπου και οι δύο ενώσεις είναι ξένες. Έτσι, έχουμε:

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

□

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο απλές μη αρνητικές συναρτήσεις και $a \geq 0$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Το ολοκλήρωμα είναι «ομογενές»:

$$\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu. \tag{6.7}$$

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι «προσθετικό»:

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \tag{6.8}$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «μονότονο»:

$$\text{αν } \; f \leq g \text{ στο } X \quad \text{τότε} \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu. \tag{6.9}$$

Απόδειξη. Έστω

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$$

οι κανονικές μορφές των f και g.

(i) Τότε η $af = \sum_{i=1}^{n} a a_i \chi_{A_i}$ είναι η κανονική μορφή της af και άρα

$$\int af \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a a_i \mu(A_i) = a \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = a \int f \, d\mu.$$

(ii) Η οικογένεια $(A_i \cap B_j)_{(i,j)}$ αποτελείται από ξένα ανά δύο σύνολα και αφού

$$f + g = \sum_{i,j} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j} \tag{6.10}$$

(επαληθεύστε το) σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\mu &= \sum_{i,j} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} b_j \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) = \int f \, d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

(iii) Η $(g - f)$ είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση και άρα από το (ii):

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int (g - f) \, d\mu \geq \int f \, d\mu,$$

όπως θέλαμε.

□

Παρατήρηση 6.1.5. Σύμφωνα με τα (i) και (ii) της τελευταίας Πρότασης, το Λήμμα 6.1.3 έπεται και χωρίς την υπόθεση ότι τα B_j είναι ξένα, αφού:

$$\int \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j).$$

6.2 Μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Επεκτείνουμε τώρα τον ορισμό του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 5.3.3 ότι για κάθε f μη αρνητική μετρήσιμη, μπορούμε να βρούμε αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με

$$s_n \nearrow f.$$

Επιπλέον, αν s μια τυχούσα απλή μετρήσιμη συνάρτηση με $0 \leq s \leq f$ στο X, θα θέλαμε, από τη μονοτονία του ολοκληρώματος, να ισχύει

$$\int s \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

με τον ορισμό της προηγούμενης παραγράφου για το $\int s d\mu$. Εφ' όσον μπορούμε να βρούμε λοιπόν απλές μετρήσιμες s οσοδήποτε κοντά (από «κάτω») στην f οδηγούμαστε στον εξής:

Ορισμός 6.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τότε το *ολοκλήρωμα* της f να είναι η ποσότητα

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int s \, d\mu : \ s \text{ απλή συνάρτηση με } 0 \leq s \leq f \right\}. \tag{6.11}$$

Φυσικά, ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1.1 του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, αφού αν η f είναι απλή το supremum υλοποιείται για $s = f$ από τη μονοτονία του ολοκληρώματος για απλές μη αρνητικές συναρτήσεις (Πρόταση 6.1.4 (iii».

Αν $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε

$$\int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu, \tag{6.12}$$

το *ολοκλήρωμα της f στο A*. Είναι άμεσο ότι $\int_A f \, d\mu \in [0, \infty]$ και επίσης

$$\int_X f \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $A, B \in \mathcal{A}$ και ένα $a \geq 0$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Το ολοκλήρωμα είναι «ομογενές»:

$$\int af \, d\mu = a \int f \, d\mu \tag{6.13}$$

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι «μονότονο»:

$$\text{Αν } f \le g \text{ στο } X \quad \text{τότε} \int f\,d\mu \le \int g\,d\mu. \tag{6.14}$$

(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu. \tag{6.15}$$

(iv) Αν $\mu(A) = 0$ ή αν $f = 0$ στο A, τότε

$$\int_A f\,d\mu = 0. \tag{6.16}$$

Απόδειξη. (i) Αν $a = 0$ η ζητούμενη είναι προφανής. Αν $a > 0$ τώρα, έχουμε:

$$\int af\,d\mu = \sup\left\{\int s\,d\mu : s \text{ απλή με } 0 \le s \le af\right\} =$$

$$= \sup\left\{a\int \frac{s}{a}\,d\mu : \frac{s}{a} \text{ απλή με } 0 \le \frac{s}{a} \le f\right\} =$$

$$= a\sup\left\{\int t\,d\mu : t \text{ απλή με } 0 \le t \le f\right\} = a\int f\,d\mu.$$

(ii) Αυτό προκύπτει εύκολα από τον τρόπο που ορίσαμε το ολοκλήρωμα: αν s μια απλή συνάρτηση με $0 \le s \le f$, τότε θα είναι και $0 \le s \le g$. Άρα

$$\{s : s \text{ απλή με } 0 \le s \le f\} \subseteq \{s : s \text{ απλή με } 0 \le s \le g\},$$

και άρα πράγματι $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$.

(iii) Η σχέση $A \subseteq B$ εκφράζεται μέσω χαρακτηριστικών συναρτήσεων από την $\chi_A \le \chi_B$ (γιατί;). Άρα, είναι και $f\chi_A \le f\chi_B$ και το συμπέρασμα έπεται από το (ii).

(iv) Αν $f = 0$ στο A, τότε $f\chi_A = 0$ στο X και άρα $\int f\chi_A\,d\mu = 0$, δηλαδή $\int_A f d\mu = 0$. Έστω ότι $\mu(A) = 0$ τώρα. Αν s απλή με $0 \le s \le f\chi_A$, τότε η s θα μηδενίζεται έξω από το A και άρα θα έχει μια παράσταση της μορφής

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}, \quad \text{όπου } A_i \subseteq A \text{ για κάθε } i.$$

Άρα θα είναι

$$\int s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 0 = 0.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε απλή s με $0 \le s \le f\chi_A$ είναι και $\int f\chi_A\,d\mu = \int_A f\,d\mu = 0$. □

Παρ΄όλο που οι παραπάνω ιδιότητες του ολοκληρώματος αποδείχθηκαν σχετικά εύκολα, με τον Ορισμό 6.2.1 που δώσαμε δεν είναι καθόλου προφανής η προσθετικότητα του ολοκληρώματος, δηλαδή ότι αν $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu. \tag{6.17}$$

Για να αποδείξουμε την προσθετικότητα θα βασιστούμε σε δύο πολύ βασικά θεωρήματα σύγκλισης, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue και το Λήμμα του Fatou. Θα χρειαστούμε αρχικά το εξής Λήμμα, που θα γενικευθεί αργότερα στην §6.2.1:

Λήμμα 6.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $s : X \to [0, \infty]$ μια απλή μη αρνητική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με*

$$\nu(A) = \int_A s\ d\mu, \tag{6.18}$$

για $A \in \mathcal{A}$ είναι ένα μέτρο[1] *στο χώρο $(X, \mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Αν

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

η κανονική μορφή της s, τότε για $A \in \mathcal{A}$ υπολογίζουμε:

$$\nu(A) = \int_A s\ d\mu = \int s\chi_A\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A\cap A_j}\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A\cap A_j),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$. Όμως, το $\mu_j : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\mu_j(A) = \mu(A \cap A_j)$ είναι ένα μέτρο, ο περιορισμός του μ στο A_j, και κατά συνέπεια ισχύει το ίδιο και για το ν. □

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη των βασικών θεωρημάτων σύγκλισης θα χρειαστούμε την έννοια του $\liminf_n$ μιας ακολουθίας συνόλων: Αν (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X, θέτουμε

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}. \tag{6.19}$$

Σύμφωνα με την άσκηση 1.X, έχουμε την ταυτότητα

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{6.20}$$

Σύμφωνα με την άσκηση 2.Υ τώρα, αν επιπλέον ο X είναι ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, ισχύει η ανισότητα:

$$\mu(\liminf_n A_n) \le \liminf_n \mu(A_n). \tag{6.21}$$

Η απόδειξη όλων αυτών των τελευταίων ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δείχνουμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 6.2.4 (Λήμμα του Fatou)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε:*

$$\int \liminf_n f_n\ d\mu \le \liminf_n \int f_n\ d\mu. \tag{6.22}$$

[1] Η ν λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα* της s ως προς μ.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f = \liminf_n f_n$ η οποία είναι μετρήσιμη από την Πρόταση 5.2.4 και μια απλή συνάρτηση s με $0 \le s \le f$ στο X. Θα δείξουμε ότι

$$\int s\ d\mu \le \liminf_n \int f_n\ d\mu. \tag{6.23}$$

Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι για $\varepsilon \in (0,1)$ αυθαίρετο ισχύει

$$\varepsilon \int s\ d\mu \le \liminf_n \int f_n\ d\mu.$$

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_n^\varepsilon = \big[f_n \ge \varepsilon s\big] = \{x \in X : f(x) \ge \varepsilon s(x)\} \tag{6.24}$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμα και επιπλέον $\liminf_n A_n^\varepsilon = X$: Πράγματι, για $x \in X$ αν $s(x) = 0$ τότε προφανώς $x \in A_n^\varepsilon$ για κάθε n, ενώ αν $s(x) > 0$, τότε

$$\varepsilon s(x) < s(x) \le f(x) = \liminf_n f_n(x)$$

και άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \ge n_0$ να είναι $\varepsilon s(x) < f(x)$. Έτσι, πράγματι $x \in A_n^\varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$ και άρα $x \in \liminf_n A_n^\varepsilon$.

Από τον ορισμό του A_n^ε έχουμε λοιπόν ότι

$$f_n(x) \ge \varepsilon s(x)\chi_{A_n^\varepsilon}(x) \ \text{ στο } X \tag{6.25}$$

και κατά συνέπεια:

$$\int f_n\ d\mu \ge \varepsilon \int s\chi_{A_n^\varepsilon}\ d\mu = \varepsilon \int_{A_n^\varepsilon} s\ d\mu = \varepsilon\nu(A_n^\varepsilon)$$

όπου $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ το μέτρο του Λήμματος 6.2.3 για την απλή συνάρτηση s. Κατά συνέπεια από τη σχέση (6.21) και την ισότητα $\liminf_n A_n^\varepsilon = X$ έπεται ότι:

$$\liminf_n \int f_n\ d\mu \ge \varepsilon \liminf_n \nu(A_n^\varepsilon) \ge \varepsilon\nu(\liminf_n A_n^\varepsilon) = \varepsilon\nu(X).$$

Όμως, $\nu(X) = \int_X s\ d\mu$ και άρα πράγματι

$$\liminf_n \int f_n\ d\mu \ge \varepsilon \int s\ d\mu,$$

που για $\varepsilon \to 1^-$ δίνει την (6.23). Μετά, παίρνοντας το supremum πάνω σε όλες τις απλές μετρήσιμες s με $0 \le s \le f$ έπεται το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 6.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0,\infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η f_n συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to [0,\infty]$ και επιπλέον $f_n \le f$ στο X για κάθε n τότε*

$$\int f\ d\mu = \lim_n \int f_n\ d\mu. \tag{6.26}$$

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou: είναι $\liminf_n f_n = f$ και άρα:

$$\int f \, d\mu = \int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu \leq$$

$$\leq \limsup_n \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

αφού $f_n \leq f$ στο X. Άρα, ισχύουν όλες οι ισότητες και κατά συνέπεια

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

□

Ειδικότερα έχουμε το εξής πολύ σημαντικό Πόρισμα:

Πόρισμα 6.2.6 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f = \lim_n f_n$, τότε*

$$\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu \quad \text{για } n \to \infty. \tag{6.27}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το προηγούμενο Λήμμα, αφού $f_n \leq f$ στο X. □

Χρησιμοποιώντας τώρα το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε έναν πολύ πιο βολικό τρόπο να χειριζόμαστε το ολοκλήρωμα: Για μια $f : X \to [0, \infty]$ μη αρνητική, μετρήσιμη βρίσκουμε από το Θεώρημα 5.3.3 μια αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών μη αρνητικών συναρτήσεων με

$$s_n \nearrow f.$$

Τότε, σύμφωνα με το Πόρισμα 6.2.6 είναι

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int s_n \, d\mu.$$

Από αυτή την παρατήρηση έπονται τα εξής:

Πόρισμα 6.2.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) Το ολοκλήρωμα είναι προσθετικό, δηλαδή

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \tag{6.28}$$

(ii) Αν $f \leq g$ στο X και επιπλέον $\int f \, d\mu < \infty$, τότε

$$\int (g - f) \, d\mu = \int g \, d\mu - \int f \, d\mu. \tag{6.29}$$

Απόδειξη. (i) Όπως είπαμε και πριν τη διατύπωση του πορίσματος, βρίσκουμε αύξουσες ακολουθίες $(s_n)_n$ και $(t_n)_n$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f$ και $t_n \nearrow g$. Τότε, η ακολουθία $(s_n + t_n)_n$ είναι επίσης μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών συναρτήσεων και

$$s_n + t_n \nearrow f + g.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_n \int (s_n + t_n)\, d\mu = \lim_n \int s_n\, d\mu + \lim_n \int t_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για τις απλές συναρτήσεις s_n και t_n (Πρόταση 6.1.4).

(ii) Οι f και $g - f$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και άρα από το (i):

$$\int f\, d\mu + \int (g-f)\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

Αφού επιπλέον $\int f\, d\mu < \infty$, από την τελευταία έπεται πράγματι ότι

$$\int (g-f)\, d\mu = \int g\, d\mu - \int f\, d\mu.$$

□

Αν τώρα επιχειρήσουμε να αντικαταστήσουμε το $\liminf$ στο Λήμμα του Fatou με $\limsup$ παίρνουμε τα εξής δυϊκά αποτελέσματα:

Θεώρημα 6.2.8. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε:*

(i) Αν υπάρχει μια $g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη ώστε $f_n \leq g$ για κάθε n και $\int g\, d\mu < \infty$, τότε

$$\int \limsup_n f_n\, d\mu \geq \limsup_n \int f_n\, d\mu. \tag{6.30}$$

(ii) Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ με $f_n \geq f$ στο X για κάθε n και επιπλέον υπάρχει μια $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $f_n \leq g$ για κάθε n και $\int g\, d\mu < \infty$, τότε

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu. \tag{6.31}$$

(iii) Αν η ακολουθία (f_n) είναι φθίνουσα και $\int f_1\, d\mu < \infty$, τότε για την $f = \lim_n f_n$ ισχύει:

$$\int f_n\, d\mu \searrow \int f\, d\mu. \tag{6.32}$$

Απόδειξη. (i) Εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou για την ακολουθία $(g - f_n)_n$ και έχουμε ότι

$$\int \liminf_n (g - f_n)\ d\mu \le \liminf_n \int (g - f_n)\ d\mu.$$

Όμως, αν (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\liminf_n (a_n + a) = \liminf_n a_n + a \quad \text{και} \quad \liminf_n (-a_n) = -\limsup_n (a_n) \tag{6.33}$$

και άρα η παραπάνω γράφεται ως:

$$\int g\ d\mu - \int \limsup_n f_n\ d\mu \le \int g\ d\mu - \limsup_n \int f_n\ d\mu.$$

Συνδυάζοντας αυτή με τη σχέση $\int g\ d\mu < \infty$ συμπεραίνουμε ότι πράγματι

$$\int \limsup_n f_n\ d\mu \ge \limsup_n \int f_n\ d\mu.$$

(ii) Προκύπτει από το (i) ακριβώς όπως προκύπτει το Πόρισμα 6.2.5 από το Λήμμα του Fatou. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.

(iii) Προκύπτει άμεσα από το (ii) αν παρατηρήσουμε ότι η $g = f_1$ κυριαρχεί όλες τις f_n, δηλαδή $f_n \le f_1$ για κάθε n.

□

Παρατήρηση 6.2.9. Η υπόθεση της ύπαρξης μιας μετρήσιμης $g : X \to [0, \infty]$ που να έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα και να κυριαρχεί όλες τις f_n είναι απαραίτητη για την ισχύ του προηγούμενου θεωρήματος.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$ παρατηρούμε ότι όλες οι f_n είναι μετρήσιμες, $f_n \to 0$ κατά σημείο και $\int f_n\ d\mu = 1$ για κάθε n. Συνεπώς οι (6.30) και (6.31) δεν αληθεύουν. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρατηρώντας ότι το ολοκλήρωμα Lebesgue συμπεριφέρεται καλά και ως προς τις σειρές μη αρνητικών συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 6.2.10 (Beppo Levi). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε:*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\ d\mu. \tag{6.34}$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε

$$S_m = f_1 + f_2 + ... + f_m,$$

κάθε S_m είναι μετρήσιμη και για τη συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ισχύει:

$$S_m \nearrow f \quad \text{για } m \to \infty.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n\ d\mu = \int f\ d\mu = \lim_m \int S_m\ d\mu = \lim_m \sum_{n=1}^{m} \int f_n\ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\ d\mu,$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος. □

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $P(x)$ μια ιδιότητα που αφορά τα στοιχεία $x \in X$. Θα λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει μ*−σχεδόν παντού* αν το σύνολο

$$Z = \{x \in X : \text{η } P(x) \text{ δεν αληθεύει}\}$$

είναι μ-μηδενικό (θυμηθείτε τον Ορισμό 2.3.1). Θα γράφουμε ότι η P ισχύει μ−σ.π.. Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι οι «σχεδόν παντού ανωμαλίες» δεν επηρεάζουν το ολοκλήρωμα:

Πρόταση 6.2.11. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Αν $f = g$ μ−σ.π., τότε $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(ii) $f = 0$ μ−σ.π. αν και μόνο αν $\int f \, d\mu = 0$.

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $X = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ και παρατηρούμε ότι $Z \in \mathcal{A}$ (αφού f, g μετρήσιμες) και άρα από την υπόθεση $\mu(Z) = 0$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το (iv) της Πρότασης 6.2.2 πράγματι:

$$\int f \, d\mu = \int_{X \setminus Z} f \, d\mu = \int_{X \setminus Z} g \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

(ii) Αν $f = 0$ μ−σ.π. τότε από το (i)

$$\int f \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Αν πάλι $\int f \, d\mu = 0$ θέτουμε $A = [f > 0]$ και παρατηρούμε ότι αν $A_n = \left[f \geq \frac{1}{n}\right]$ τότε είναι

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Όμως

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n),$$

δηλαδή $\mu(A_n) = 0$ για κάθε n. Έπεται λοιπόν ότι είναι και $\mu(A) = 0$ και άρα πράγματι $f = 0$ μ−σ.π..

□

Από την πρόταση αυτή έπεται ότι αν μια ιδιότητα μιας συνάρτησης f ισχύει μ−σ.π. τότε το ολοκλήρωμα της f δε θα αλλάξει αν υποθέσουμε ότι ισχύει παντού. Έτσι, μπορούμε να γενικεύσουμε για παράδειγμα το Πόρισμα 6.2.5 λέγοντας ότι η f_n συγκλίνει στην f μ−σ.π. και ότι $f_n \leq f$ μ−σ.π.. Όμοια μπορεί να γενικευθεί και το Θεώρημα 6.2.8. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αυτές τις ιδιότητες του «σχεδόν παντού» χωρίς ιδιαίτερη μνεία.

6.2.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρήσουμε να γενικεύσουμε το Λήμμα 6.2.3. Δίνουμε τον εξής Ορισμό πρώτα:

Ορισμός 6.2.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \tag{6.35}$$

για $A \in \mathcal{A}$. Η ν λέγεται *αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ.*

Οι βασικές ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος είναι οι εξής:

Πρόταση 6.2.13. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και ν το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς μ. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Το ν είναι μέτρο.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ τότε είναι και $\nu(A) = 0$[2]*.*

(iii) Αν $g : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu. \tag{6.36}$$

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές ότι $\nu(\emptyset) = 0$. Για την αριθμήσιμη προσθετικότητα, θεωρούμε μια ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ και θα δείξουμε ότι $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, δηλαδή ότι

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu. \tag{6.37}$$

Αφού τα A_n είναι ξένα ανά δύο, συμπεραίνουμε ότι

$$\chi_{\bigcup_n A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$$

και άρα η (6.23) γράφεται ως

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f\chi_{A_n} \, d\mu$$

που είναι ακριβώς το Θεώρημα Beppo Levi για τις $f_n := f\chi_{A_n}$.

(ii) Το έχουμε αποδείξει ήδη στο (iv) της Πρότασης 6.2.2.

(iii) Θα σπάσουμε την απόδειξη σε βήματα, ακολουθώντας την μέχρι τώρα πορεία του ορισμού του ολοκληρώματος.

[2] Αν για δύο μέτρα μ και ν ισχύει αυτή η ιδιότητα, λέμε ότι το ν είναι *απόλυτα συνεχές* ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$.

Βήμα 1. Αν η g είναι της μορφής $g = \chi_A$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$.
Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζουμε

$$\int g \, d\nu = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int gf \, d\mu.$$

Βήμα 2. Αν η g είναι απλή συνάρτηση της μορφής

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας το Βήμα 1 και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε:

$$\int g \, d\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A_j} \, d\nu = \sum_{j=1}^{n} a_j \int \chi_{A_j} f \, d\mu = \int gf \, d\mu.$$

Βήμα 3. Η g είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη.
Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία απλών μη αρνητικών συναρτήσεων $(s_n)_n$ με $s_n \nearrow g$. Χρησιμοποιώντας το Βήμα 2 τώρα έχουμε ότι

$$\int s_n \, d\nu = \int s_n f \, d\mu$$

για κάθε n και άρα, για $n \to \infty$ από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έπεται και η

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu,$$

αφού οι (s_n) και $(s_n f)$ είναι αύξουσες ακολουθίες. □

Σχόλιο. Από την Πρόταση 6.2.13 προκύπτει φυσιολογικά το εξής ερώτημα: Αν μ και ν δύο μέτρα σε έναν χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$ είναι απαραίτητο το ν να έχει τη μορφή της σχέσης (6.35); Αυτό το ερώτημα είναι αρκετά δύσκολο. Το Θεώρημα Radon-Nikodym που θα αποδείξουμε στο Κεφάλαιο 10 δίνει διάφορα ζεύγη μέτρων για τα οποία αυτό ισχύει.

6.3 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με το τελευταίο στάδιο του ορισμού του ολοκληρώματος: το ολοκλήρωμα για συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και μιγαδικές συναρτήσεις. Αρχίζουμε με την πρώτη περίπτωση: Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Θυμηθείτε τη βασική ταυτότητα

$$f = f^+ - f^-$$

όπου οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν πιστέψουμε προς στιγμήν ότι έχουμε ορίσει ένα ολοκλήρωμα για όλες αυτές τις συναρτήσεις f, το οποίο να επεκτείνει τον ορισμό της §6.2 και αυτό είναι επιπλέον γραμμικό, αναγκαστικά θα ισχύει:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Για να ορίζεται καλά αυτή η ποσότητα όμως πρέπει να αποφύγουμε καταστάσεις της μορφής $\infty - \infty$. Δίνουμε λοιπόν τον εξης ορισμό:

Ορισμός 6.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $\int f^+ \, d\mu < \infty$ και $\int f^- \, d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f *ορίζεται* και θέτουμε

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu. \tag{6.38}$$

(ii) Αν ισχύουν και οι δύο παραπάνω σχέσεις, δηλαδή $\int f^+ \, d\mu < \infty$ και $\int f^- \, d\mu < \infty$, τότε η συνάρτηση f λέγεται *ολοκληρώσιμη* και πάλι θέτουμε:

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Παρατήρηση 6.3.2. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$|f| = f^+ + f^-$$

παρατηρούμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Λόγω της τελευταίας παρατήρησης οδηγούμαστε στον εξής ορισμό για τη μιγαδική περίπτωση:

Ορισμός 6.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται *ολοκληρώσιμη* αν $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Αν $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν οι u και v είναι ολοκληρώσιμες (γιατί;), δηλαδή αν και μόνον αν τα ολοκληρώματα

$$\int u^+ \, d\mu, \ \int u^- \, d\mu, \ \int v^+ \, d\mu \text{ και } \int v^- \, d\mu$$

είναι πεπερασμένα. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε φυσικά:

$$\int f \, d\mu = \left(\int u^+ \, d\mu - \int u^- \, d\mu \right) + i \left(\int v^+ \, d\mu - \int v^- \, d\mu \right). \tag{6.39}$$

Από τον ορισμό είναι φυσικά άμεση η σχέση

$$\int f \, d\mu = \int u \, d\mu + i \int v \, d\mu. \tag{6.40}$$

Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$ θέτουμε και πάλι

$$\int_A f \ \mu = \int f \chi_A \, d\mu. \tag{6.41}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του Ορισμού 6.3.1 και με $\mathcal{L}^1(\mu)$ το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων του Ορισμού 6.3.3. Θα αναπτύξουμε στη συνέχεια τις ιδιότητες αυτών των χώρων. Οι αποδείξεις των αντίστοιχων Προτάσεων και Θεωρημάτων μοιάζουν πολύ και για αυτό θα ασχοληθούμε ουσιαστικά μόνο με την περίπτωση του $\mathcal{L}^1(\mu)$. Καλείται ο αναγνώστης να συμπληρώσει όσες αποδείξεις για τον $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ δεν είναι πανομοιότυπες.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $a, b \in \mathbb{C}$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) Ο χώρος $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος, δηλαδή $af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

(ii) Το ολοκλήρωμα στον $\mathcal{L}^1(\mu)$ είναι γραμμικό, δηλαδή

$$\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu. \tag{6.42}$$

Απόδειξη. (i) Η συνάρτηση $af + bg$ είναι φυσικά μετρήσιμη και από την τριγωνική ανισότητα ικανοποιεί την

$$|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$$

και κατά συνέπεια έχουμε

$$\int |af + bg|\, d\mu \leq |a| \int |f|\, d\mu + |b| \int |g|\, d\mu < \infty$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Για την προσθετικότητα: υποθέτουμε αρχικά ότι οι f και g παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και θέτουμε $h = f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ από το (i). Τότε, από τη γνωστή ταυτότητα για το θετικό και το αρνητικό μέρος έχουμε ότι

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

ή ισοδύναμα

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Όμως, όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι τώρα μη αρνητικές και κατά συνέπεια:

$$\int h^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu = \int h^-\, d\mu + \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu$$

η οποία αφού όλα τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα γράφεται ως:

$$\int h^+\, d\mu - \int h^-\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu$$

ή ισοδύναμα

$$\int h\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Στη γενική περίπτωση, θέτουμε $u_1 = \mathrm{Re} f$, $v_1 = \mathrm{Im} f$, $u_2 = \mathrm{Re} g$ και $v_2 = \mathrm{Im} g$. Τότε, από τη σχέση (6.40) και από τον τελευταίο υπολογισμό έχουμε:

$$\int f + g\, d\mu = \int (u_1 + u_2)\, d\mu + i \int (v_1 + v_2)\, d\mu =$$

$$= \left(\int u_1\, d\mu + i \int v_1\, d\mu \right) + \left(\int u_2\, d\mu + i \int v_2\, d\mu \right) = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Για την ομογένεια τώρα: υποθέτουμε και πάλι για αρχή ότι η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $a \geq 0$ έχουμε τις σχέσεις

$$(af)^+ = af^+ \text{ και } (af)^- = af^-$$

και άρα σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\int af\ d\mu = \int af^+\ d\mu - \int af^-\ d\mu = a\int f\ d\mu.$$

Αν πάλι $a < 0$ οι αντίστοιχες σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$(af)^+ = -af^- \text{ και } (af)^- = -af^+$$

(γιατί;) και άρα και πάλι ισχύει:

$$\int af\ d\mu = -a\int f^-\ d\mu + a\int f^+\ d\mu = a\int f\ d\mu.$$

Αν τώρα η f είναι γενικά μια μιγαδική συνάρτηση, γράφουμε $u = \mathrm{Re}f$ και $v = \mathrm{Im}f$ και τότε για $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\int af\ d\mu = \int au\ d\mu + i\int av d\mu = a\int f\ d\mu$$

από τον προηγούμενο υπολογισμό. Αν $a = i$, τότε είναι $af = -v + iu$ και άρα

$$\int f\ d\mu = -\int v\ d\mu + i\int u\ d\mu = i\int f\ d\mu$$

χρησιμοποιώντας και πάλι την (6.40). Για τη γενικότερη περίπτωση τώρα, αν $a = x+iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\int af\ d\mu = \int (xf + iyf)\ d\mu = \int xf\ d\mu + \int iyf\ d\mu =$$

$$= x\int f\ d\mu + iy\int f\ d\mu = a\int f\ d\mu.$$

□

Παρατήρηση 6.3.5. Αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ή $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και $A, B \in \mathcal{A}$ δύο ξένα σύνολα, τότε ισχύει η εξής ταυτότητα:

$$\int_{A\cup B} f\ d\mu = \int_A f\ d\mu + \int_B g\ d\mu. \tag{6.43}$$

Απόδειξη. Αφού τα A, B είναι ξένα ισχύει η σχέση $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ και άρα το συμπέρασμα έπεται από το (ii) της παραπάνω πρότασης. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το ολοκλήρωμα που ορίσαμε είναι πράγματι μονότονο όπως θέλαμε. Φυσικά αυτό δεν έχει νόημα για μιγαδικές συναρτήσεις οπότε δουλεύουμε στην κλάση $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Πρόταση 6.3.6. *Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ με $f \leq g$ μ−σ.π. στο X. Τότε*

$$\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu. \tag{6.44}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $A = [f = \infty]$ και παρατηρούμε ότι

$$\int_A f \; d\mu = \int_A g \; d\mu = \infty \cdot \mu(A).$$

Από το ανάλογο της Πρότασης 6.3.4 για το χώρο $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ έπεται ότι $g\chi_{A^c} - f\chi_{A^c} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ και επιπλέον:

$$\int_{A^c} g \; d\mu = \int_{A^c} f \; d\mu + \int_{A^c} (g - f) \; d\mu \geq \int_{A^c} f \; d\mu,$$

αφού $g - f \geq 0$ μ−σ.π.. Άρα τελικά:

$$\int g \; d\mu = \int_A g \; d\mu + \int_{A^c} g \; d\mu \geq \int_A f \; d\mu + \int_{A^c} f \; d\mu = \int f \; d\mu.$$

□

Πρόταση 6.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Τότε:*

$$\left| \int f \; d\mu \right| \leq \int |f| \; d\mu. \tag{6.45}$$

Απόδειξη. Αν $\int f \; d\mu = 0$ τότε το ζητούμενο είναι προφανές. Σε αντίθετη περίπτωση θεωρούμε εκείνον τον $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$ ώστε

$$\left| \int f \; d\mu \right| = a \int f \; d\mu \tag{6.46}$$

και παρατηρούμε ότι με βάση την Πρόταση 6.2.4

$$\left| \int f \; d\mu \right| = a \int f \; d\mu = \int af \; d\mu.$$

Όμως, η αριστερή ποσότητα είναι πραγματική και άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.40) και την τελευταία Πρόταση έχουμε

$$\left| \int f \; d\mu \right| = \int \mathrm{Re}(af) \; d\mu \leq \int |af| \; d\mu = \int |f| \; d\mu,$$

όπως θέλαμε. □

Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα πολύ βασικό θεώρημα σύγκλισης: το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. Το θεώρημα αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται σε αυθαίρετες μετρήσιμες συναρτήσεις σε αντίθεση με το Λήμμα του Fatou και το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης που ισχύουν μόνο για μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 6.3.8 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ−σ.π.. Υποθέτουμε ότι επιπλέον υπάρχει μια συνάρτηση $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ−σ.π. στο X. Τότε οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f| \; d\mu \to 0. \tag{6.47}$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n \; d\mu = \int f \; d\mu. \tag{6.48}$$

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, αφού $|f_n| \leq g$ μ−σ.π. έπεται ότι

$$\int |f_n| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty,$$

δηλαδή $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ για καθε n. Επιπλέον, αφού $f_n \to f$ μ−σ.π. έπεται η f είναι μετρήσιμη και $|f| \leq g$ μ−σ.π.. Άρα είναι και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Για την (6.47) τώρα, παρατηρούμε ότι η συνθήκη της ύπαρξης μιας τέτοιας συνάρτησης g θυμίζει την αντίστοιχη συνθήκη στο Θεώρημα 6.2.8. Η $|f_n - f|$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, $|f_n - f| \to 0$ μ−σ.π. και $|f_n - f| \geq 0$. Αφού επιπλέον

$$|f_n - f| \leq 2g \ \mu - \text{σ.π.} \quad \text{και} \quad \int 2g \, d\mu < \infty$$

έπεται, από το (ii) του Θεωρήματος 6.2.8, ότι

$$\lim_n \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Για την τελευταία ζητούμενη, έχουμε ότι

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu \to 0$$

και άρα ισχύει και η (6.48). □

Πόρισμα 6.3.9 (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ−σ.π.. Υποθέτουμε ότι επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ μ−σ.π. στο X. Τότε οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης αν παρατηρήσουμε ότι η σταθερή συνάρτηση M είναι ολοκληρώσιμη: πράγματι

$$\int M \, d\mu = M \cdot \mu(X) < \infty.$$

□

Σχόλιο. Με το παραπάνω θεώρημα ολοκληρώνεται η διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος Lebesgue και η απόδειξη των βασικών του ιδιοτήτων. Η ίδια η πορεία που ακολουθήσαμε για τον ορισμό μας δίνει μια μέθοδο απόδειξης νέων αποτελεσμάτων: Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση P ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ακολουθούμε πολλές φορές τα εξής βήματα:

1. Αποδεικνούμε αρχικά την πρόταση στην περίπτωση που η f είναι της μορφής $f = \chi_A$ για κάποιο A μετρήσιμο.
2. Χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση που η f είναι μη αρνητική και απλή.
3. Χρησιμοποιούμε την προσέγγιση από απλές συναρτήσεις σε συνδυασμό με το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για να αποδείξουμε την πρόταση στην κλάση των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων.
4. Τέλος, λόγω της ταύτοτητας $f = f^+ - f^-$ γενικεύουμε το αποτέλεσμα για τυχούσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πραγματικές τιμές και στη συνέχεια με μιγαδικές από την ταυτότητα (6.40).

Η τεχνική που περιγράψαμε μόλις είναι ιδιαίτερα συνήθης στη Θεωρία Μέτρου και θα τη χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές παρακάτω.

6.4 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

Γνωρίζουμε από την Πραγματική Ανάλυση τις έννοιες της κατά σημείο και της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών πραγματικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν X ένα σύνολο, $f_n : X \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και μια $f : X \to \mathbb{C}$, λέμε ότι

$$f_n \to f \text{ κατά σημείο αν } \ f_n(x) \to f(x) \text{ για κάθε } x \in X \tag{7.1}$$

και

$$f_n \to f \ \text{ ομοιόμορφα αν } \ \|f_n - f\|_\infty \to 0, \tag{7.2}$$

δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \geq n_0 \text{ και } x \in X.$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε διάφορες άλλες έννοιες σύγκλισης ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και θα εξετάσουμε διάφορες σχέσεις μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα αυτής της μορφής είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στη Θεωρία Πιθανοτήτων καθώς είναι το βασικό εργαλείο για την απόδειξη οριακών θεωρημάτων. Ενδεικτικά, παραπέμπουμε σε οποιοδήποτε βιβλίο μετροθεωρητικών Πιθανοτήτων για τις αποδείξεις του Ισχυρού Νόμου των Μεγάλων Αριθμών και του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

7.1 Κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση

Οι συνήθεις κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη Θεωρία Πιθανοτήτων, όπου μας απασχολούν φαινόμενα που δεν συμβαίνουν «παντού» αλλά συμβαίνουν «βέβαια», δηλαδή με πιθανότητα 1. Έτσι, έχουμε τους εξής ασθενέστερους ορισμούς:

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά σημείο μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X \setminus Z$.

(ii) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus Z$, δηλαδή

$$\sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X \setminus Z\right\} \to 0. \text{ για } n \to \infty. \tag{7.3}$$

(iii) Η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π. αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$ να ισχύει $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Είναι φανερό από τους ορισμούς ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα μ−σ.π. τότε και $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π.. Επίσης, αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα μ−σ.π. σε μια συνάρτηση f, τότε η $\{f_n\}$ είναι και ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π..

Ισχύει και το αντίστροφο του τελευταίου ισχυρισμού:

Πρόταση 7.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy μ−σ.π. τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν η $f_n : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy τότε υπάρχει μια $f : A \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Εφαρμόστε αυτό το αποτέλεσμα στο σύνολο $X \setminus Z$ όπου Z το σύνολο που βρίσκουμε από τον Ορισμό 7.1.1. Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. □

Αποδεικνύουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες αυτών των συγκλίσεων που ορίσαμε:

Πρόταση 7.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π. και $f_n \to g$ κατά σημείο μ−σ.π., τότε $f = g$ μ−σ.π..

(ii) Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα μ−σ.π. και $f_n \to g$ ομοιόμορφα μ−σ.π., τότε $f = g$ μ−σ.π..

Απόδειξη. (i) Από τον ορισμό της κατά σημείο μ−σ.π. σύγκλισης, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n(x) \to f(x) \text{ στο } X \setminus Z_1 \text{ και } f_n(x) \to g(x) \text{ στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, είναι $f(x) = g(x)$ για $x \in X \setminus (Z_1 \cup Z_2)$. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από τη σχέση $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$.

(ii) Είναι άμεσο από το (i) αφού η ομοιόμορφη μ−σ.π. σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο μ−σ.π. σύγκλιση.

□

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f_n \to f$ κατά σημείο μ−σ.π. και $g_n \to g$ κατά σημείο μ−σ.π., τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ είναι και $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά σημείο μ−σ.π..

(ii) *Αν* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π. και* $g_n \to g$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π., τότε για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *είναι και* $af_n + bg_n \to af + bg$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π..*

Απόδειξη. (i) Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n(x) \to f(x) \text{ στο } X \setminus Z_1 \text{ και } g_n(x) \to g(x) \text{ στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, για $x \in X\setminus(Z_1 \cup Z_2)$ είναι $af_n(x)+bg_n(x) \to af(x)+bg(x)$, όπου $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$. Πράγματι λοιπόν $af_n + bg_n \to af + bg$ μ−σ.π..

(ii) Βρίσκουμε πάλι σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ ώστε

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_1 \text{ και } g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_2.$$

Έτσι, από τα γνωστά για την ομοιόμορφα σύγκλιση είναι $af_n + bg_n \to af + bg$ ομοιόμορφα στο $X\setminus(Z_1 \cup Z_2)$. Το ζητούμενο έπεται τώρα και πάλι αφού $\mu(Z_1 \cup Z_2) = 0$.

□

Πρόταση 7.1.5. *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *χώρος μέτρου,* $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ *ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων,* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $a, b \in \mathbb{C}$*.*

(i) *Αν* $f_n \to f$ *κατά σημείο* μ*−σ.π. και* $g_n \to g$ *κατά σημείο* μ*−σ.π., τότε* $f_n g_n \to fg$ *κατά σημείο* μ*−σ.π..*

(ii) *Αν* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π.,* $g_n \to g$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π και επιπλέον υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|f_n| \leq M$ *και* $|g_n| \leq M$ μ*−σ.π. για κάθε* n *τότε* $f_n g_n \to fg$ *ομοιόμορφα* μ*−σ.π..*

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη είναι ουσιαστικά η ίδια με το (i) της προηγούμενης Πρότασης και αφήνεται ως άσκηση.

(ii) Κατ΄ αρχάς θα «μαζέψουμε» όλα τα κακά σύνολα ώστε να αγνοήσουμε τα μ−σ.π. στις υποθέσεις. Σύμφωνα με τον ορισμό της ομοιόμορφης μ−σ.π. σύγκλισης, βρίσκουμε σύνολα $Z_1, Z_2 \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$ ώστε

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_1 \text{ και } g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus Z_2.$$

Από τη δεύτερη υπόθεση, για κάθε n βρίσκουμε επιπλέον σύνολο $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ στο $X \setminus A_n$. Θέτουμε

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{7.4}$$

και παρατηρούμε ότι $Z \in \mathcal{A}$ και επιπλέον

$$\mu(Z) \leq \mu(Z_1) + \mu(Z_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$

δηλαδή $\mu(Z) = 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $x \in X \setminus Z$ είναι

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| = \big|\big(f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)\big) + \big(f(x)g_n(x) - f(x)g(x)\big)\big| \leq$$

$$\leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| \leq M\big(|f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)|\big).$$

αφού είναι και $|f(x)| \leq M$ στο $X \setminus Z$. Όμως, σύμφωνα με τις υποθέσεις, βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus Z$ και $n \geq N$ να είναι

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{και} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Κατά συνέπεια, με βάση τα παραπάνω, για $x \in X \setminus Z$ και $n \geq N$ έχουμε

$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

και άρα $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα μ−σ.π. όπως θέλαμε.

□

Η συνθήκη του ομοιόμορφου φράγματος στην προηγούμενη πρόταση δεν μπορεί να παραληφθεί. Αφήνεται ως άσκηση η κατασκευή ενός αντιπαραδείγματος.

7.2 Σύγκλιση κατά μέσο

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι βρισκόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Οι μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα τέτοιο χώρο καλούνται *τυχαίες μεταβλητές*. Αν $f : X \to \mathbb{C}$ μια τυχαία μεταβλητή λοιπόν, η ποσότητα

$$\mathbb{E}[f] = \int f \, d\mu \tag{7.5}$$

λέγεται *μέση τιμή* της f και είναι, κατά κάποιο τρόπο, το κέντρο της κατανομής της f. Αυτό οδηγεί στον εξής:

Ορισμός 7.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *κατά μέσο* αν

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0. \tag{7.6}$$

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy κατά μέσο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει

$$\int |f_n - f_m| \, d\mu < \varepsilon. \tag{7.7}$$

Είναι και πάλι σαφές, ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά μέσο σε μια συνάρτηση f, τότε είναι και Cauchy κατά μέσο.

Όπως και στην §7.1 αποδεικνύουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες της σύγκλισης κατά μέσο:

Πρόταση 7.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και $f_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f = g$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι λόγω της τριγωνικής ανισότητας και της γραμμικότητας του ολοκληρώματος για κάθε n έχουμε

$$\int |f-g|\,d\mu \le \int |f-f_n|\,d\mu + \int |f_n-g|\,d\mu \to 0$$

από τις δοσμένες συγκλίσεις. Έτσι, αφού $|f-g|\ge 0$, συμπεραίνουμε ότι $|f-g|=0$ μ−σ.π. ή ισοδύναμα ότι $f=g$ μ−σ.π.. □

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X\to\mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f,g : X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n\to f$ κατά μέσο και $g_n\to g$ κατά μέσο, τότε για κάθε $a,b\in\mathbb{C}$ είναι και $af_n+bg_n\to af+bg$ κατά μέσο.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι άμεσο από τη σχέση:

$$\int \big|(af_n+bg_n)-(af+bg)\big|\,d\mu \le |a|\int |f_n-f|\,d\mu + |b|\int |g_n-g|\,d\mu \to 0.$$

□

Σχετικά με τις ακολουθίες συναρτήσεων που είναι Cauchy κατά μέσο έχουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.2.4 (Riesz)**.** *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X\to\mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X\to\mathbb{C}$ ώστε $f_n\to f$ κατά μέσο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k}\to f$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε τη ζητούμενη συνάρτηση f. Αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, για κάθε k υπάρχει $n_k\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m,n\ge n_k$ να ισχύει

$$\int |f_n-f_m|\,d\mu < \frac{1}{2^k}.$$

Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι $n_1<n_2<\ldots$ (γιατί;) και κατά συνέπεια η $\{f_{n_k}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{f_n\}$. Από την κατασκευή της υπακολουθίας συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\int |f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\,d\mu < \frac{1}{2^k} \tag{7.8}$$

για κάθε k. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση $F : X\to[0,\infty]$ με

$$F=\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμη με

$$\int F\,d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int |f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\,d\mu<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1<\infty,$$

από το Θεώρημα Beppo-Levi 6.2.10. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $F<\infty$ μ−σ.π. στο X και άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x))$ συγκλίνει για κάθε $x\in B$ για κάποιο $B\in\mathcal{A}$ με $\mu(X\setminus B)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X\to\mathbb{C}$ με

$$f(x)=\begin{cases} f_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)), & \text{αν } x\in B\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases} \tag{7.9}$$

και παρατηρούμε ότι είναι μετρήσιμη και επιπλέον για $x \in B$ είναι

$$f(x) = \lim_K f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_K f_{n_K}(x).$$

Συνεπώς, πράγματι $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π. στο X.

Μένει να δειχθεί μόνο ότι $f_n \to f$ κατά μέσο. Για $x \in B$ παρατηρούμε ότι

$$|f_{n_K}(x) - f(x)| = \left| f_{n_K}(x) - f_{n_1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=K}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|.$$

Κατά συνέπεια, αφού $\mu(X \setminus B) = 0$ και από το Θεώρημα Beppo-Levi είναι

$$\int |f_{n_K} - f| \, d\mu \leq \sum_{k=K}^{\infty} \int \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| \, d\mu \to 0$$

και άρα $f_{n_k} \to f$ κατά μέσο καθώς $K \to \infty$. Τέλος, έχουμε ότι

$$\int |f_k - f| \, d\mu \leq \int |f_k - f_{n_k}| \, d\mu + \int |f_{n_k} - f| \, d\mu \to 0$$

καθώς $k \to \infty$ από τον παραπάνω υπολογισμό και το γεγονός ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

□

Πόρισμα 7.2.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Θεώρημα Riesz αφού η $\{f_n\}$ θα είναι επιπλέον Cauchy κατά μέσο. □

Παράδειγμα 7.2.6. Δεν είναι σωστό ότι η σύγκλιση κατά μέσο συνεπάγεται την μ−σ.π. σύγκλιση.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_1 = \chi_{(0,1)}$, $f_2 = \chi_{(0,\frac{1}{2})}$, $f_3 = \chi_{(\frac{1}{2},1)}$, $f_4 = \chi_{(0,\frac{1}{3})}$, $f_5 = \chi_{(\frac{1}{3},\frac{2}{3})}$ κ.ο.κ.. Δηλαδή, για κάθε n θεωρούμε τα διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{1}{n}$ που καλύπτουν το $(0,1)$ (ξεκινώντας από το $n = 1$) και μετά συνεχίζουμε στο $n + 1$. Είναι σαφές ότι

$$\int |f_m(x)| \, dx \to 0,$$

δηλαδή $f_m \to 0$ κατά μέσο αλλά δεν ισχύει $f_m \to 0$ μ−σ.π.: Αν $x \in (0,1)$ ένας άρρητος, τότε το x ανήκει σε άπειρα διαστήματα της μορφής $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ με $0 \leq k \leq n-1$ και άρα είναι $f_m(x) = 1$ για άπειρους δείκτες m: άρα η $\{f_m(x)\}$ δε συγκλίνει στο 0 για όλα τα άρρητα $x \in (0,1)$. □

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος Riesz είναι το εξής ανάλογο της Πρότασης 7.1.5 για τη σύγκλιση κατά μέσο:

Πρόταση 7.2.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f_n \to f$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu-$σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|f| \leq M$ $\mu-$σ.π..

(ii) Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, $g_n \to g$ κατά μέσο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu-$σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.

Απόδειξη. (i) Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f κατά σημείο $\mu-$σ.π. και άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5 (ii).

(ii) Ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 7.1.5 (ii) μπορούμε να βρούμε σύνολο $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus Z$ και $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leq M$$

και άρα και $|g(x)| \leq M$ από το (i). Έτσι, γράφουμε:

$$\int \big|f_n g_n - fg\big| \, d\mu = \int \big|(f_n g_n - f_n g) + (f_n g - fg)\big| \, d\mu \leq$$

$$\leq \int |f_n||g_n - g| \, d\mu + \int |f_n - f||g| \, d\mu \leq M \int |g_n - g| \, d\mu + M \int |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Συνεπώς, πράγματι είναι και $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.

□

7.3 Σύγκλιση κατά μέτρο

Ορισμός 7.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *κατά μέτρο* (ή κατά πιθανότητα), αν για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0. \tag{7.10}$$

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy κατά μέτρο* αν για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\big) < \delta. \tag{7.11}$$

Θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στα παρακάτω η εξής:

Παρατήρηση 7.3.2. Αν $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε για κάθε $a, b > 0$ ισχύει:

$$\mu\big(\{x : |f(x) + g(x)| \geq a + b\}\big) \leq \mu\big(\{x : |f(x)| \geq a\}\big) + \mu\big(\{x : |g(x)| \geq b\}\big).$$

Η απόδειξη της ανισότητας αφήνεται ως άσκηση.

Από την παραπάνω σχέση τώρα, είναι αρκετά εμφανές ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f κατά μέτρο, τότε η $\{f_n\}$ είναι και Cauchy κατά μέτρο – να το επαληθεύσετε.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $f_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f = g$ $\mu-$σ.π..*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, από την παρατήρηση πιο πάνω, για κάθε n είναι:

$$\mu\big(\{x : |f(x)-g(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq \mu\big(\{x : |f(x)-f_n(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\big)+\mu\big(\{x : |f_n(x)-g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\big)$$

το οποίο συγκλίνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Άρα $\mu(\{x \in X : |f(x)-g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και κατά συνέπεια $f = g$ $\mu-$σ.π. (γιατί;). □

Πρόταση 7.3.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ είναι $af_n + bg_n \to af + bg$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από τη σχέση:

$$\mu\big(\{x : |(af_n(x) + bg_n(x)) - (af(x) + bg(x))| \geq \varepsilon\}\big) \leq$$

$$\leq \mu\big(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|a|}\}\big) + \mu\big(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|b|}\}\big) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες ως άσκηση. □

Θα μελετήσουμε τώρα την συμπεριφορά των ακολουθιών $\{f_n\}$ που είναι Cauchy κατά μέτρο. Για αυτό θα χρειαστούμε την έννοια του $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων: Αν (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X θέτουμε

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα } A_n\}. \tag{7.12}$$

Σύμφωνα με την άσκηση 1.X, έχουμε την ταυτότητα

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{7.13}$$

Σχετικά με το $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων ισχύει και το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 7.3.5 (1ο Λήμμα Borel-Cantelli)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

τότε $\mu(\limsup_n A_n) = 0$ δηλαδή $\mu-$σχεδόν κάθε $x \in X$ ανήκει το πολύ σε πεπερασμένα από τα A_n.

Αυτή είναι η άσκηση 2.Ζ. Οι αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραλείπονται και αφήνονται ως ασκήσεις στον αναγνώστη.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν αυτά τα εργαλεία αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 7.3.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Επιπλέον υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, για κάθε k βρίσκουμε $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k},$$

για κάθε $m, n \geq n_k$. Μάλιστα, μπορούμε να διαλέξουμε τα n_k με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι $n_1 < n_2 < ...$ (γιατί;). Έτσι, η $\{f_{n_k}\}$ είναι μια υπακολουθία της $\{f_n\}$ και επιπλέον $\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}$ για κάθε k, όπου

$$A_k = \left\{x \in X : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Αφού λοιπόν $\sum_k \mu(A_k) < \infty$ συμπεραίνουμε ότι αν $F = \limsup_n A_n$, τότε από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli θα είναι $\mu(F) = 0$. Από τον ορισμό του $\limsup_n$ μιας ακολουθίας συνόλων, αν $x \in X \setminus F$ υπάρχει $K = K(x) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^k}, \quad \text{για κάθε } k \geq K.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

συγκλίνει για κάθε $x \in X \setminus F$, δηλαδή μ−σ.π. στο X. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)), & \text{αν } x \in X \setminus F \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{7.14}$$

Είναι εμφανές ότι η f είναι μετρήσιμη και επιπλέον για $x \in X \setminus F$ έχουμε

$$f(x) = \lim_K f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K-1}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = \lim_K f_{n_K}(x),$$

και άρα πράγματι $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π. στο X.

Μένει να δειχθεί μόνο η σύγκλιση κατά μέτρο. Αν θέσουμε

$$F_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \tag{7.15}$$

παρατηρούμε ότι

$$\mu(F_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

και επιπλέον ότι για $x \in X \setminus F_m$ είναι $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^k}$ για κάθε $k \geq m$. Συνεπώς, αν $x \in X \setminus F_m$ έχουμε ότι:

$$|f_{n_m}(x) - f(x)| = \left| f_{n_m}(x) - f_{n_1}(x) - \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m-1}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) - \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=m}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Από αυτό τον υπολογισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_m}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^{m-1}}\}) \leq \mu(F_m) < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^{m_0}} < \varepsilon$ και παρατηρούμε ότι για $m \geq m_0$ είναι:

$$\mu\big(\{x : |f_{n_m}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq \mu\big(\{x : |f_{n_m}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2^m}\}\big) \leq \frac{1}{2^m} \to 0$$

καθώς $m \to \infty$, δηλαδή $f_{n_k} \to f$ κατά μέτρο.

Τέλος, για κάθε k και $\varepsilon > 0$ είναι

$$\mu\big(\{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq$$

$$\leq \mu\big(\{x : |f_k(x) - f_{n_k(x)}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\big) + \mu\big(\{x : |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}\big) \to 0$$

αφού η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο και $f_{n_k} \to f$ κατά μέτρο. Άρα τελικά, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο. □

Πόρισμα 7.3.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π..*

Παράδειγμα 7.3.8. Δεν είναι σωστό ότι η σύγλιση κατά μέτρο συνεπάγεται την μ−σ.π. σύγκλιση: το Παράδειγμα 7.2.6 είναι αντιπαράδειγμα και εδώ – εξηγήστε γιατί.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα αφού η $\{f_n\}$ θα είναι επιπλέον Cauchy κατά μέτρο. □

Πρόταση 7.3.9. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ μ−σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε είναι και $|f| \leq M$ μ−σ.π..

(ii) Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, $g_n \to g$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ μ−σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι και $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

Απόδειξη. (i) Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f κατά σημείο $\mu-$σ.π. και άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5.
(ii) Βρίσκουμε, κατά τα γνωστά, σύνολο $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{και} \quad |g_n(x)| \leq M$$

για κάθε $x \in X \setminus Z$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\mu\big(\{x : |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \geq \varepsilon\}\big) \leq$$

$$\leq \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\}) + \mu(\{x : |g_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M}\})$$

(να την αποδείξετε) και άρα έπεται το ζητούμενο. □

7.4 Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση

Ασχολούμαστε σε αυτή την παράγραφο με μια κάπως ασθενέστερη μορφή της ομοιόμορφης $\mu-$σ.π. σύγκλισης. Δίνουμε τον εξής:

Ορισμός 7.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε λέμε ότι:

(i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f *σχεδόν ομοιόμορφα* αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$.

(ii) Η $\{f_n\}$ είναι *Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα* αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A$.

Είναι και πάλι σαφές από τον ορισμό ότι αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα.

Πρόταση 7.4.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και $f_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα τότε $f = g$ $\mu-$σ.π..*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις, βρίσκουμε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε

$$f_n \to f \;\; \text{ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1 \;\; \text{και} \;\; f_n \to g \;\; \text{ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2$$

και $\mu(A_1), \mu(A_2) < \delta$. Τότε, στο $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ είναι σίγουρα $f = g$ (γιατί;) και άρα $E \subseteq A_1 \cup A_2$. Συνεπώς

$$\mu(E) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) < 2\delta$$

και αφού το άρχικό $\delta > 0$ ήταν τυχόν, πράγματι $f = g$ $\mu-$σ.π.. □

Πρόταση 7.4.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ είναι $af_n + bg_n \to af + bg$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν τότε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_1), \mu(A_2) < \varepsilon/2$ και

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1, \quad g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2.$$

Αν θέσουμε $A = A_1 \cup A_2$, τότε $af_n + bg_n \to af + bg$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$ και $\mu(A) < \varepsilon$, άρα έπεται το ζητούμενο. □

Η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση συμπεριφέρεται καλύτερα σε σχέση με τις ακολουθίες Cauchy από τις συγκλίσεις που μελετήσαμε στις δύο προηγούμενες ενότητες. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.4.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Επιπλέον ισχύει ότι $f_n \to f$ $\mu-$σ.π..*

Απόδειξη. Για κάθε k βρίσκουμε σύνολα $A_k \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A_k$. Συνεπώς, υπάρχουν συναρτήσεις $g_k : X \setminus A_k \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to g_k$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_k$. Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

και παρατηρούμε ότι ορίζεται καλά μια $f : X \setminus A \to \mathbb{C}$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο A. Πράγματι, αν $x \in X \setminus A$, τότε $x \in X \setminus A_k$ για κάποιους δείκτες k και αφού $f_n(x) \to g_k(x)$ συμπεραίνουμε ότι οι ποσότητες $g_k(x)$ ταυτίζονται για όλους αυτούς τους δείκτες k. Επομένως, η f είναι μετρήσιμη και $f_n \to f$ κατά σημείο στο $X \setminus A$ και αφού

$$\mu(A) \leq \mu(A_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε k έπεται ότι $\mu(A) = 0$ και άρα $f_n \to f$ $\mu-$σ.π..

Για τη σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση τώρα, θεωρούμε $\delta > 0$ και βρίσκουμε k ώστε $\frac{1}{k} < \delta$. Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_k$ και $\mu(A_k) < \frac{1}{k} < \delta$ και άρα το ζητούμενο έπεται. □

Πόρισμα 7.4.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ $\mu-$σ.π..*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το προηγούμενο Θεώρημα αφού η $\{f_n\}$ θα είναι επιπλέον Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. □

Ανάλογα με τις προηγούμενες παραγράφους, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.4.4 και δείχνουμε την εξής:

Πρόταση 7.4.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n, g_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων και $f, g : X \to \mathbb{C}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις.*

(i) Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα και επιπλέον υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu-$σ.π. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $|f| \leq M$ $\mu-$σ.π..

(ii) *Αν* $f_n \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα και επιπλέον* $|f_n| \le M$ *και* $|g_n| \le M$ $\mu-$*σ.π. για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*, τότε* $f_n g_n \to fg$ *σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. (i) Από το προηγούμενο θεώρημα είναι και $f_n \to f$ $\mu-$σ.π. και άρα το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 7.1.5 (ii).

(ii) Έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε σύνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_1), \mu(A_2) < \delta/2$ και επιπλέον

$$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_1 \quad \text{και} \quad g_n \to g \text{ ομοιόμορφα στο } X \setminus A_2.$$

Πάλι από την Πρόταση 7.1.5 (ii) λοιπόν είναι $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα $\mu-$σ.π. στο $X \setminus (A_1 \cup A_2)$ και αφού $\mu(A_1 \cup A_2) < \delta$ έπεται και η ζητούμενη σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση.

□

7.5 Σύγκριση των διαφόρων ειδών σύγκλισης

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με διάφορα θεωρήματα που δείχνουν τη σχέση μεταξύ των συγκλίσεων που μελετήσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Ξεκινάμε από το εξής: είδαμε στο Θεώρημα 7.4.4 ότι αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f τότε συγκλίνει στην f και κατά σημείο $\mu-$σ.π.. Παραθέτουμε δύο μερικά αντίστροφα αυτού του θεωρήματος: Το πρώτο, το Θεώρημα Egorov, είναι η 2η από τις λεγόμενες «3 Αρχές του Littlewood» τις οποίες είχαμε ξαναναφέρει στο Κεφάλαιο 4.

Θεώρημα 7.5.1 (Egorov). *Έστω* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ένας χώρος μέτρου,* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f : X \to \mathbb{C}$ *μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν* $\mu(X) < \infty$ *και* $f_n \to f$ $\mu-$*σ.π., τότε* $f_n \to f$ *σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Κατ΄ αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ παντού στο X (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{k,m} = \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ για κάθε } n \ge m \right\} \tag{7.16}$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα (γιατί;). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν $x \in X$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ για κάθε $n \ge m$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{k,m}. \tag{7.17}$$

Κατά συνέπεια $\mu(A_{k,m}) \to \mu(X)$ για $m \to \infty$ και άρα για κάθε k μπορούμε να βρούμε $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(X) < \mu(A_{k,m_k}) + \frac{\delta}{2^k}.$$

Ορίζουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}.$$

Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \varepsilon$. Τότε για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \in A_{k,m_k}$ και άρα για κάθε $n \geq m_k$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

δηλαδή $\|(f_n - f)|_A\|_\infty < \varepsilon$.

Επίσης,

$$\mu(X \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta,$$

και άρα πράγματι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. □

Ένα άλλο μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος 7.4.4, που δεν απαιτεί το μέτρο μ να είναι πεπερασμένο είναι το εξής:

Θεώρημα 7.5.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ μ−σ.π. και επιπλέον υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε n και $\int g \, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Θεωρούμε και πάλι ότι $f_n \to f$ παντού στο X και τα σύνολα $A_{k,m}$ της προηγούμενης απόδειξης. Τότε, αφού $|f_n| \leq g$ για κάθε n είναι και $|f| \leq g$ και άρα $|f_n - f| \leq 2g$. Από τη σχέση αυτή και την (7.16) έπεται ότι

$$X \setminus A_{k,m} \subseteq \{x \in X : g(x) > \frac{1}{2k}\}. \tag{7.18}$$

Ισχυρισμός. Για κάθε k είναι $\mu(\{x \in X : g(x) > 1/2k\}) < \infty$.
Πράγματι, αν καλέσουμε S_k αυτό το σύνολο, αν το $\mu(S_k)$ ήταν άπειρο θα είχαμε

$$\infty > \int g \, d\mu \geq \int_{S_k} g \, d\mu > \int_{S_k} \frac{1}{2k} \, d\mu = \frac{1}{2k}\mu(S_k) = \infty :$$

άτοπο.

Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη, δείχνουμε ότι η ακολουθία $(X \setminus A_{k,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα με τομή το κενό σύνολο και άρα, λόγω του ισχυρισμού, είναι $\lim_n \mu(X \setminus A_{k,m}) = 0$ για κάθε k. Έτσι, βρίσκουμε $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(X \setminus A_{k,m_k}) < \frac{\delta}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k,m_k}.$$

Τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A (ακριβώς όπως πριν) και

$$\mu(X \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X \setminus A_{k,m_k}) = \delta.$$

Έτσι, πράγματι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. □

Συνεχίζουμε με άλλο ένα θεώρημα που επιβεβαιώνει ότι η σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρή: συνεπάγεται την σύγκλιση κατά μέτρο.

Θεώρημα 7.5.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{n_k} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.*

Απόδειξη. Για το ευθύ πρώτα: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση, βρίσκουμε ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x \in X \setminus A$ και $n \geq n_0$ να είναι

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Κατά συνέπεια

$$\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq A$$

και άρα

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(A) < \delta$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Όσον αφορά το αντίστροφο, έχει ήδη αποδειχθεί ουσιαστικά στο Θεώρημα 7.3.6: Ακολουθώντας τον συμβολισμό αυτής της απόδειξης, έχουμε ότι $\mu(F_m) < \frac{1}{2^{m-1}}$ για κάθε m. Έστω $\delta > 0$. Βρίσκουμε και πάλι m ώστε $\frac{1}{2^{m-1}} < \delta$ και τότε για $x \in X \setminus F_m$ είναι

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \geq m$. Συνεπώς,

$$\|(f_{n_k} - f)|_{X \setminus F_m}\|_\infty \leq \frac{1}{2^k} \to 0$$

για $k \to \infty$ και άρα $f_{n_k} \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus F_m$. Άρα, πράγματι $f_{n_k} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. $\square$

Συνδυάζοντας το προηγούμενο θεώρημα με το Θεώρημα Egorov παίρνουμε το εξής βασικό:

Πόρισμα 7.5.4 (Lebesgue)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) < \infty$ και $f_n \to f$ $\mu-$σ.π., τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

$\square$

Αποδεικνύουμε τώρα ένα βασικό εργαλείο για τα παρακάτω: την ανισότητα των Chebyshev-Markov που παρ' όλη την απλότητα της έχει, όπως θα δούμε, σημαντικότατες εφαρμογές:

Πρόταση 7.5.5 (Ανισότητα Chebyshev-Markov)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για καθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu. \tag{7.19}$$

Απόδειξη. ΣΧΗΜΑ.
Παρατηρούμε ότι, αν $A_\varepsilon = \{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}$, τότε

$$\int f \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} f \, d\mu \geq \int_{A_\varepsilon} \varepsilon \, d\mu = \varepsilon \cdot \mu(A_\varepsilon)$$

που ισοδυναμεί φυσικά με τη ζητούμενη. □

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε την σύγκλιση κατά μέτρο με τη σύγκλιση κατά μέσο. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.5.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ με $\int g \, d\mu$ και $|f_n| \leq g$ για κάθε n, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.*

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς για το ευθύ: έστω $\varepsilon > 0$. Από την ανισότητα Chebyshev-Markov έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f| \, d\mu \to 0,$$

αφού $f_n \to f$ κατά μέσο. Άρα, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Για το αντίστροφο τώρα, υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αν το ζητούμενο δεν ισχύει, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int |f_{n_k} - f| \, d\mu \geq \varepsilon_0 \tag{7.20}$$

για κάθε k. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο είναι και $f_{n_k} \to f$ κατά μέτρο και άρα, από το Πόρισμα 7.3.7, υπάρχει μια υπακολουθία $f_{n_{k_l}}$ της f_{n_k} ώστε $f_{n_{k_l}} \to f$ μ–σ.π.. Από τη σχέση $|f_{n_{k_l}}| \leq g$ και τη συνθήκη για τη g το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης 6.3.8 δίνει ότι

$$\int |f_{n_{k_l}} - f| \, d\mu \to 0$$

το οποίο έρχεται φυσικά σε αντίφαση με τη σχέση (7.20). Άρα, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέσο, όπως θέλαμε. □

Παράδειγμα 7.5.7. Δεν είναι σωστό ότι, γενικά, η σύγκλιση κατά μέτρο συνεπάγεται τη σύγκλιση κατά μέσο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$. Τότε, για $\varepsilon \in (0,1]$ είναι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \frac{1}{n} \to 0$$

και άρα $f_n \to 0$ κατά μέτρο. Όμως, για κάθε n είναι

$$\int |f_n(x)| \, dx = n\frac{1}{n} = 1 \nrightarrow 0$$

και άρα η $\{f_n\}$ δε συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά μέσο[1]. □

[1] Γιατί δεν εφαρμόζεται εδώ το προηγούμενο θεώρημα;

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της σύγκλισης κατά μέτρο σε ένα χώρο πεπερασμένου μέτρου:

Θεώρημα 7.5.8. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f κατά μέτρο.*

(ii) *Κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στην f μ−σ.π..*

(iii) $\int \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|}\, d\mu \to 0$ *καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. (i) ⇒ (ii) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο και θεωρούμε μια υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$. Τότε επιπλέον είναι και $f_{n_k} \to f$ κατά μέτρο και άρα το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 7.3.7.

(ii) ⇒ (iii) Αν υποθέσουμε ότι δεν αληθεύει το ζητούμενο, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int \frac{|f_{n_k} - f|}{1 + |f_{n_k} - f|}\, d\mu \geq \delta \tag{7.21}$$

για κάθε k. Όμως, από το (ii) μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{f_{n_{k_l}}\}$ της $\{f_{n_k}\}$ με $f_{n_{k_l}} \to f$ μ−σ.π. και άρα

$$\frac{|f_{n_{k_l}} - f|}{1 + |f_{n_{k_l}} - f|} \to 0.$$

Αφού ο χώρος είναι πεπερασμένου μέτρου και

$$\left| \frac{|f_{n_{k_l}} - f|}{1 + |f_{n_{k_l}} - f|} \right| \leq 1$$

στο X έπεται από το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης 6.3.9 ότι

$$\int \frac{|f_{n_{k_l}} - f|}{1 + |f_{n_{k_l}} - f|}\, d\mu \to 0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (7.21).

(iii) ⇒ (i) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε από την Ανισότητα Chebyshev-Markov συμπεραίνουμε ότι:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \mu\left(\left\{x : \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} \geq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|}\, d\mu \to 0,$$

σύμφωνα με το (iii).

□

7.6 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 8

Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα

Επιστρέφουμε σε αυτό το κεφάλαιο στη μελέτη των μετρήσιμων συναρτήσεων και ασχολούμαστε με τα εξής τρία βασικά αντικείμενα:

1. Δίνουμε αρχικά ένα γενικό ορισμό της μετρησιμότητας, δηλαδή ορίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to Y$, όπου $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ είναι μετρήσιμοι χώροι και στη συνέχεια μελετάμε τις βασικές τους ιδιότητες.

2. Μελετάμε το πρόβλημα της προσέγγισης μετρήσιμων συναρτήσεων από συνεχείς συναρτήσεις.

3. Μελετάμε τη σχέση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann και αποδεικνύουμε ότι το πρώτο αποτελεί πράγματι μια γνήσια γενίκευση του δεύτερου.

Τα αποτελέσματα αυτά συμβάλλουν σε μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της μετρησιμότητας και του ολοκληρώματος Lebesgue.

8.1 Μετρησιμότητα και το επαγόμενο μέτρο

Στην Πρόταση 5.1.7 (iv) αποδείξαμε ότι σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Ορμώμενοι από αυτό το αποτέλεσμα δίνουμε τον εξής γενικό ορισμό της μετρησιμότητας:

Ορισμός 8.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Η f λέγεται $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*μετρήσιμη* (ή μετρήσιμη ως προς $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$) αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ είναι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Ειδικά, στην περίπτωση που ο Y είναι μετρικός χώρος και $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$ η f λέγεται $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \tag{8.1}$$

παρατηρούμε ότι η f είναι $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη αν και μόνον αν

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}. \tag{8.2}$$

Πρόταση 8.1.2. *Έστω $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ και $(Z,\mathcal{C})$ μετρήσιμοι χώροι και συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Αν η f είναι $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη και η g είναι $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-μετρήσιμη, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι $(\mathcal{A},\mathcal{C})$-μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big). \tag{8.3}$$

Από την παρατήρηση παραπάνω έχουμε ότι $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$ και $g^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$. Έπεται λοιπόν ότι:

$$f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$$

που λόγω της (8.3) δίνει το ζητούμενο. □

Μια πολύ χρήσιμη παρατήρηση για να ελέγξει κανείς κατά πόσο μια συνάρτηση $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ είναι μετρήσιμη είναι το (ii) της ακόλουθης Πρότασης:

Πρόταση 8.1.3. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Η οικογένεια $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο X.

(ii) Αν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ με $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$, τότε η f είναι $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη αν και μόνον αν

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}. \tag{8.4}$$

Απόδειξη. Το (i) είναι σχεδόν άμεσο από τον ορισμό της σ-άλγεβρας και αφήνεται ως άσκηση. Για το (ii) τώρα, η f είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν

$$\mathcal{B} \subseteq \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}. \tag{8.5}$$

Αφού η οικογένεια $\mathcal{F}$ δεξιά είναι σ-άλγεβρα και $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ οι ισχυρισμοί $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ είναι ισοδύναμοι. □

Παρατηρήσεις 8.1.4. (α′) Όμοια με το (i) αποδεικνύεται και ότι η οικογένεια $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

(β′) Αν θεωρήσουμε την οικογένεια

$$\Delta = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$$

γνωρίζουμε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και κατά συνέπεια το (ii) της τελευταίας Πρότασης είναι ο Ορισμός 5.1.1 για μετρήσιμες συναρτήσεις $f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι επιπλέον ο μετρήσιμος χώρος $(X,\mathcal{A})$ έχει κι ένα μέτρο μ. Τότε, η μετρήσιμη συνάρτηση f επάγει ένα μέτρο στο χώρο $(Y,\mathcal{B})$ ως εξής:

Ορισμός 8.1.5. Έστω $(X,\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αν μ ένα μέτρο στο χώρο $(X,\mathcal{A})$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\nu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ που ορίζεται ως

$$\nu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big) := \mu(f \in B), \tag{8.6}$$

για $B \in \mathcal{B}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ν είναι μέτρο (επαληθεύστε το) στο χώρο $(Y,\mathcal{B})$. Το μέτρο ν λέγεται *εικόνα* του μ μέσω της f και συμβολίζεται με $f_*(\mu)$ ή με μ^f.

Μέσω αυτού του μέτρου έχουμε μια μορφή θεωρήματος «αλλαγής μεταβλητής» για το ολοκληρώμα Lebesgue. Πιο συγκεκριμένα, το επόμενο θεώρημα δίνει έναν τρόπο να μετατρέψουμε τα ολοκληρώματα ως προς $f_*(\mu)$ σε ολοκληρώματα ως προς μ.

Θεώρημα 8.1.6. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ και $(Y,\mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ μια $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αν το μ είναι ένα μέτρο στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ και $g : Y \to [-\infty,\infty]$ ή $g : Y \to \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_B g\ df_*(\mu) = \int_{f^{-1}(B)} g \circ f\ d\mu, \tag{8.7}$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}$. (Με την τελευταία ισότητα εννοούμε ότι το πρώτο ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνον αν υπάρχει το δεύτερο και σε αυτή την περίπτωση είναι ίσα.)

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, λόγω της Πρότασης 8.1.2 η συνάρτηση $g \circ f$ είναι μετρήσιμη και άρα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται έχουν νόημα. Επιπλέον, παρατηρώντας τη σχέση

$$(g \circ f) \cdot \chi_{f^{-1}(B)} = (g \cdot \chi_B) \circ f \tag{8.8}$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B = Y$ (εν ανάγκη θέτοντας $\widetilde{g} = g \cdot \chi_B$), και άρα $f^{-1}(B) = X$. Θέτουμε $\nu = f_*(\mu)$ και θα δείξουμε λοιπόν ότι

$$\int g\ d\nu = \int g \circ f\ d\mu.$$

Θα σπάσουμε την απόδειξη σε βήματα, ως συνήθως:

Βήμα 1. Η g είναι της μορφής $g = \chi_B$ για κάποιο σύνολο $B \in \mathcal{B}$.

Υπολογίζουμε τότε:

$$\int g\ d\nu = \int \chi_B d\nu = \nu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$$

και

$$\int g \circ f\ d\mu = \int \chi_B \circ f\ d\mu = \int \chi_{f^{-1}(B)}\ d\mu = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$$

και άρα ισχύει η ζητούμενη.

Βήμα 2. Η g είναι μη αρνητική απλή μετρησιμη συνάρτηση της μορφής

$$g = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το Βήμα 1 έχουμε:

$$\int g\ d\nu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j}\ d\nu = \sum_{j=1}^{m} b_j \int \chi_{B_j} \circ f\ d\mu = \int g \circ f\ d\mu,$$

όπως ζητήσαμε.

Βήμα 3. Η g είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

Από το Θεώρημα 5.3.3, μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών, απλών συναρτήσεων $(s_n)_n$ με $s_n \nearrow g$ στο Y. Από το Βήμα 2, έχουμε ότι για κάθε n είναι
$$\int s_n \, d\nu = \int s_n \circ f \, d\mu.$$
Όμως οι ακολουθίες $(s_n)_n$ και $(s_n \circ f)_n$ είναι αύξουσες ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $s_n \nearrow g$ και $s_n \circ f \nearrow g \circ f$. Εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 6.2.6 λοιπόν, έπεται ότι
$$\int g \, d\nu = \lim_n \int s_n \, d\nu = \lim_n \int s_n \circ f \, d\mu = \int g \circ f \, d\mu.$$

Βήμα 4. Η $g : Y \to [-\infty, \infty]$ είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση.

Γράφουμε, ως συνήθως, $g = g^+ - g^-$ και παρατητούμε ότι, από το Βήμα 3 είναι
$$\int g^+ \, d\nu = \int g^+ \circ f \, d\mu = \int (g \circ f)^+ \, d\mu$$
και
$$\int g^- \, d\nu = \int g^- \circ f \, d\mu = \int (g \circ f)^- \, d\mu.$$
Έτσι, πράγματι το ολοκλήρωμα $\int g \, d\nu$ υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχει το $\int g \circ f \, d\mu$ και σε αυτή την περίπτωση είναι ίσα.

Βήμα 5. Η $g : Y \to \mathbb{C}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη μιγαδική συνάρτηση.

Είναι άμεσο αν εφαρμόσουμε το Βήμα 4 στις μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$.

□

8.2 Το θεώρημα του Luzin

Στην ενότητα αυτή ασχολούμαστε με την προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^k$ από συνεχείς συναρτήσεις. Υπάρχουν πολλά αποτελέσματα σχετικά, που ισχύουν και σε γενικότερο πλαίσιο, αλλά εμείς θα αρκεστούμε στο θεώρημα του Luzin, το οποίο είναι η τελευταία από τις «3 Αρχές του Littlewood» που έχουμε ξαναναφέρει.

Θεώρημα 8.2.1 (Luzin). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$ και $f : A \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δώσουμε και πάλι την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Αν η f είναι της μορφής $f = \chi_E$ για κάποιο $E \subseteq A$ Lebesgue μετρήσιμο.

Θα «διαχωρίσουμε» τα σημεία στα οποία η f παίρνει τις τιμές 1 και 0. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, μπορούμε να βρούμε K κλειστό σύνολο στο A και G ανοικτό στο A με $K \subseteq E \subseteq G$ και
$$\lambda(E) \leq \lambda(K) + \frac{\varepsilon}{4}, \quad \lambda(G) \leq \lambda(E) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Αφού $\lambda(E) \leq \lambda(A) < \infty$ οι σχέσεις αυτές δίνουν:

$$\lambda(G \setminus K) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.9}$$

ΣΧΗΜΑ

Θεωρούμε το σύνολο $F_1 = K \cup (A \setminus G)$ και παρατηρούμε ότι

$$\lambda(A \setminus F_1) = \lambda(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τα σύνολα K και $A \setminus G$ είναι ξένα και κλειστά στο A και επιπλέον $f \equiv 1$ στο K και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Έπεται ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής συνάρτηση (γιατί;).

Πάλι από την εσωτερική κανονικότητα του λ βρίσκουμε $F \subseteq F_1$ κλειστό με $\lambda(F_1 \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Έτσι η $f|_F$ συνεχής και επιπλέον

$$\lambda(A \setminus F) = \lambda(A \setminus F_1) + \lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon.$$

Βήμα 2. Αν η f είναι απλή συνάρτηση της μορφής

$$f = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}.$$

Από το Βήμα 1, για κάθε j βρίσκουμε σύνολο $F_j \subseteq A$ κλειστό με $\lambda(A \setminus F_j) < \varepsilon/m$ και $\chi_{A_j}|_{F_j}$ συνεχής. Αν $F = \bigcap_{j=1}^{n} F_j$, τότε το F είναι κλειστό υποσύνολο του A, η $f|_F$ είναι συνεχής συνάρτηση και επιπλέον

$$\lambda(A \setminus F) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda(A \setminus F_j) < \varepsilon,$$

όπως θέλαμε.

Βήμα 3. Αν η f είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση.

Από το Πόρισμα 5.3.4, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(s_n)_n$ της μορφής του Βήματος 2 ώστε $s_n \to f$ στο A. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε κλειστό σύνολο $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$ ώστε η $s_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Θέτουμε

$$A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

και παρατηρούμε ότι

$$\lambda(A \setminus A_\infty) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{4}$$

και ότι φυσικά όλες οι $s_n|_{A_\infty}$ είναι συνεχείς. Για να περάσουμε όμως τη συνέχεια στην οριακή συνάρτηση f θα θέλαμε η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη. Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Egorov: μπορούμε να βρούμε σύνολο $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \frac{\varepsilon}{4}$ ώστε $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Μετά, για το σύνολο

$$C = B \cap A_\infty$$

είναι $\lambda(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2}$ (γιατί;) και η $f|_C$ είναι συνεχής, αφού οι $s_n|_C$ είναι συνεχείς για κάθε n και $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο C.

Το C είναι φυσικά μετρήσιμο, αλλά όχι απαραίτητα κλειστό. Από την εσωτερική κανονικότητα του λ βρίσκουμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq C$ ώστε $\lambda(C \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus C) + \lambda(C \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

και φυσικά η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής, αφού $F_\varepsilon \subseteq C$.

$\square$

Σχόλιο. Χρειάζεται κάποια προσοχή στη διατύπωση του Θεωρήματος Luzin: Δεν ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ κλειστό με $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε όλα τα σημεία του F_ε να είναι σημεία συνέχειας της f. Σε αυτή την περίπτωση η f θα ήταν συνεχής σχεδόν παντού στο A (γιατί;) το οποίο, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, σημαίνει ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Το αποτέλεσμα είναι ότι ο *περιορισμός* της f στο F_ε είναι συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, για την $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ στο $[0,1]$ ξέρουμε ότι είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0,1]$ ενώ ο περιορισμός της f στο $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ είναι η σταθερά 0.

8.3 Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann

Για μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ θα γράφουμε $\int_a^b f(x)\, dx$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $\int_a^b f\, d\lambda$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (οταν αυτά υπάρχουν). Επίσης λέγοντας «σχεδόν παντού» θα εννοούμε $\lambda-$σχεδόν παντού. Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) Η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{8.10}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

1. Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
2. Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη και $\int_E h\, d\lambda = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο E. Επομένως, αν $f \leq g$ και $\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.
3. Αν $s = \sum \lambda_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

$$\int_a^b s\, d\lambda = \int_a^b s(x)\, dx.$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\, dx \ , \ U(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n)$. Τότε,

$$\ell_n \leq f \leq u_n.$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$ και $\ell \leq f \leq u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$\int_a^b u\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

και

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αφού $\ell \leq u$ και $\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leq f \leq u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \quad \text{σχεδόν παντού.} \tag{8.11}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων (αιτιολογήστε τις λεπτομέρειες). Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος, από την (8.11) έχουμε

$$\int_a^b f\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx,$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει και το (ii). □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού.

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\lambda(\{x \in [a,b] : \ \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$, $\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n)$ και $\int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

$$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i\chi_{[x_i,x_{i+1})} \quad \text{και} \quad u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i\chi_{[x_i,x_{i+1})} \tag{8.12}$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leq f \leq u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a,b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_a^b \ell_n(x)\,dx \to \int_a^b \ell\,d\lambda \ \text{ και } \ \int_a^b u_n(x)\,dx \to \int_a^b u\,d\lambda.$$

Δηλαδή,

$$L(f,P_n) \to \int_a^b \ell\,d\lambda \ \text{ και } \ U(f,P_n) \to \int_a^b u\,d\lambda. \tag{8.13}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda.$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a,b]$, τότε για κάθε $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a,b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x-\delta, x+\delta)$, άρα

$$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \varepsilon,$$

δηλαδή $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon$. Όμως,

$$0 \leq u(x) - \ell(x) \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leq \varepsilon.$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Όμως $\lambda(A \cup P) = 0$ κα άρα $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

$$L(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx \ , \ U(f,P_n) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leq f \leq u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n(x)\,dx = L(f,P_n) \ , \ \int_a^b u_n(x)\,dx = U(f,P_n).$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leq f \leq u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \lim_n \int_a^b \ell_n(x)\,dx = \lim_n L(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

και

$$\int_a^b u\,d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n(x)\,dx = \lim_n U(f,P_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell\,d\lambda = \int_a^b u\,d\lambda. \tag{8.14}$$

Αφού $\ell \leq u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a,b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: έστω $x \in C \setminus P$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a,b] \setminus C) \cup P$, άρα $\lambda(A) = 0$. $\square$

Σχόλιο. Ισχύουν τα ακριβώς ανάλογα αποτελέσματα με αυτά που μόλις αποδείξαμε για την πραγματική ευθεία και για τους χώρους $\mathbb{R}^k$ γενικότερα.

8.4 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 9

Μέτρα γινόμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με μέτρα σε χώρους γινόμενα. Ξεκινάμε λοιπόν με δύο χώρους μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ και θέλουμε να δώσουμε στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ μια «φυσιολογική» δομή χώρου μέτρου $(X \times Y, \mathcal{C}, \rho)$. Ειδικότερα, θέλουμε:

1. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{C}$ να περιέχει όλα τα *μετρήσιμα ορθογώνια*, δηλαδή όλα τα σύνολα της μορφής $A \times B$ με $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.
2. Το μέτρο ρ να ακολουθεί τη δισδιάστατη έννοια του εμβαδού, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ να ισχύει
$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B). \tag{9.1}$$

Θα αποδείξουμε ότι, υπό συνθήκες, ένα τέτοιο μέτρο υπάρχει και είναι μάλιστα μοναδικό.

Το επόμενο φυσιολογικό ερώτημα είναι να καταλάβουμε πως «λειτουργεί» το ολοκλήρωμα ως προς αυτό το μέτρο ρ. Γνωρίζουμε, από τον Απειροστικό Λογισμό, ότι αν $K = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : K \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_K f(x, y)\ dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\ dydx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy, \tag{9.2}$$

όπου dA είναι το στοιχείο του εμβαδού στο επίπεδο (ουσιαστικά είναι το $d\lambda_2$). Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, το διπλό ολοκλήρωμα στο χώρο γινόμενο γράφεται ως δύο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα. Θα δούμε παρακάτω ότι το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα ισχύει και στη γενική περίπτωση δεδομένου φυσικά ότι ορίζεται καλά το μέτρο γινόμενο.

9.1 Χώροι και μέτρα γινόμενο

Ξεκινάμε με τον ορισμό της σ-άλγεβρας γινόμενο για την οποία μιλήσαμε στο 1. παραπάνω:

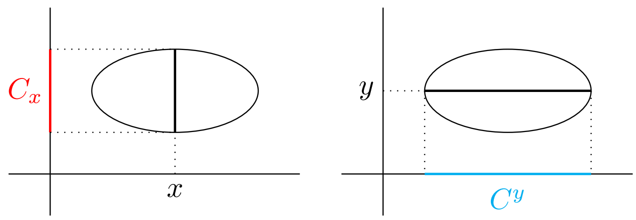
Ορισμός 9.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι. Ένα σύνολο $C \subseteq X \times Y$ καλείται *μετρήσιμο ορθογώνιο* αν είναι της μορφής $C = A \times B$ για κάποιο

$A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Η *σ-άλγεβρα γινόμενο* των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι εκείνη η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή η

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}). \tag{9.3}$$

Ορισμός 9.1.2. Έστω X, Y δύο σύνολα και ένα $C \subseteq X \times Y$. Αν $x \in X$ και $y \in Y$ οι *τομές* του C στα x και y αντίστοιχα είναι οι

$$C_x = \{y \in Y : (x, y) \in C\} \ \text{ και } C^y = \{x \in X : (x, y) \in C\}. \tag{9.4}$$



Σχήμα 9.1: Οι τομές ενός συνόλου C

Αν επιπλέον $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $f_x : Y \to \mathbb{R}$ και $f^y : X \to \mathbb{R}$ με

$$f_x(y) = f(x, y) \ \text{ και } f^y(x) = f(x, y). \tag{9.5}$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι της μορφής $f = \chi_C$ για κάποιο $C \subseteq X \times Y$, τότε $f_x = (\chi_C)_x = \chi_{C_x}$, αφού για $x \in X$ σταθερό είναι $f(x, y) = 1$ αν και μόνον αν $(x, y) \in C$, δηλαδή $y \in C_x$. Τελείως όμοια ισχύει και $f^y = (\chi_C)^y = \chi_{C^y}$.

Επίσης, αν το C είναι της μορφής $A \times B$ για κάποια $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, τότε

$$C_x = \begin{cases} B, & \text{αν } x \in A \\ \emptyset, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \text{και} \quad C^y = \begin{cases} A, & \text{αν } y \in B \\ \emptyset, & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \tag{9.6}$$

Γενικά ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 9.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A})$ και $(Y, \mathcal{B})$ δύο μετρήσιμοι χώροι.*

(i) Αν $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε $C_x \in \mathcal{B}$ και $C^y \in \mathcal{A}$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$.

(ii) Αν η f είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στο $X \times Y$, τότε η f_x είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη για κάθε $x \in X$ και η f^y είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη για κάθε $y \in Y$.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : C_x \in \mathcal{B}, \text{ για κάθε } x \in X\}. \tag{9.7}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Παρατηρούμε αρχικά, ότι αν $C = A \times B$ ένα μετρήσιμο ορθογώνιο, τότε από την (9.6) $C_x \in \mathcal{B}$ για κάθε $x \in X$ και άρα η $\mathcal{C}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια. Για να δειχθεί λοιπόν το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα. Παρατηρήστε αρχικά ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\big((X \times Y) \setminus C\big)_x = Y \setminus C_x \ \text{ και } \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x \tag{9.8}$$

(να τις ελέγξετε). Από αυτές τώρα, έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή είναι σ-άλγεβρα, όπως θέλαμε. Άρα, πράγματι ισχύει το ζητούμενο. Τελείως όμοια δείχνουμε και ότι $C^y \in \mathcal{A}$.

(ii) Έστω $(Z, \mathcal{D})$ ένας μετρήσιμος χώρος και $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{D})$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για $D \in \mathcal{D}$ είναι

$$(f_x)^{-1}(D) = \{y \in Y : f_x(y) = f(x, y) \in D\} = \left(f^{-1}(D)\right)_x \in \mathcal{B}$$

από το (i). Όμοια και η f^y είναι μετρήσιμη.

□

Σχόλιο. Στο (ii) παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τη γενική έννοια της μετρησιμότητας του προηγούμενου κεφαλαίου. Αν η συνάρτηση f παίρνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$ τα αντίστοιχα σύνολα D είναι τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, b]$ όπου $b \in \mathbb{R}$ ενώ αν παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$ είναι τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$.

Εισάγουμε σε αυτό το σημείο ένα συμβολισμό: Αν f μια μετρήσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ θα γράφουμε

$$\int f \; d\mu = \int_X f(x) \; d\mu(x) \tag{9.9}$$

για να ξεχωρίζουμε κάθε φορά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.

Όπως είπαμε και στην αρχή του κεφαλαίου θέλουμε να αποδείξουμε θεωρήματα τύπου Fubini σε αρκετά «καλές» καταστάσεις. Ειδικότερα, αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο «καλοί» χώροι μέτρου και $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ μια «καλή» συνάρτηση θα θέλαμε να μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της διπλής ολοκλήρωσης, δηλαδή

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \; d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \; d\mu(x) \right) d\nu(y). \tag{9.10}$$

Λίγο πιο προσεκτικά, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία και ως

$$\int_X \left(\int_Y f_x(y) \; d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f^y(x) \; d\mu(x) \right) d\nu(y). \tag{9.11}$$

Εκείνοι οι χώροι μέτρου για τους οποίους θα πετύχουμε τέτοιας φύσης αποτελέσματα είναι ακριβώς οι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Θα φανεί αργότερα ποιές θα είναι οι «καλές» συναρτήσεις, αλλά σε κάθε περίπτωση θα θέλαμε οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις να είναι τέτοιες. Έχουμε λοιπόν το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 9.1.4 (Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Για $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_C : X \to [0, \infty]$ και $\psi_C : Y \to [0, \infty]$ που ορίζονται ως*

$$\phi_C(x) = \nu(C_x) = \int_Y \chi_{C_x}(y) \; d\nu(y) = \int_Y \chi_C(x, y) \; d\nu(y) \tag{9.12}$$

και

$$\psi_C(y) = \mu(C^y) = \int_X \chi_{C^y}(x) \; d\mu(x) = \int_X \chi_C(x, y) \; d\mu(x). \tag{9.13}$$

Τότε η ϕ_C είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, η ψ_C $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_C \; d\mu = \int_Y \psi_C \; d\nu, \tag{9.14}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_X \left(\int_Y \chi_C(x,y)\ d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_C(x,y)\ d\mu(x) \right) d\nu(y). \tag{9.15}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι τα μ και ν είναι πεπερασμένα. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{C} = \left\{ C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu \right\} \tag{9.16}$$

και θα δείξουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Όμως $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\Delta)$, όπου Δ η οικογένεια όλων των μετρήσιμων ορθογωνίων και αφού η Δ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές (γιατί;) συμπεραίνουμε ότι επιπλέον ισχύει $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \delta(\Delta)$ από το Θεώρημα 1.2.4. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι:

1. Η $\mathcal{C}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια.
2. Η $\mathcal{C}$ είναι κλάση Dynkin.

Για το πρώτο, αν $C = A \times B$ με $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ έχουμε ότι $C_x = B$ για $x \in A$ και $C_x = \emptyset$ αλλιώς. Επίσης $C^y = A$ για $y \in B$ και $C^y = \emptyset$ αλλιώς και άρα $\phi_C(x) = \nu(B)\chi_A$ και $\psi_C(y) = \mu(A)\chi_B$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \int_A \nu(B)\ d\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_B \mu(A)\ d\nu = \int_Y \psi_C\ d\nu.$$

Για το δεύτερο, πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού της κλάσης Dynkin. Κατ΄ αρχάς προφανώς $X \times Y \in \mathcal{C}$ αφού το $X \times Y$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο.

Θεωρούμε $(C_n)_n$ αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{C}$ και θα δείξουμε ότι $C := \bigcup_n C_n \in \mathcal{C}$. Όλες οι ϕ_{C_n} και ψ_{C_n} είναι μετρήσιμες και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_{C_n}\ d\mu = \int_Y \psi_{C_n}\ d\nu$$

για κάθε n. Αφού η $(C_n)_n$ είναι αύξουσα, το ίδιο ισχύει και για τις $\big((C_n)_x\big)$ και $\big((C_n)^y\big)$ και επιπλέον έχουμε

$$C_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)_x \quad \text{και} \quad C^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n)^y.$$

Έτσι, οι (ϕ_{C_n}) και (ψ_{C_n}) είναι αύξουσες και επιπλέον

$$\phi_C(x) = \nu(C_x) = \lim_n \nu\big((C_n)_x\big) = \lim_n \phi_{C_n}(x)$$

και

$$\psi_C(y) = \mu(C^y) = \lim_n \mu\big((C_n)^y\big) = \lim_n \psi_{C_n}(y)$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Έτσι, οι ϕ_C και ψ_C είναι μετρήσιμες και επιπλέον, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 6.2.6 έχουμε ότι

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \lim_n \int_X \phi_{C_n}\ d\mu = \lim_n \int_Y \psi_{C_n}\ d\nu = \int_Y \psi_C\ d\nu,$$

δηλαδή πράγματι $C \in \mathcal{C}$.

Θεωρούμε τώρα δύο σύνολα $C, D \in \mathcal{C}$ με $C \subseteq D$ και θα δείξουμε ότι $D \setminus C \in \mathcal{C}$. Για $x \in X$ και $y \in Y$ είναι

$$(D \setminus C)_x = D_x \setminus C_x \quad \text{και} \quad (D \setminus X)^y = D^y \setminus C^y \tag{9.17}$$

και άρα, αφού $C_x \subseteq D_x$ και $C^y \subseteq D^y$ και τα μ και ν είναι πεπερασμένα έχουμε:

$$\phi_{D\setminus C}(x) = \nu(D_x \setminus C_x) = \nu(D_x) - \nu(C_x) = \phi_D(x) - \phi_C(x)$$

και όμοια $\psi_{D\setminus C} = \psi_D - \psi_C$. Έπεται λοιπόν ότι οι $\phi_{D\setminus C}$ και $\psi_{D\setminus C}$ είναι μετρήσιμες και επιπλέον

$$\int_X \phi_{D\setminus C}\ d\mu = \int_X \phi_D - \phi_C\ d\mu = \int_X \phi_D\ d\mu - \int_X \phi_C\ d\mu =$$

$$= \int_Y \psi_D\ d\nu - \int_Y \psi_C\ d\nu = \int_Y \psi_D - \psi_C\ d\nu = \int_Y \psi_{D\setminus C}\ d\nu.$$

Άρα πράγματι $D \setminus C \in \mathcal{C}$.

Έτσι, ισχύουν τα 1 και 2 παραπάνω και άρα έπεται και το ζητούμενο στην περίπτωση των πεπερασμένων μέτρων. Στη γενική περίπτωση τώρα, βρίσκουμε αύξουσες ακολουθίες $(X_n)_n$ και $(Y_n)_n$ στις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αντίστοιχα ώστε $X = \bigcup_n X_n$, $Y = \bigcup_n Y_n$ και για κάθε n ισχύει $\mu(X_n), \nu(Y_n) < \infty$. Θεωρούμε, ως συνήθως, τους περιορισμούς μ_n και ν_n των μ και ν που ορίζονται ως

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n) \quad \text{και} \quad \nu_n(B) = \nu(B \cap Y_n)$$

για $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

Τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα μέτρα και για οποιεσδήποτε μετρήσιμες συναρτήσεις f και g στα X και Y αντίστοιχα ισχύει

$$\int_X f\ d\mu_n = \int_{X_n} f\ d\mu \quad \text{και} \quad \int_Y g\ d\nu_n = \int_{Y_n} g\ d\nu, \tag{9.18}$$

αρκεί να ορίζονται όλα τα ολοκληρώματα. (Η απόδειξη αυτών των σχέσεων αφήνεται ως άσκηση.) Αφού τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα, σύμφωνα με τα παραπάνω οι συναρτήσεις

$$x \mapsto \nu_n(C_x) \quad \text{και} \quad y \mapsto \mu_n(C^y)$$

είναι μετρήσιμες και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \nu_n(C_x)\ d\mu_n(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\ d\nu_n(y)$$

για κάθε n. Σύμφωνα με τη σχέση (9.18) τώρα η τελευταία γράφεται ως

$$\int_X \nu_n(C_x)\chi_{X_n}(x)\ d\mu(x) = \int_Y \mu_n(C^y)\chi_{Y_n}(y)\ d\nu(y). \tag{9.19}$$

Όμως, εύκολα βλεπουμε ότι $\phi_C(x) = \nu(C_x) = \lim_n \nu_n(C_x)$ και όμοια $\psi_C(y) = \lim_n \mu_n(C^y)$ και άρα οι ϕ_C και ψ_C είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Τώρα, αφού οι ακολουθίες (X_n) και (Y_n) είναι αύξουσες το ίδιο ισχύει και για τις υπό ολοκλήρωση ακολουθίες της σχέσης (9.19). Επομένως, στέλνοντας το n στο ∞ έχουμε (από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 6.2.6) ότι

$$\int_X \phi_C(x)\ d\mu(x) = \int_Y \psi_C(y)\ d\nu(y),$$

όπως θέλαμε. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος.

□

Αν υποθέταμε προς στιγμήν ότι είχε οριστεί ένα μέτρο ρ στον $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ ώστε να ικανοποιείται η (9.1) και θέλαμε να ισχύει και κάποιο αποτέλεσμα τύπου Fubini για την $f = \chi_C$ θα έπρεπε:

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu = \int_{X\times Y} \chi_C\ d\rho = \rho(C).$$

Με βάση αυτή την παρατήτηση αποδεικνύουμε λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 9.1.5. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο ρ στο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ώστε*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \textit{για κάθε } A \in \mathcal{A} \textit{ και } B \in \mathcal{B}. \tag{9.20}$$

Επιπλέον το ρ δίνεται από τη σχέση

$$\rho(C) = \int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu, \quad \textit{για } C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \tag{9.21}$$

όπου οι ϕ_C και ψ_C είναι όπως στο προηγούμενο θεώρημα.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά την ύπαρξη. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση ρ που ορίζεται από τις σχέσεις (9.21) και θα δείξουμε ότι ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Κατ΄ αρχάς είναι

$$\rho(\emptyset) = \int_X \phi_\emptyset\ d\mu = \int_X \nu(\emptyset_x)\ d\mu(x) = 0.$$

Επομένως, μένει να δειχθεί μόνο η αριθμήσιμη προσθετικότητα. Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία $(C_n)_n$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ και θα δείξουμε ότι

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \rho(C_n). \tag{9.22}$$

Υπολογίζουμε λοιπόν:

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\right) = \int_X \phi_{\cup_n C_n}\ d\mu = \int_X \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (C_n)_x\right)\ d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^\infty \nu\big((C_n)_x\big)\ d\mu(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_X \nu\big((C_n)_x\big)\ d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_X \phi_{C_n}\ d\mu = \sum_{n=1}^\infty \rho(C_n),$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι τα $(C_n)_x$ είναι ξένα ανά δύο και στην επόμενη το Θεώρημα Beppo Levi 6.2.10. Έτσι, πράγματι το ρ είναι μέτρο. Αν $A \times B$ ένα μετρήσιμο ορθογώνιο τώρα, δηλαδή $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ έχουμε:

$$\rho(A \times B) = \int_X \nu\big((A \times B)_x\big)\ d\mu(x) = \int_A \nu(B)\ d\mu(x) = \mu(A)\nu(B).$$

Συνεπώς, πράγματι το ρ ικανοποιεί τα ζητούμενα, άρα πράγματι το μέτρο γινόμενο για χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου υπάρχει.

Για τη μοναδικότητα τώρα, θεωρούμε τ ένα άλλο μέτρο στο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ με την ιδιότητα

$$\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ και } B \in \mathcal{B}$$

και θα δείξουμε ότι ταυτίζεται με το ρ. Βρίσκουμε αύξουσες ακολουθίες (X_n) και (Y_n) μετρήσιμων συνόλων ώστε $X = \bigcup_n X_n$ και $Y = \bigcup_n Y_n$ και επίσης, για κάθε n να ισχύει $\mu(X_n) < \infty$ και $\nu(Y_n) < \infty$. Τότε όμως, $X \times Y = \bigcup_n (X_n \times Y_n)$ και επιπλέον

$$\tau(X_n \times Y_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) = \rho(X_n \times Y_n) < \infty.$$

Έτσι, αφού η οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές έπεται, από το Θεώρημα Μοναδικότητας 2.2.1, ότι $\rho = \tau$. □

Ορισμός 9.1.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Το μοναδικό μέτρο ρ που εξασφαλίζεται από το προηγούμενο θεώρημα λέγεται *μέτρο γινόμενο* των μ και ν και συμβολίζεται με $\mu \times \nu$. Ο χώρος μέτρου $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ λέγεται *χώρος γινόμενο* των $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Παρατηρήστε ότι με τον τρόπο που ορίστηκε το μέτρο γινόμενο είμαστε τώρα σε θέση να ξαναγράψουμε τη σχέση (9.14) ως εξής:

$$\int_X \phi_C\ d\mu = \int_Y \psi_C\ d\nu = \int_{X \times Y} \chi_C\ d(\mu \times \nu). \tag{9.23}$$

Πόρισμα 9.1.7 (Αρχή Cavalieri)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν $C, D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ για τα οποία*

$$\nu(C_x) = \nu(D_x) \ \ \mu - \textit{σχεδόν για κάθε } x \in X$$

τότε $(\mu \times \nu)(C) = (\mu \times \nu)(D)$.

Απόδειξη. Η δοσμένη σχέση γράφεται και ως $\phi_C = \phi_D$ $\mu-$σ.π. στο X και άρα, πράγματι

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_X \phi_C\ d\mu = \int_X \phi_D\ d\mu = (\mu \times \nu)(D).$$

□

Εξετάζουμε τώρα τη συμπεριφορά του μέτρου Lebesgue στα γινόμενα:

Παράδειγμα 9.1.8. Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το μέτρο Lebesgue λ_n στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Αν $k, m \in \mathbb{N}$ με $n = k + m$, τότε:

(α′) Ισχύει $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, όπου έχουμε κάνει φυσικά την ταύτιση $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.

(β′) Είναι $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_m$.

Απόδειξη. (α′) Θα αποδείξουμε διαδοχικά τους δύο εγκλεισμούς. Θεωρούμε αρχικά δύο σύνολα $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ και θα δείξουμε ότι $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Αν

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \ \text{ και } \ \pi_2 : \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

οι απεικονίσεις προβολής, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^k \times B) = \pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B).$$

Αφού οι π_1 και π_2 είναι συνεχείς συμπεραίνουμε ότι τα $\pi_1^{-1}(A)$ και $\pi_2^{-1}(B)$ είναι σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και άρα το ίδιο ισχύει και για το $A \times B$. Συνεπώς η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια και αφού επιπλέον είναι σ-άλγεβρα έχουμε τον εγκλεισμό $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό τώρα, αρκεί φυσικά να δείξουμε ότι αν G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, αφού η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ παράγεται από τα ανοικτά σύνολα. Από το βασικό Λήμμα 3.2.3 μπορούμε να βρούμε ακολουθία ξένων ανά δύο διαστημάτων R_t, $t = 1, 2, ...$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$G = \bigcup_{t=1}^{\infty} R_t.$$

Είναι σαφές όμως, ότι κάθε διάστημα R_t γράφεται στη μορφή $R_t = R_t^{(1)} \times R_t^{(2)}$ όπου το $R_t^{(1)}$ είναι ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και το $R_t^{(2)}$ είναι ένα διάστημα στον $\mathbb{R}^m$ και άρα $R_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ για κάθε t. Έπεται λοιπόν και ότι

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R_t^{(1)} \times R_t^{(2)}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

άρα και η ζητούμενη ισότητα.

(β′) Γνωρίζουμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι το μοναδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$\lambda_n(I) = \mathrm{v}_n(I), \ \text{ για κάθε } I \text{ διάστημα στον } \mathbb{R}^n,$$

όπου v_n ο n-διάστατος όγκος του I. Αν I ένα τέτοιο διάστημα, τότε μπορούμε να γράψουμε $I = I^{(1)} \times I^{(2)}$ όπου τα $I^{(1)}$ και $I^{(2)}$ είναι διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα και άρα:

$$(\lambda_k \times \lambda_m)(I) = (\lambda_k \times \lambda_m)(I^{(1)} \times I^{(2)}) = \lambda_k(I^{(1)})\lambda_m(I^{(2)}) =$$

$$\mathrm{v}_k(I^{(1)})\mathrm{v}_m(I^{(2)}) = \mathrm{v}_n(I^{(1)} \times I^{(2)}) = \mathrm{v}_n(I).$$

Έτσι, πράγματι $\lambda_n = \lambda_k \times \lambda_m$. □

Παράδειγμα 9.1.9. Το θεώρημα Fubini για χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορεί να μην ισχύει αν έστω και ένα από τα μ και ν δεν είναι σ-πεπερασμένο.

Απόδειξη. Έστω $(X,\mathcal{A}) = (Y,\mathcal{B}) = ([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$, μ το μέτρο Lebesgue στο $(X,\mathcal{A})$ και ν το αριθμητικό μέτρο στον $(Y,\mathcal{B})$. Θεωρούμε το $\Delta = \{(x,x) : x \in [0,1]\} \subseteq X \times Y$ και παρατηρούμε ότι $\Delta \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ και επίσης για $x \in X$ και $y \in Y$ είναι

$$\phi_\Delta(x) = \nu(\Delta_x) = \nu(\{x\}) = 1$$

και

$$\psi_\Delta(y) = \mu(\Delta^y) = \mu(\{y\}) = 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_X \phi_\Delta \ d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \psi_\Delta \ d\nu.$$

□

Σχόλιο. Στην ενότητα αυτή αποδείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που έχουμε δύο χώρους σ-πεπερασμένου μέτρου ορίζεται πάντα ένα μοναδικό μέτρο γινόμενο (δηλαδή που να ικανοποιεί τη σχέση 9.1) στο χώρο γινόμενο. Δεν είναι γενικά σωστό, αν αφαιρέσουμε την υπόθεση του σ-πεπερασμένου μέτρου, ότι υπάρχει πάντα μόνο ένα τέτοιο μέτρο: στην άσκηση Χ δίνεται ένα αντιπαράδειγμα. Παρόλα αυτά είναι γεγονός ότι για οποιουσδήποτε δύο χώρους μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ υπάρχει ένα μέτρο ρ στον $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ που να ικανοποιεί την (9.1). Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος χρησιμοποιεί το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή αλλά ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Θα σκιαγραφήσουμε τα βασικά της βήματα στην άσκηση Υ παρακάτω.

9.2 Τα θεωρήματα Tonelli και Fubini

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε δύο διαφορετικές εκδοχές θεωρημάτων τύπου Fubini. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.4 και τον Ορισμό 9.1.6, αν οι X και Y είναι χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και $f = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, τότε ισχύει

$$\int_X \left(\int_Y f \ d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f \ d\mu\right) d\nu = \int_{X\times Y} f \ d(\mu\times\nu). \tag{9.24}$$

Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε τέτοιες ταυτότητες για ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων. Το φυσιολογικότερο που θα σκεφτόταν μάλλον κανείς είναι να προχωρήσουμε όπως ακριβώς και στον ορισμό του ολοκληρώματος στο κεφάλαιο 6: μετά από τις χαρακτηριστικές να φτάσουμε στις απλές, στη συνέχεια στις μη αρνητικές μετρήσιμες και τέλος στις ολοκληρώσιμες. Αυτή ακριβώς την πορεία θα κρατήσουμε· ξεκινάμε λοιπόν από το εξής:

Θεώρημα 9.2.1 (Tonelli)**.** *Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ και $(Y,\mathcal{B},\nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Αν $f : X\times Y \to [0,\infty]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση θεωρούμε τις συναρτήσεις $\phi_f : X \to [0,\infty]$ και $\psi_f : Y \to [0,\infty]$ που ορίζονται ως*

$$\phi_f(x) = \int_Y f_x \ d\nu = \int_Y f(x,y) \ d\nu(y) \tag{9.25}$$

και

$$\psi_f(y) = \int_X f^y \ d\mu = \int_X f(x,y) \ d\mu(x). \tag{9.26}$$

Τότε η ϕ_f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, η ψ_f $\mathcal{B}$-μετρήσιμη και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f \; d\mu = \int_Y \psi_f \; d\nu = \int_{X\times Y} f \; d(\mu\times\nu) \tag{9.27}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \; d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f \; d(\mu\times\nu). \tag{9.28}$$

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, οι ϕ_f και ψ_f είναι καλά ορισμένες σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.3. Ως συνήθως, δίνουμε την απόδειξη σε βήματα:

Βήμα 1. Η f είναι της μορφής $f = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

Όπως είπαμε και πριν τη διατύπωση του θεωρήματος, προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 9.1.4 και τον Ορισμό 9.1.6, αν παρατηρήσουμε ότι $\phi_f = \phi_C$ και $\psi_f = \psi_C$ ακολουθώντας τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 9.1.4.

Βήμα 2. Η f είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση, δηλαδή της μορφής

$$f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{C_j}$$

για κάποια $a_j \geq 0$ και $C_j \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$.

Είναι εμφανές ότι για $x \in X$ είναι

$$f_x = \sum_{j=1}^n a_j (\chi_{C_j})_x$$

και κατά συνέπεια η γραμμικότητα του ολοκληρώματος δίνει

$$\phi_f = \sum_{j=1}^n a_j \phi_{C_j} \tag{9.29}$$

η οποία είναι μετρήσιμη. Τελειώς όμοια φυσικά, παίρνουμε ότι

$$\psi_f = \sum_{j=1}^n a_j \psi_{C_j} \tag{9.30}$$

και άρα και η ψ_f είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, από το Βήμα 1, για κάθε j έχουμε

$$\int_X \phi_{C_j} \; d\mu = \int_Y \psi_{C_j} \; d\nu = \int_{X\times Y} \chi_{C_j} \; d(\mu\times\nu).$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις με a_j και προσθέτοντας παίρνουμε ότι (λόγω των (9.29) και (9.30)) ότι

$$\int_X \phi_f \; d\mu = \int_Y \psi_f \; d\nu = \int_{X\times Y} f \; d(\mu\times\nu),$$

δηλαδή τη ζητούμενη.

Βήμα 3. Η f είναι τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

Κατά τα γνωστά, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(s_n)_n$ μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $s_n \nearrow f$. Τότε, για $x \in X$, η ακολουθία συναρτήσεων $\big((s_n)_x\big)_n$ είναι αύξουσα και επιπλέον $(s_n)_x \nearrow f_x$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_n \phi_{s_n}(x) = \lim_n \int_Y (s_n)_x \, d\nu = \int_Y f_x \, d\nu = \phi_f(x).$$

Τελείως όμοια έχουμε και τη σχέση

$$\lim_n \psi_{s_n}(y) = \psi_f(y)$$

για κάθε $y \in Y$. Όμως, από το Βήμα 2 οι ϕ_{s_n} και ψ_{s_n} είναι μετρήσιμες για κάθε n και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_{s_n} \, d\mu = \int_Y \psi_{s_n} \, d\nu = \int_{X \times Y} s_n \, d(\mu \times \nu).$$

Άρα, και οι συναρτήσεις ϕ_f και ψ_f είναι μετρήσιμες και μάλιστα, αφού και οι $(\phi_{s_n})_n$ και $(\psi_{s_n})_n$ είναι αύξουσες (γιατί;), έπεται από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ότι

$$\int_X \phi_f \, d\mu = \int_Y \psi_f \, d\nu = \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu).$$

$\square$

Πόρισμα 9.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δυο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \times Y \to \mathbb{C}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$.

(ii) Ισχύει $\int_X \int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) < \infty$.

(iii) Ισχύει $\int_Y \int_X |f(x, y)| \, d\mu(x) \, d\nu(y) < \infty$.

Απόδειξη. Η $|f|$ είναι μετρήσιμη, μη αρνητική συνάρτηση και από το Θεώρημα Tonelli ισχύει:

$$\int_X \int_Y |f(x, y)| \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int_Y \int_X |f(x, y)| \, d\mu(x) \, d\nu(y) = \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu).$$

Προφανώς λοιπόν αν ισχύει μία από τις (i)-(iii), δηλαδή ένα από τα τρία ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο τότε το ίδιο ισχύει και για τις άλλες δύο. $\square$

Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε φυσικά τί γίνεται με τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{C}$. Για αυτές ισχύει το εξής:

Θεώρημα 9.2.3 (Fubini)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου και μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$. Τότε:*

(i) Ισχύει $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $x \in X$ και $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$.

(ii) Οι συναρτήσεις $\phi_f : X \to \mathbb{C}$ και $\psi_f : Y \to \mathbb{C}$ που ορίζονται ως

$$\phi_f(x) = \begin{cases} \int_Y f_x(y)\ d\nu(y), & \text{αν } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{9.31}$$

και

$$\psi_f(y) = \begin{cases} \int_X f^y(x)\ d\mu(x), & \text{αν } f^y \in \mathcal{L}^1(\mu) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{9.32}$$

ανήκουν στους $\mathcal{L}^1(\mu)$ και $\mathcal{L}^1(\nu)$ αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει

$$\int_X \phi_f\ d\mu = \int_Y \psi_f\ d\nu = \int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu) \tag{9.33}$$

δηλαδή, ουσιαστικά

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu). \tag{9.34}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό ϕ_h και ψ_h για μια μετρήσιμη συνάρτηση $h : X \times Y \to [0,\infty]$ όπως κάναμε στο Θεώρημα Tonelli.
(i) Αφού $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα έχουμε ότι

$$\int_X \left(\int_Y |f_x(y)|\ d\nu(y)\right) d\mu(x) < \infty$$

και κατά συνέπεια

$$\int_Y |f_x(y)|\ d\nu(y) < \infty$$

$\mu-$σχεδόν για κάθε $x \in X$ (εξηγήστε το αυτό αναλυτικά). Με άλλα λόγια $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ $\mu-$σχεδόν για κάθε $x \in X$. Τελείως όμοια έχουμε και ότι $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\nu-$σχεδόν για κάθε $y \in Y$.

(ii) Θέτουμε $A = \{x \in X : f_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\}$ και παρατηρούμε ότι για ένα $x \in X$ είναι

$$\int_Y |f_x(y)|\ d\nu(y) = \infty \ \text{ αν και μόνο αν } \phi_{|f|}(x) = 0$$

και άρα $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$, αφού η $\phi_{|f|}$ είναι μετρήσιμη. Για την απόδειξη της (9.33) τώρα:

Υποθέτουμε αρχικά ότι η f είναι πραγματική συνάρτηση. Για $x \in X \setminus A$ έχουμε

$$\phi_f(x) = \int_Y f_x(y)\ d\nu(y) = \int_Y (f_x)^+(y)\ d\nu(y) - \int_Y (f_x)^-(y)\ d\nu(y) =$$

$$= \int_Y (f^+)_x(y)\ d\nu(y) - \int_Y (f^-)_x(y)\ d\nu(y) = \phi_{f^+}(x) - \phi_{f^-}(x).$$

Άρα $\phi_f = (\phi_{f^+} - \phi_{f^-})\chi_{X\setminus A}$. Από το Θεώρημα Tonelli λοιπόν, η ϕ_f είναι μετρήσιμη και επιπλέον, αφού $\mu(A) = 0$ και $f \in \mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ ισχύουν οι:

$$\int_X \phi_{f^+}\chi_{X\setminus A}\ d\mu = \int_X \phi_{f^+}\ d\mu = \int_{X\times Y} f^+\ d(\mu\times\nu) < \infty$$

και
$$\int_X \phi_{f^-}\chi_{X\setminus A}\; d\mu = \int_X \phi_{f^-}\; d\mu = \int_{X\times Y} f^-\; d(\mu\times\nu) < \infty.$$
Συνεπώς
$$\int_X |\phi_f|\; d\mu \leq \int_X \phi_{f^+}\; d\mu + \int_X \phi_{f^-}\; d\mu = \int_{X\times Y} |f|\; d(\mu\times\nu) < \infty,$$
δηλαδή $\phi_f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Μάλιστα είναι και
$$\int_X \phi_f\; d\mu = \int_X \phi_{f^+}\chi_{X\setminus A}\; d\mu - \int_X \phi_{f^-}\chi_{X\setminus A}\; d\mu =$$
$$= \int_{X\times Y} f^+\; d(\mu\times\nu) - \int_{X\times Y} f^-\; d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\; d(\mu\times\nu).$$
Τελείως ανάλογα αποδεικνύεται και η σχέση με την ψ_f.

Για τη γενική περίπτωση τώρα: γράφουμε $f = f_1 + if_2$ όπου οι f_1, f_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες ως προς $\mu\times\nu$. Θέτουμε
$$A_1 = \{x\in X : (f_1)_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\} \text{ και } A_2 = \{x\in X : (f_2)_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\}.$$
Αφού $f_x = (f_1)_x + i(f_2)_x$ έπεται ότι $A = \{x\in X : f_x \notin \mathcal{L}^1(\nu)\} = A_1\cup A_2$ (συνεπώς $\mu(A)=0$) και επίσης $\phi_f = (\phi_{f_1} + i\phi_{f_2})\chi_{X\setminus A}$. Άρα η ϕ_f είναι μετρήσιμη και $\phi_f = \phi_{f_1} + i\phi_{f_2}$ $\mu-$σ.π. στο X και συνεπώς $\phi_f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ και
$$\int_X \phi_f\; d\mu = \int_X \phi_{f_1}\; d\mu + i\int_X \phi_{f_2}\; d\mu =$$
$$= \int_{X\times Y} f_1\; d(\mu\times\nu) + i\int_{X\times Y} f_2\; d(\mu\times\nu) = \int_{X\times Y} f\; d(\mu\times\nu).$$
Τελείως όμοια έπεται και το συμπερασμα για τις ψ_f και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Με την ίδια ουσιαστικά απόδειξη μπορεί να δείξει κανείς ότι το Θεώρημα Fubini είναι έχει ισχύ και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty,\infty]$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Σχόλιο. Συνήθως τα θεωρήματα Tonelli και Fubini εφαρμόζονται μαζί. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : X\times Y\to\mathbb{C}$ βολεύει πολλές φορές να αποδείξουμε πρώτα ότι $f\in\mathcal{L}^1(\mu\times\nu)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Tonelli (ουσιαστικά το πόρισμα που το ακολουθεί) και στη συνέχεια να το υπολογίσουμε μέσω του Θεωρήματος Fubini αναδιατάσσοντας τα ολοκληρώματα με κατάλληλη σειρά. Μια εφαρμογή αυτής της ιδέας θα δούμε στο Κεφάλαιο 11 που θα μελετήσουμε τη συνέλιξη στο χώρο $L^1(\mu)$.

9.3 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 10

Το Θεώρημα Radon-Nikodym

Ο στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να παρουσιάσουμε αναλυτικά το θεμελιώδες Θεώρημα Radon-Nikodym. Το θεώρημα αυτό ξεχωρίζει κυρίως λόγω της ευρείας εφαρμογής του στη Θεωρία Πιθανοτήτων και τη Συναρτησιακή Ανάλυση.

Παρατηρήσαμε στην §6.2.1 ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση, τότε το $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \tag{10.1}$$

ορίζει ένα μέτρο στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ το οποίο είναι, όπως λέμε, *απόλυτα συνεχές* ως προς το μ, δηλαδή αν $\mu(A) = 0$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$, τότε είναι και $\nu(A) = 0$. Το Θεώρημα Radon-Nikodym εξετάζει κατά πόσο ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή ποιές συνθήκες πρέπει να ισχύουν για ένα μέτρο μ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε κάθε απόλυτα συνεχές μέτρο ν ως προς μ να είναι της μορφής (10.1). Θα δούμε στη συνέχεια ότι αρκεί η υπόθεση ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο.

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις για την απόδειξη του θεωρήματος. Είναι ιδιαίτερα σύνηθες να αποδεικνύεται μετά από τη μελέτη της έννοιας του *προσημασμένου μέτρου* χρησιμοποιώντας την ανάλυση Hahn ενός τέτοιου μέτρου. Παρ' όλα αυτά εμεις θα αποφύγουμε αυτά τα εργαλεία και θα δώσουμε μια σύντομη απόδειξη που βασίζεται μόνο σε όσα έχουμε μελετήσει μέχρι το Κεφάλαιο 6. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε και μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος με χρήση θεωρίας χώρων Hilbert εφαρμοσμένης στον $L^2(\mu)$.

10.1 Απόλυτη συνέχεια και καθετότητα

Κάνουμε σε αυτό το σημείο μια σύντομη μελέτη της έννοιας της απόλυτης συνέχειας που αναφέραμε παραπάνω. Ξεκινάμε με τον ορισμό:

Ορισμός 10.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Λέμε ότι το ν είναι *απόλυτα συνεχές* ως προς μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$ αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ είναι και $\nu(A) = 0$.

Η έκφραση «απόλυτα συνεχές» που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω δικαιολογείται από την εξής ενδιαφέρουσα πρόταση:

Πρόταση 10.1.2. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στο $(X,\mathcal{A})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ να ισχύει $\nu(A) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ας υποθέσουμε ότι το (ii) δεν αληθεύει. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε n να μπορούμε να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(A_n) \geq \varepsilon.$$

Θέτουμε $A = \limsup_n A_n$ και παρατηρούμε ότι, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

έπεται από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 2.Ζ) ότι $\mu(A) = 0$, άρα και $\nu(A) = 0$. Όμως, από την άσκηση 1.Υ έχουμε ότι:

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_n \nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \varepsilon$$

αφού $\nu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$ για κάθε n και άρα έχουμε αντίφαση.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A) = 0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, βρίσκουμε ένα $\delta > 0$ ώστε να ισχύει η (ii) αλλά τότε $\mu(A) < \delta$ και άρα $\nu(A) < \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε πράγματι ότι $\nu(A) = 0$ και κατά συνέπεια ότι $\nu \ll \mu$.

□

Περνάμε τώρα στην έννοια της καθετότητας που θα χρειαστούμε μετά την απόδειξη του Θεωρήματος Radon-Nikodym:

Ορισμός 10.1.3. Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$.

(i) Λέμε ότι το μ είναι *συγκεντρωμένο* σε ένα $A \in \mathcal{A}$ αν ισχύει $\mu(X \setminus A) = 0$.

(ii) Λέμε ότι τα μέτρα μ και ν είναι *κάθετα* αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε το μ να είναι συγκεντρωμένο στο A και το ν να είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus A$. Γράφουμε τότε $\mu \perp \nu$.

Μερικές σχεδόν άμεσες ιδιότητες της απόλυτης συνέχειας και της καθετότητας περιέχονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 10.1.4. *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν και ρ μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $\nu \ll \mu$ και $\rho \ll \mu$, τότε $\nu + \rho \ll \mu$.*

(ii) *Αν $\mu \perp \nu$ και $\rho \perp \nu$, τότε $\mu + \rho \perp \nu$.*

(iii) *Αν $\nu \ll \mu$ και $\rho \perp \mu$, τότε $\nu \perp \rho$.*

(iv) Αν $\nu \ll \mu$ και $\nu \perp \mu$, τότε $\nu = 0$.

Απόδειξη. (i) Αν $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) = 0$, από τις δοσμένες παίρνουμε ότι $\nu(A) = 0$ και $\rho(A) = 0$. Άρα και $(\nu + \rho)(A) = \nu(A) + \rho(A) = 0$.

(ii) Βρίσκουμε σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) = \nu(A) = \rho(X \setminus B) = \nu(B) = 0.$$

Έτσι, για $C = A \cup B \in \mathcal{A}$ είναι $\nu(C) = 0$ και $\mu(X \setminus C) = \rho(X \setminus C) = 0$ (γιατί;). Άρα και $(\mu + \rho)(X \setminus C) = 0$, και συνεπώς $\mu + \rho \perp \nu$.

(iii) Αφού $\rho \perp \mu$ βρίσκουμε ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\rho(X \setminus A) = 0$ και $\mu(A) = 0$. Αφού όμως $\nu \ll \mu$ έχουμε και ότι $\nu(A) = 0$ και άρα είναι και $\nu \perp \rho$.

(iv) Από το (iii), για $\rho = \nu$, συμπεραίνουμε ότι $\nu \perp \nu$ και άρα πράγματι $\nu = 0$ (γιατί;). □

10.2 Το Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym

Ξεκινάμε σε αυτή την ενότητα την απόδειξη του Θεωρήματος Radon-Nikodym στην περίπτωση που τα μέτρα μ και ν είναι πεπερασμένα. Στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε το εξής ισχυρότερο θεώρημα αναπαράστασης:

Θεώρημα 10.2.1 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ και ένα $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε*

$$\nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}. \tag{10.2}$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Κατασκευή της συνάρτησης f.

Η συνάρτηση f που ψάχνουμε σίγουρα έχει

$$\int_A f \, d\mu \leq \nu(A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Θα διαλέξουμε εκείνη τη συνάρτηση που προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την ισότητα εδώ. Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια

$$\mathcal{H} = \left\{ h : X \to [0, \infty) : \int_A h \, d\mu \leq \nu(A), \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} \right\}. \tag{10.3}$$

Για την $\mathcal{H}$ παρατηρούμε τα εξής:

(i) Είναι $\mathcal{H} \neq \emptyset$, αφού $0 \in \mathcal{H}$.

(ii) Αν $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ τότε $h_1 \vee h_2 \in \mathcal{H}$. Πράγματι, αν $B = [h_1 > h_2]$ και $A \in \mathcal{A}$ τυχόν είναι:

$$\int_A h_1 \vee h_2 \, d\mu = \int_{A \cap B} h_1 \vee h_2 \, d\mu + \int_{A \setminus B} h_1 \vee h_2 \, d\mu =$$

$$= \int_{A \cap B} h_1 \, d\mu + \int_{A \setminus B} h_2 \, d\mu \leq \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A).$$

(iii) Για $h \in \mathcal{H}$ είναι
$$\int h \, d\mu \leq \nu(X) < \infty, \tag{10.4}$$
αφού το μέτρο ν είναι πεπερασμένο.

Θέτουμε λοιπόν
$$a = \sup\left\{\int h \, d\mu : \; h \in \mathcal{H}\right\} < \infty. \tag{10.5}$$
Θα δείξουμε ότι αυτό το supremum είναι στην πραγματικότητα maximum και η συνάρτηση στην οποία επιτυγχάνεται θα είναι η ζητούμενη f. Για κάθε n βρίσκουμε συνάρτηση $h_n \in \mathcal{H}$ ώστε
$$a - \frac{1}{n} \leq \int h_n \, d\mu$$
και άρα αν $g_n = \max\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ είναι $g_n \in \mathcal{H}$ και
$$a - \frac{1}{n} \leq \int h_n \, d\mu \leq \int g_n \, d\mu \leq a. \tag{10.6}$$
Όμως, η ακολουθία $(g_n)_n$ είναι αύξουσα (γιατί;) και άρα συγκλίνει κατά σημείο σε μια μετρήσιμη συνάρτηση f. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης και τη σχέση (10.6) συμπεραίνουμε ότι $f \in \mathcal{H}$ και μάλιστα
$$\int f \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu = a.$$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tau : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ με
$$\tau(A) = \nu(A) - \int_A f \, d\mu, \quad \text{για } A \in \mathcal{A} \tag{10.7}$$
και παρατηρούμε ότι είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ (γιατί;). Πρέπει να βρούμε σύνολο D με $\mu(D) = 0$ και $\tau(A) = \nu(A \cap D)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αν $\mu(D) = 0$ όμως, υπολογίζουμε
$$\tau(A) = \tau(A \cap D) + \tau(A \setminus D) = \nu(A \cap D) - \int_{A \cap D} f \, d\mu + \tau(A \setminus D) = \nu(A \cap D) + \tau(A \setminus D).$$
Συνεπώς το D πρέπει και αρκεί επιπλέον να ικανοποιεί επιπλέον τη σχέση $\tau(A \setminus D) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Οπότε, συνολικά, ψάχνουμε ένα $D \in \mathcal{A}$ ώστε
$$\mu(D) = 0 \;\text{ και }\; \tau(X \setminus D) = 0. \tag{10.8}$$
Θα μας φανεί χρήσιμο το εξής τεχνικό Λήμμα:

Βήμα 2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

(i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.

(ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.

(iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ-μέτρου.

Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{S} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E} : \text{ ισχύουν οι (i) και (ii) παραπάνω}\}. \tag{10.9}$$

Το (iii) παραπέμπει στην εύρεση μιας οικογένειας $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ η οποία να είναι πολύ «μεγάλη» και άρα στη χρήση του Λήμματος Zorn. Αν $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ μια αλυσίδα στοιχείων της $\mathcal{S}$, τότε αυτή έχει άνω φράγμα στην $\mathcal{S}$ αφού $\mathcal{F}_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$ για κάθε $j \in I$ και επιπλέον $\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i \in \mathcal{S}$ – η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση.

Επομένως υπάρχει $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$ μεγιστικό ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Για την $\mathcal{F}$ ισχύουν φυσικά οι (i) και (ii) αφού $\mathcal{F} \in \mathcal{S}$. Για την (iii) τώρα, αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ και υπήρχε $E \in \mathcal{E}$ με $\mu(E) > 0$ ώστε $E \subseteq X \setminus F$ τότε θα ήταν $E \cap A = \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ (γιατί;) και άρα θα είχαμε $\mathcal{F} \cup \{E\} \in \mathcal{S}$: άτοπο από τη μεγιστικότητα του $\mathcal{F}$.

Μένει να δειχθεί η αριθμησιμότητα της $\mathcal{F}$. (Παρατηρήστε ότι δεν έχει χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα ότι το μ είναι πεπερασμένο) Για κάθε n η οικογένεια

$$\mathcal{F}_n = \left\{ A \in \mathcal{F} : \mu(A) > \frac{1}{n} \right\} \tag{10.10}$$

είναι πεπερασμένη, αφού αν υπήρχε ακολουθία $\{A_n : n = 1, 2, ...\} \subseteq \mathcal{F}_n$ από το (ii) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού το μ είναι πεπερασμένο. Από το (i) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \tag{10.11}$$

και άρα η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη.

Βήμα 3. Κατασκευή του D.

Όπως είπαμε και πριν το Λήμμα λοιπόν, ψάχνουμε ένα σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με

$$\mu(D) = 0 \quad \text{και} \quad \tau(X \setminus D) = 0.$$

Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E}_n = \left\{ A \in \mathcal{A} : \tau(A) < \frac{\mu(A)}{n} \right\} \tag{10.12}$$

και παρατηρούμε ότι

(α′) αν $A \in \mathcal{E}_n$ τότε $\mu(A) > 0$ και ότι

(β′) η $\mathcal{E}_n$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ξένες ενώσεις

(να τα επαληθεύσετε). Εφαρμόζοντας, το Βήμα 2 για καθένα από τα $\mathcal{E}_n$ βρίσκουμε αριθμήμισες οικογένειες $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{E}_n$ ξένων ανά δύο συνόλων θετικού μ-μέτρου, ώστε αν $G_n = \bigcup \mathcal{G}_n$ το $X \setminus G_n$ να μην περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}_n$ θετικού μ-μέτρου.

Από το (β′) παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κάθε $G_n \in \mathcal{E}_n$ και άρα

$$\tau(G_n) \leq \frac{\mu(G_n)}{n} \leq \frac{\mu(X)}{n}.$$

Έτσι, αν $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ έχουμε ότι $\tau(G) \leq \tau(G_n) \to 0$ και άρα $\tau(G) = 0$. Θέτουμε λοιπόν

$$D = G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c \tag{10.13}$$

και παρατηρούμε ότι μένει να δειχθεί μόνο ότι $\mu(D) = 0$. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον τρόπο που διαλέξαμε την f. Αρκεί φυσικά (από την υποπροσθετικότητα του μέτρου) να δειχθεί ότι $\mu(X \setminus G_n) = 0$ για κάθε n.

Ισχυρισμός. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{E}_n$ ώστε $B_n \subseteq A$.

Πράγματι, αν θέσουμε

$$g = f + \frac{1}{n}\chi_A \tag{10.14}$$

η g δεν είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{H}$ αφού

$$\int g\ d\mu = \int f\ d\mu + \frac{1}{n}\mu(A) > \int f\ d\mu = \sup\left\{\int h\ d\mu : h \in \mathcal{H}\right\}.$$

Συνεπώς, υπάρχει σύνολο $B \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\int_B g\ d\mu > \nu(B)$$

ή ισοδύναμα

$$\nu(B) < \int_B f\ d\mu + \frac{1}{n}\int_B \chi_A\ d\mu = \int_B f\ d\mu + \frac{1}{n}\mu(A \cap B).$$

Συνεπώς, για το $B_n = A \cap B$ έχουμε

$$\tau(B_n) \leq \tau(B) = \nu(B) - \int_B f\ d\mu < \frac{\mu(A \cap B)}{n},$$

δηλαδή $B_n \in \mathcal{E}_n$ όπως θέλαμε.

Σταθεροποιούμε έναν φυσικό αριθμό n λοιπόν. Αν ήταν $\mu(X \setminus G_n) > 0$ θα βρίσκαμε $B_n \in \mathcal{E}_n$ με $\mu(B_n) > 0$ ώστε $B_n \subseteq X \setminus G_n$ το οποίο είναι άτοπο από τον τρόπο επιλογής της οικογένειας $\mathcal{G}_n$. Έτσι, πράγματι $\mu(X \setminus G_n) = 0$ και άρα $\mu(D) = 0$ και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

Σαν άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος Lebesgue-Radon-Nikodym έχουμε τώρα το Θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα:

Πόρισμα 10.2.2 (Θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μια μοναδική $\mu-$σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f\ d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}. \tag{10.15}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym βρίσκουμε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ και σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε

$$\nu(A) = \nu(A \cap D) + \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

Αφού όμως $\mu(D) = 0$ και $\nu \ll \mu$ έπεται ότι $\nu(D) = 0$ και συνεπώς και $\nu(A \cap D) = 0$. Άρα πράγματι

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Για τη μοναδικότητα τώρα, υποθέτουμε ότι υπάρχει και μια $f_0 : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη ώστε το ν να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f_0 ως προς μ και θα δείξουμε ότι $f = f_0$ μ-σ.π. στο X. Αφού $f, f_0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ έπεται ότι και $f - f_0 \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και επιπλέον για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι

$$\int_A (f - f_0) \, d\mu = \int_A f \, d\mu - \int_A f_0 \, d\mu = \nu(A) - \nu(A) = 0.$$

Συνεπώς, πράγματι έπεται το ζητούμενο (γιατί;). □

10.3 Η γενική μορφή του θεωρήματος

Όπως είπαμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου, στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα Radon-Nikodym στην περίπτωση που το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε άλλο ένα τεχνικό Λήμμα στη φιλοσοφία του Βήματος 2 της απόδειξης του Θεωρήματος 10.2.1:

Λήμμα 10.3.1. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να είναι*

$$\mu(E \setminus F) = 0, \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{E}. \tag{10.16}$$

(Παρατηρήστε ότι έπεται από αυτό ότι το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ θετικού μέτρου.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το μ είναι πεπερασμένο και θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}_\sigma$ που αποτελείται από όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{E}$. Φυσικά, κάθε στοιχείο της $\mathcal{E}_\sigma$ ανήκει και στην $\mathcal{A}$ και άρα έχει νόημα η ποσότητα

$$a = \sup\{\mu(E) : E \in \mathcal{E}_\sigma\} \tag{10.17}$$

για την οποία επιπλέον ισχύει $0 \le a \le \mu(X) < \infty$. Βρίσκουμε λοιπόν μια ακολουθία $(E_n)_n$ στοιχείων της $\mathcal{E}_\sigma$ ώστε $\mu(E_n) \to a$ και θέτουμε $F = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Όμως τότε $F \in \mathcal{E}_\sigma$ (γιατί;) και άρα υπάρχει $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε $F = \bigcup \mathcal{F}$. Έτσι, για κάθε n έχουμε ότι

$$\mu(E_n) \le \mu(F) \le a$$

και αφού $\mu(E_n) \to a$ έπεται ότι $\mu(F) = a$. Συνεπώς, αφού το μ είναι πεπερασμένο, για $E \in \mathcal{E}$ έχουμε ότι

$$\mu(E \setminus F) = \mu(E \cup F) - \mu(F) = \mu(E \cup F) - a \le a - a = 0,$$

αφού $E \cup F \in \mathcal{E}_\sigma$. Συνεπώς, πράγματι $\mu(E \setminus F) = 0$.

Στη γενική περίπτωση τώρα, αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο, βρίσκουμε ακολουθία $(X_n)_n$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ και $\mu(X_n) < \infty$ για κάθε n. Θέτουμε λοιπόν $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$ για $A \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι κάθε μ_n είναι ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Κατά συνέπεια, από τα παραπάνω, για κάθε n βρίσκουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{E}$ ώστε

$$\mu_n\left(E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\right) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $E \in \mathcal{E}$. Θέτουμε τότε

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \tag{10.18}$$

και παρατηρούμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ και αν επιπλέον $F = \bigcup \mathcal{F}$, για $E \in \mathcal{E}$ είναι

$$\begin{aligned}\mu\left(E \setminus F\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X_n \cap E \setminus F\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(X_n \cap E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\left(E \setminus \bigcup \mathcal{F}_n\right) = 0,\end{aligned}$$

όπως δηλαδη ζητήσαμε. □

Παρατήρηση 10.3.2. Αν $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ δύο αριθμήσιμες υποοικογένειες της $\mathcal{E}$ όπως στο παραπάνω λήμμα, τότε

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{F} \triangle \bigcup \mathcal{F}'\right) = 0. \tag{10.19}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\bigcup \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{F}' = \bigcup \left\{E \setminus \bigcup \mathcal{F}' : E \in \mathcal{F}\right\}$$

και αφού η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{F}'\right) \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu\left(E \setminus \bigcup \mathcal{F}'\right) = 0$$

από τη σχέση (10.16) για την $\mathcal{F}'$.Τελείως όμοια έπεται και η σχέση

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{F}\right) = 0$$

και κατά συνέπεια και η (10.19). □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα αποδεικνύουμε τώρα το:

Θεώρημα 10.3.3 (Radon-Nikodym)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο και $\nu \ll \mu$. Τότε υπάρχει μια μοναδική $\mu-\sigma.\pi.$ μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}. \tag{10.20}$$

Αν επιπλέον και το ν είναι σ-πεπερασμένο τότε η f μπορεί να επιλεγεί ώστε να παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Δίνουμε και πάλι την απόδειξη σε βήματα:

Βήμα 1. Τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα.

Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε ακολουθίες $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_i) < \infty$ και $\nu(A_j) < \infty$ για κάθε i και j. Αν πάρουμε ως $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση της οικογένειας $\{A_i \cap B_j\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ παρατηρούμε ότι η (X_n) αποτελείται από ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(X_n), \nu(X_n) < \infty$ για κάθε n – επεξηγήστε τις λεπτομέρειες.

Θέτουμε τώρα $\mu_n = \mu|_{\mathcal{A}_{X_n}}$ και $\nu_n = \nu|_{\mathcal{A}_{X_n}}$, όπου $\mathcal{A}_{X_n} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq X_n\}$ το ίχνος της $\mathcal{A}$ στο X_n. Τα μ_n και ν_n είναι πεπερασμένα μέτρα με $\nu_n \ll \mu_n$ και άρα από το Θεώρημα Radon-Nikodym για πεπερασμένα μέτρα συμπεραίνουμε ότι για κάθε n υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f_n : X_n \to [0, \infty)$ ώστε

$$\nu_n(A) = \int_A f_n \, d\mu_n, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n,$$

ή ισοδύναμα

$$\nu(A) = \int_A f_n \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n. \tag{10.21}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty)$ ώστε $f|_{X_n} = f_n$ για κάθε n και παρατηρούμε ότι αυτή ορίζεται καλά και είναι μετρήσιμη (γιατί;). Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (10.21) και το Θεώρημα Beppo-Levi, για $A \in \mathcal{A}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap X_n} f_n \, d\mu = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap X_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f\chi_{X_n} \, d\mu = \\
&= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{X_n} = \int_A f \cdot 1 \, d\mu = \int_A f \, d\mu.
\end{aligned}$$

Αν τώρα $f_0 : X \to [0, \infty)$ μια άλλη μετρήσιμη συνάρτηση ώστε το ν να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f_0 ως προς μ, συμπεραίνουμε ότι για κάθε n

$$\nu_n(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq X_n$$

και άρα από την μοναδικότητα για πεπερασμένα μέτρα έπεται ότι $f = f_0$ $\mu-$σ.π. στο X_n. Συνεπώς, αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ έχουμε πράγματι ότι $f = f_0$ $\mu-$σ.π. στο X (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).

Βήμα 2. Η γενική περίπτωση: το ν δεν είναι απαραίτητα σ-πεπερασμένο.

Θα ξεχωρίσουμε εκείνα τα υποσύνολα του X στα οποία το ν είναι πεπερασμένο και θα διαμερίσουμε στη συνέχεια το X κατάλληλα βάσει του προηγούμενου λήμματος. Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} : \nu(A) < \infty\} \tag{10.22}$$

και σύμφωνα με το Λήμμα 10.3.1 βρίσκουμε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ αριθμήσιμη ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να είναι $\mu(E \setminus F) = 0$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$. Αν γράψουμε $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, ...\}$ έχουμε ότι $\nu(F_n) < \infty$ (αφού $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$) για κάθε n και άρα το $\nu|_{\mathcal{A}_F}$ είναι σ-πεπερασμένο. Αφού επιπλέον $\nu|_{\mathcal{A}_F} \ll \mu|_{\mathcal{A}_F}$, σύμφωνα με το Βήμα 1, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : F \to [0, \infty)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ με } A \subseteq F.$$

Μένει να δούμε μόνο τι γίνεται για εκείνα τα A με $A \subseteq X \setminus F$:

Ισχυρισμός. Αν $A \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq X \setminus F$, τότε $\nu(A) = \infty \cdot \mu(A)$[1].

Πράγματι, αν για κάποιο τέτοιο A είναι $\mu(A) = 0$, τότε θα είναι και $\nu(A) = 0$ αφού $\nu \ll \mu$ ενώ αν $\mu(A) > 0$ θα είναι και $\mu(A \setminus F) > 0$ (γιατί;) και άρα $A \notin \mathcal{E}$, δηλαδή $\nu(A) = \infty$.

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $f : X \to [0, \infty]$ με

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in F \\ \infty, & x \in X \setminus F \end{cases} \tag{10.23}$$

και παρατηρούμε ότι για $A \in \mathcal{A}$ είναι

$$\nu(A) = \nu(A \cap D) + \nu(A \setminus D) = \int_{A \cap D} g \, d\mu + \infty \cdot \mu(A \setminus D) =$$

$$= \int_{A \cap D} g \, d\mu + \int_{A \setminus D} \infty \, d\mu = \int_{A \cap D} f \, d\mu + \int_{A \setminus D} f \, \mu = \int_A f \, d\mu.$$

Μένει να δειχθεί μόνο η μοναδικότητα της f: υποθέτουμε και πάλι ότι υπάρχει μια άλλη συνάρτηση $f_0 : X \to [0, \infty]$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f_0 \, d\mu \tag{10.24}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Από τη μοναδικότητα στο Βήμα 1 έπεται ότι $f|_F = f_0|_F$ $\mu-$σ.π. και άρα μένει να δείξουμε μόνο ότι $f_0|_{X \setminus F} = \infty$ $\mu-$σ.π.. Αν αυτό δεν αληθεύει το σύνολο

$$\{x \in X \setminus F : f_0(x) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \setminus F : f_0(x) \leq n\}$$

έχει θετικό μ-μέτρο και κατά συνέπεια υπάρχει n ώστε

$$\mu(\{x \in X \setminus F : f_0(x) \leq n\}) > 0.$$

Αφού το μ είναι σ-πεπερασμένο τώρα, βρίσκουμε $A \subseteq \{x \in X \setminus F : f_0(x) \leq n\}$ με $0 < \mu(A) < \infty$. Τότε, αφού $A \subseteq X \setminus D$ και $\mu(A) > 0$ έπεται ότι $\nu(A) = \infty$ ενώ

$$\int_A f_0 \, d\mu \leq \int_A n \, d\mu = n \cdot \mu(A) < \infty :$$

άτοπο από την (10.24). Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

[1] όπου ως συνήθως κάνουμε τη σύμβαση $\infty \cdot 0 = 0$.

Ορισμός 10.3.4. Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο και $\nu \ll \mu$. Η μοναδική $\mu-$σ.π. μετρήσιμη συνάρτηση f που προδιορίζεται από το Θεώρημα Radon-Nikodym λέγεται *Radon-Nikodym παράγωγος* του ν ως προς μ και συμβολίζεται με $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Έτσι, η σχέση (10.20) λαμβάνει τη μορφή

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

και η Πρόταση 6.2.13 (iii) γράφεται ως

$$\int g\, d\nu = \int g\frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

για κάθε $g : X \to [0,\infty]$ μετρήσιμη. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g : X \to \mathbb{C}$ – επαληθεύστε το.

Παράδειγμα 10.3.5. Το συμπέρασμα του Θεωρήματος Radon-Nikodym δεν ισχύει κατ΄ ανάγκη στην περίπτωση που το μ δεν είναι σ-πεπερασμένο.

Απόδειξη. Θέτουμε $(X,\mathcal{A}) = \big([0,1],\mathcal{B}([0,1])\big)$, $\nu = \lambda$, το μέτρο Lebesgue στον $(X,\mathcal{A})$ και μ το αριθμητικό μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$. Τότε είναι $\nu \ll \mu$, αλλά αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : X \to [0,\infty]$ μετρήσιμη ώστε

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A},$$

τότε για $x \in X$

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} f\, d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x),$$

δηλαδή $f \equiv 0$ και άρα $\nu \equiv 0$ το οποίο είναι φυσικά άτοπο. □

10.4 Το Θεώρημα Ανάλυσης Lebesgue

Σύμφωνα με το Θεώρημα Lebesgue-Radon-Nikodym, αν μ και ν δύο πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(X,\mathcal{A})$, τότε υπάρχει μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [0,\infty)$ και ένα σύνολο $D \in \mathcal{A}$ με $\mu(D) = 0$ ώστε

$$\nu(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}$$

όπου

$$\nu_1(A) = \nu(A \cap D) \;\text{ και }\; \nu_2(A) = \int_A f\, d\mu. \tag{10.25}$$

Οι συναρτήσεις ν_1 και ν_2 είναι επίσης μέτρα στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ για τα οποία μάλιστα παρατηρούμε ότι το ν_1 είναι συγκεντρωμένο στο D, ενώ το μ είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus D$ και το ν_2 είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ. Με άλλα λόγια $\nu_1 \perp \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$. Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται στο εξής:

Θεώρημα 10.4.1 (Ανάλυσης Lebesgue). *Έστω $(X,\mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στον $(X,\mathcal{A})$ ώστε το μ να είναι σ-πεπερασμένο. Τότε υπάρχουν μοναδικά μέτρα μ_1 και μ_2 στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ ώστε*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2, \quad \textit{με} \;\; \mu_1 \perp \nu \;\; \textit{και} \;\; \mu_2 \ll \nu. \tag{10.26}$$

(Παρατηρήστε ότι ισχύει και $\mu_1 \perp \mu_2$ από το (iii) της Πρότασης 10.1.4.)

Απόδειξη. Αναζητούμε σύνολο $F \in \mathcal{A}$, ώστε $\mu_1(A) = \mu(A\cap F)$ και $\mu_2(A) = \mu(A\setminus F)$. Τότε, προφανώς $\mu = \mu_1 + \mu_2$ και το μ_1 είναι συγκεντρωμένο στο F. Άρα, για να ισχύει $\mu_1 \perp \nu$ πρέπει $\nu(F) = 0$. Επιπλέον, για να είναι $\mu_2 \ll \nu$, πρέπει για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\nu(E) = 0$ να είναι και $\mu(E \setminus F) = 0$, δηλαδή το F πρέπει να είναι κατά κάποιο τρόπο ένα μεγιστικό σύνολο (ως προς το μ) για το οποίο $\nu(F) = 0$. Οδηγούμαστε λοιπόν στη χρήση του Λήμματος 10.3.1 για την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} : \nu(A) = 0\}. \tag{10.27}$$

Βρίσκουμε έτσι μια αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε αν $F = \bigcup \mathcal{F}$ να είναι

$$\mu(E \setminus F) = 0, \;\; \text{για κάθε } E \in \mathcal{E}.$$

Όμως, η $\mathcal{E}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις και άρα $F \in \mathcal{E}$. Συμπερασματικά έχουμε ότι

$$\nu(F) = 0 \;\; \text{και} \;\; \mu(E \setminus F) = 0, \; \text{για κάθε } E \in \mathcal{A} \text{ με } \nu(E) = 0. \tag{10.28}$$

Θέτουμε λοιπόν, $\mu_1(A) = \mu(A \cap F)$ και $\mu_2(A) = \mu(A \setminus F)$ τα οποία φυσικά ορίζουν μέτρα στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ και επιπλέον $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Επίσης, προκύπτει από τη συζήτηση πριν τη σχέση (10.27) ότι $\mu_1 \perp \nu$ και $\mu_2 \ll \nu$ – εξακριβώστε το.

Για τη μοναδικότητα τώρα, θεωρούμε δύο ακόμη μέτρα μ_1' και μ_2' στο χώρο $(X,\mathcal{A})$ ώστε $\mu = \mu_1' + \mu_2'$ με $\mu_1' \perp \nu$ και $\mu_2' \ll \nu$. Αφού $\mu_1' \perp \nu$ υπάρχει $F' \in \mathcal{A}$ ώστε το μ_1' να είναι συγκεντρωμένο στο F' και το ν να είναι συγκεντρωμένο στο $X \setminus F'$. Αν τώρα $E \in \mathcal{A}$ με $\nu(E) = 0$, τότε

$$\mu(E \setminus F') = \mu_1'(E \setminus F') + \mu_2'(E \setminus F') \le \mu_1'(X \setminus F') + \mu_2'(E) = 0,$$

αφού $\mu_1' \perp \nu$ και $\mu_2' \ll \nu$. Συνεπώς, από την Παρατήρηση 10.3.2 έπεται ότι $\mu(F \triangle F') = 0$ (γιατί;). Συνεπώς, για ένα $A \in \mathcal{A}$ είναι:

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap F) = \mu(A \cap F') = \mu_1'(A \cap F') + \mu_2'(A \cap F') = \mu_1'(A)$$

αφού το μ_1' είναι συγκεντρωμένο στο F' και $\mu_2'(F') = 0$, αφού $\mu_2' \ll \nu$. Άρα $\mu_1 = \mu_1'$. Ανάλογα, για $A \in \mathcal{A}$ είναι και

$$\mu_2(A) = \mu(A \setminus F) = \mu(A \setminus F') = \mu_1'(A \setminus F') + \mu_2'(A \setminus F') = \mu_2'(A)$$

(εξηγήστε γιατί). Άρα είναι και $\mu_2 = \mu_2'$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

10.5 Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο κάνοντας μια απλή αναφορά στο Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz. Θυμίζουμε έναν ορισμό από τη Συναρτησιακή Ανάλυση που μας είναι απαραίτητος:

Ορισμός 10.5.1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο *δυϊκός χώρος* του $(X, \|\cdot\|)$ είναι ο χώρος με νόρμα $(X^*, \|\cdot\|)$, όπου

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές}\} \tag{10.29}$$

και

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}. \tag{10.30}$$

Είναι ιδιαίτερα σύνηθες πρόβλημα στη Συναρτησιακή Ανάλυση, για ένα δοσμένο χώρο $(X, \|\cdot\|)$ να θέλουμε να καταλάβουμε πως «μοιάζει» ο δυϊκός του $(X^*, \|\cdot\|)$, δηλαδή να βρούμε έναν τρόπο να περιγράψουμε όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή $f : X \to \mathbb{R}$. Δύο αποτελέσματα τέτοιας φύσης είναι τα εξής:

1. (Θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert) Αν $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας (πραγματικός) χώρος Hilbert και $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει $v \in \mathcal{H}$ ώστε
$$f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}. \tag{10.31}$$
Με άλλα λόγια ο $\mathcal{H}^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}$.

2. Έστω $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ για $1 < p < \infty$ ο χώρος ακολουθιών με
$$\ell_p = \left\{(a_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\} \tag{10.32}$$
με νόρμα την
$$\|(a_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10.33}$$
Αν $f : \ell_p \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει ακολουθία $(b_n)_n \in \ell_q$ ώστε
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{10.34}$$
για κάθε $x = (a_n)_n \in \ell_p$, όπου q ο *συζυγής εκθέτης* του p, δηλαδή
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{10.35}$$
Με άλλα λόγια ο ℓ_p^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_q.

Για περισσότερα παραδείγματα δυϊκών χώρων παραπέμπουμε στις Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz χαρακτηρίζει τα θετικά φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου Banach $\big(C(K), \|\cdot\|_\infty\big)$ όπου K ένας συμπαγής μετρικός χώρος[2]. Δηλαδή εκείνα τα συναρτησοειδή $\Phi \in C(K)^*$ με την ιδιότητα: αν $f \geq 0$, τότε και $\Phi(f) \geq 0$. Ισχύει το εξής λοιπόν:

[2] Υπάρχει και μια αρκετά γενικότερη εκδοχή του θεωρήματος που αναφέρεται σε τοπικά συμπαγείς Hausdorff τοπολογικούς χώρους και χαρακτηρίζει τα θετικά γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου $C_c(X)$.

Θεώρημα 10.5.2 (Αναπαράστασης του Riesz). *Έστω (K,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Αν $\Phi : C(K) \to \mathbb{R}$ ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει ένα μοναδικό κανονικό μέτρο Borel μ στο K ώστε*

$$\Phi(f) = \int_K f \, d\mu, \quad \text{για κάθε } f \in C(K). \tag{10.36}$$

Για μια απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 12 του βιβλίου Θεωρία Μέτρου, Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης.

Μια γενικότερη εκδοχή του Θεωρήματος Αναπαράστασης του Riesz χαρακτηρίζει όλα τα μιγαδικά (όχι μόνο τα θετικά) γραμμικά συναρτησοειδή του χώρου $C(K)$. Για τη διατύπωση αυτού του αποτελέσματος χρειαζόμαστε την έννοια του μιγαδικού μέτρου με την οποία δεν έχουμε ασχοληθεί σε αυτές τις σημειώσεις. Για μια απόδειξη του θεωρήματος με μια «μιγαδική εκδοχή» του Θεωρήματος Radon-Nikodym παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 6 του βιβλίου Real and Complex Analysis, W. Rudin.

Ένα ακόμη αποτέλεσμα τέτοιου τύπου θα δώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο: για «καλά» μέτρα μ, θα δούμε ότι για $1 < p < \infty$ ο δυϊκός χώρος του χώρου συναρτήσεων $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$ όπου q ο συζυγής εκθέτης του p.

10.6 Ασκήσεις

Κεφάλαιο 11

Χώροι L^p

Σε αυτό το τελευταίο κεφάλαιο κατασκευάζουμε τους χώρους συναρτήσεων L^p. Ο στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα συνεχές ανάλογο των χώρων $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ τους οποίους αναφέραμε στην §10.5. Έτσι, αφού το ολοκλήρωμα είναι εν γένει ένα συνεχές ανάλογο του αθροίσματος, βρισκόμαστε σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ασχολούμαστε με εκείνες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty. \tag{11.1}$$

Αν $1 \leq p < \infty$, μιμούμενοι τον ορισμό της $\|\cdot\|_p$ στον ℓ_p, είναι φυσιολογικό να θέσουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \tag{11.2}$$

για εκείνες τις f που ικανοποιούν την (11.1). Παρατηρούμε ότι ενώ, όπως θα δούμε παρακάτω, με αυτό τον ορισμό η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα δεν είναι σωστό ότι $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$, παρά μόνο ότι $f = 0$ $\mu-$σ.π. (γιατί;). Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα θα κατασκευάσουμε τους χώρους L^p «αγνοώντας» την $\mu-$σ.π. ισότητα.

Περιγράφουμε αναλυτικά αυτή την κατασκευή και στη συνέχεια μελετάμε διάφορες βασικές ιδιότητες αυτών των χώρων· μια εξ αυτών: αποδεικνύουμε ότι είναι χώροι Banach. Στη συνέχεια, ασχολούμαστε ιδιαίτερα με τους χώρους L^1 και L^2 που έχουν κάποιο ανεξάρτητο ενδιαφέρον και τέλος δίνουμε, σαν εφαρμογή αυτης της θεωρίας, μια κομψότατη απόδειξη μιας (λίγο πιο ασθενούς εκδοχής) του Θεωρήματος Radon-Nikodym.

11.1 Κατασκευή των χώρων L^p

Ορισμός 11.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Η κλάση $\mathcal{L}^p(\mu)$ αποτελείται από όλες εκείνες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $\mathcal{L}^p(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος: Πράγματι, έστω $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Τότε για $x \in X$ έχουμε

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)+|g(x)|)^p \leq \left(2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}\right)^p =$$

$$= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

και άρα

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) < \infty,$$

δηλαδή $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Προκειμένου να αποφύγουμε τη δυσκολία για την οποία μιλήσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο χώρο $\mathcal{L}^p(\mu)$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ μ−σ.π. στο X – επαληθεύστε ότι είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 11.1.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}^p(\mu)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L^p(\mu)$. Επιπλέον, ο $L^p(\mu)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις πράξεις:

$$[f]+[g] = [f+g] \quad \text{και} \quad a \cdot [f] = [a \cdot f], \tag{11.3}$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ και $[f] \in L^p(\mu)$ η κλάση μιας συνάρτησης $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Στα παρακάτω, για να απλουστεύσουμε το συμβολισμό, αντί να γράφουμε $[f] \in L^p(\mu)$ θα γράφουμε απλά $f \in L^p(\mu)$. Έτσι, για μια $f \in L^p(\mu)$ θέτουμε

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}. \tag{11.4}$$

Πρόταση 11.1.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν μ−σ.π. έγινε ακριβώς για να είναι σωστή η συνεπαγωγή $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$. Πράγματι, αν $\int |f|^p \, d\mu = 0$ τότε $f = 0$ μ−σ.π. στο X και άρα $[f] = [0] \in L^p(\mu)$. Επιπλέον, είναι άμεσο ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $a \in \mathbb{C}$, τότε

$$\|af\|_p = |a| \|f\|_p \tag{11.5}$$

και άρα μένει να δειχθεί μόνο η τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Minkowski, της οποίας δίνουμε την απόδειξη εδώ χρησιμοποιώντας κάποιες κλασικές ανισότητες. □

Λήμμα 11.1.4 (Ανισότητα Young)**.** *Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{11.6}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \dots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{m} t_j \ln a_j \leq \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m),$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leq t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{11.7}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (11.7) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Ορισμός 11.1.5 (συζυγείς εκθέτες)**.** Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 11.1.6 (Ανισότητα Hölder)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^q(\mu)$, όπου p, q συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L^1(\mu)$ και*

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}, \tag{11.8}$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{11.9}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \, d\mu = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int |g|^q \, d\mu = 1.$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία παίρνουμε

$$\int |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int |f|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int |g|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ μ−σ.π. και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int |f_1|^p \, d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p \, d\mu = 1 \ \text{ και } \int |g_1|^q \, d\mu = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int |g|^q \, d\mu = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int |f_1 g_1| \, d\mu \leq 1, \ \text{ δηλαδή, } \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Πρόταση 11.1.7 (Ανισότητα Minkowski). *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ενας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Αν $f, g \in L^p(\mu)$, τότε*

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{11.10}$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{11.11}$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p \, d\mu = \int |f+g|^{p-1} |f+g| \, d\mu \\ &\leq \int |f+g|^{p-1} |f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1} |g| \, d\mu \\ &\leq \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} \|g\|_p, \end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Hölder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int |f+g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q} = \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q} \big(\|f\|_p + \|g\|_p \big).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

11.2 Βασικές ιδιότητες των χώρων L^p

Σύγκλιση στον L^p

Όπως μόλις αποδείξαμε, για $1 \leq p < \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ορίζει μια νόρμα στον $L^p(\mu)$ και κατά συνέπεια ορίζει και μια έννοια σύγκλισης ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων που βρίσκονται σε αυτό το χώρο. Σε αυτή την ενότητα θα συγκρίνουμε αυτή τη σύγκλιση με τις υπόλοιπες συγκλίσεις που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 7. Δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 11.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f στον $L^p(\mu)$ όταν

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \tag{11.12}$$

καθώς $n \to \infty$.

Είναι εμφανές ότι η σύγκλιση στον $L^1(\mu)$ δεν είναι άλλη από τη σύγκλιση κατά μέσο της §7.2.

Θεώρημα 11.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Αν $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Chebyshev-Markov 7.5.5: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\}) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \to 0,$$

αφού $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$. Έτσι, πράγματι $f_n \to f$ κατά μέτρο. □

Το αντίστροφο του προηγούμενο θεωρήματος δεν ισχύει – αφήνεται ως άσκηση η εύρεση κατάλληλου αντιπαραδείγματος. Ισχύει όμως το εξής μερικό αντίστροφο:

Θεώρημα 11.2.3. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και επιπλέον υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, \infty]$ με $g \in L^p(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε είναι και $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f_n \nrightarrow f$ στον $L^p(\mu)$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$\int |f_{n_k} - f|^p \, d\mu \geq \varepsilon_0 \tag{11.13}$$

για κάθε k. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο όμως είναι και $f_{n_k} \to f$ κατά μέτρο και άρα, από το Πόρισμα 7.3.7, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_{k_l}}\}$ ώστε $f_{n_{k_l}} \to f$ μ−σ.π.. Από τη συνθήκη για τη g τώρα και το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έπεται ότι

$$\int |f_{n_{k_l}} - f|^p \, d\mu \to 0$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (11.13). □

Είναι σαφές, ότι συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα με τα θεωρήματα της §7.5 μπορούν να βγουν πολλά επιπλέον συμπεράσματα. Ξεχωρίζουμε το εξής:

Πόρισμα 11.2.4. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $f_n : X \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f_n, f \in L^p(\mu)$. Αν $f_n \to f$ στον L^p, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π..*

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Θεώρημα 11.2.2 σε συνδυασμό με το Πόρισμα 7.3.7. □

Πληρότητα των χώρων L^p

Όπως προϊδεάζει και ο τίτλος της ενότητας θα δείξουμε εδώ ότι για $1 \leq p < \infty$, όλοι οι χώροι με νόρμα $L^p(\mu)$ είναι πλήρεις, δηλαδή χώροι Banach. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που μόλις δείξαμε για την σύγκλιση στον $L^p(\mu)$.

Θεώρημα 11.2.5 (Riesz-Fischer)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Ο χώρος με νόρμα $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία που είναι Cauchy στον $L^p(\mu)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια $f \in L^p(\mu)$ ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Κατ΄ αρχάς, χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 11.2.2 έχουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο: Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ και $m, n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = \mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)|^p \geq \varepsilon^p\}) \leq$$
$$\frac{1}{\varepsilon} \int |f_n - f_m|^p \, d\mu = \frac{1}{\varepsilon} \|f_n - f_m\|_p^p \to 0$$

καθώς $n, m \to \infty$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.3.6 υπάρχει μια μετρήσιμη $f : X \to \mathbb{C}$ και μια υπακολουθία $\{f_{n_k}\}$ της $\{f_n\}$ με $f_{n_k} \to f$ μ−σ.π.. Πρέπει να δείξουμε ότι επιπλέον $f \in L^p(\mu)$ και $f_{n_k} \to f$ στον $L^p(\mu)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, για κάθε $m, n \geq n_0$. Από το Λήμμα του Fatou συμπεραίνουμε ότι:

$$\int |f_m - f|^p \, d\mu \leq \liminf_k \int |f_m - f_{n_k}|^p \, d\mu < \varepsilon^p$$

για $m \geq n_0$. Συνεπώς, $f_m - f \in L^p(\mu)$, άρα και $f \in L^p(\mu)$ και επιπλέον, για κάθε $m \geq n_0$ είναι $\|f_m - f\|_p < \varepsilon$. Αφού το αρχικό $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, πράγματι είναι $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$.

□

Προσέγγιση συναρτήσεων στον L^p

Παρουσιάζουμε σε αυτή την ενότητα δύο βασικές ιδιότητες προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους L^p. Ξεκινάμε με το εξής γενικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 11.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1 \leq p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές συναρτήσεις $s : X \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\mu(\{x \in X : s(x) \neq 0\}) < \infty. \tag{11.14}$$

Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L^p(\mu)$.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς αν $s \in \mathcal{S}$ μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου αν $a_j \neq 0$, τότε $\mu(A_j) < \infty$ έχουμε

$$\int |s|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L^p(\mu)$.

Για την πυκνότητα τώρα, υποθέτουμε αρχικά ότι $f \in L^p(\mu)$, $f \geq 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{s_n\}$ με $0 \leq s_n \leq f$ και $s_n \nearrow f$. Τότε όμως είναι $s_n \in L^p(\mu)$ για κάθε n και άρα είναι και $s_n \in \mathcal{S}$ (γιατί;). Επιπλέον, $|f - s_n|^p \leq f^p$ και αφού $f \in L^p(\mu)$, το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης δίνει ότι

$$\int |s_n - f|^p \, d\mu \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|s_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι θετικες συναρτήσεις στον L^p προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Η γενική περίπτωση των μιγαδικών συναρτήσεων έπεται από αυτή (με τις συνήθεις τεχνικές) και αφήνεται ως άσκηση.

□

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε ειδικότερα με μια ιδιότητα προσέγγισης Borel μετρήσιμων συναρτήσεων σε κάποιο μετρικό χώρο (X, d). Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός 11.2.7. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$ μια μιγαδική συνάρτηση. Το κλειστό σύνολο

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{11.15}$$

καλείται *φορέας* της f.

Θεωρούμε τώρα τον υπόχωρο $C_c(X)$ του χώρου $C(X)$ των συνεχών συναρτήσεων στο X που αποτελείται από όλες εκείνες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας είναι συμπαγής, δηλαδή αυτές που μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$. Είναι γεγονός ότι σε «πολλούς» μετρικούς χώρους οι συναρτήσεις στον $L^p(\mu)$ προσεγγίζονται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα (χοντρικά, σε όσους χώρους ισχύει το Θεώρημα Luzin 8.2.1). Εμείς, για λόγους απλότητας, θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα μόνο στους χώρους $\mathbb{R}^k$. Χρειαζόμαστε το εξής θεώρημα από την Τοπολογία:

Θεώρημα 11.2.8 (Tietze για μετρικούς χώρους)**.** *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, $F \subseteq X$ κλειστό και μια συνεχής συνάρτηση $f : F \to \mathbb{C}$. Τότε, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : X \to \mathbb{C}$ που επεκτείνει την f, δηλαδή $g|_F = f$, και επιπλέον έχει $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

Για μια απόδειξη του θεωρήματος στο γενικότερο πλαίσιο των φυσιολογικών τοπολογικών χώρων παραπέμπουμε στο βιβλίο Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη (Κεφάλαιο 13).

Θεώρημα 11.2.9. *Έστω $1 \le p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^k)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα του $\mathbb{R}^k$ είναι πυκνό στον $L^p(\lambda_k)$, όπου λ_k το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11.2.6 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $s \in \mathcal{S}$, δηλαδή με συμπαγή φορέα, προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Έστω $\varepsilon > 0$ και $s \in \mathcal{S}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Luzin, αν $A = \{x \in \mathbb{R}^k : s(x) \neq 0\}$, τότε υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ με $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $s|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής. Επιπλέον, από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, βρίσκουμε σύνολο $U_\varepsilon \supseteq A$ με $\mu(U_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$. Τότε, το $E = F_\varepsilon \cup (\mathbb{R}^k \setminus U_\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο και η $s|_E$ είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, από το Θεώρημα Tietze, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με

$$g|_{F_\varepsilon} = s, \quad g|_{U_\varepsilon} = 0 = s \ \text{ και } \ \|g\|_\infty \le \|s\|_\infty.$$

Συνεπώς $\mu(\{x : s(x) \neq g(x)\}) = \mu(U_\varepsilon \setminus A) + \mu(A \setminus F_\varepsilon) < 2\varepsilon$. Έτσι, είναι

$$\|s - g\|_p^p = \int_{\{x:s(x)\neq g(x)\}} |s-g|^p \, d\mu \le 2^p \|s\|_\infty^p \mu(\{x : s(x) \neq g(x)\})$$

και άρα

$$\|s - g\|_p \le 2\|s\|_\infty 2^{1/p} \varepsilon^{1/p} = C\varepsilon^{1/p},$$

με τη σταθερά C να μην εξαρτάται από το ε. Άρα ο $C(\mathbb{R}^k)$ είναι πύκνος στον $L^p(\lambda_k)$.

Τέλος, μένει να δειχθεί ότι η g που είναι ένα στοιχείο του $C(X)$ μπορεί να προσεγγιστεί «καλά» ως προς την $\|\cdot\|_p$ απο στοιχεία του $C_c(X)$ με την υπόθεση ότι $g \in L^p(\lambda_k)$. Η απόδειξη αυτού του τελευταίου βήματος αφήνεται ως άσκηση. (Υπόδειξη: μπορείτε να κάνετε πάλι κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος Tietze.) $\square$

Ο δυϊκός του L^p

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με το θεώρημα που υποσχεθήκαμε στο τέλος του προηγούμενο κεφαλαίου: θα χαρακτηρίσουμε όλα τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή του $L^p(\mu)$ για $1 < p < \infty$ στην περίπτωση που το μ είναι σ-πεπερασμένο.

Θεώρημα 11.2.10. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $1 < p < \infty$. Αν $\Phi : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει μια $g \in L^q(\mu)$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p, ώστε*

$$\Phi(f) = \int fg \, d\mu \tag{11.16}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Δηλαδή, ο δυϊκός $\left(L^p(\mu)\right)^*$ του $L^p(\mu)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $L^q(\mu)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος παραλείπεται μιας και ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Παραπέμπουμε είτε στις Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ, Α. Γιαννόπουλος (Κεφάλαιο 2) είτε στο βιβλίο Θεωρία Μέτρου, Γ. Κουμουλλης, Σ. Νεγρεπόντης (Κεφάλαιο 11) για την απόδειξη.

11.3 Οι χώροι L^1 και L^2

Κάνουμε εδώ κάποια επιπλέον αναφορά στους χώρους L^1 και L^2 οι οποίοι έχουν κάποια επιπλέον δομή, αλγεβρική και αναλυτική.

§ Η συνέλιξη στον $L^1(\lambda)$.

Όπως ισχύει και γενικά για όλους τους $L^p(\mu)$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, και ο $L^1(\lambda)$ έχει τη δομή γραμμικού χώρου. Παρ΄ όλα αυτά θα θέλαμε να ορίσουμε και κάποιας μορφής «πολλαπλασιασμό» στο χώρο αυτό, ώστε να γίνει, όπως λέμε *άλγεβρα*. Ο συνήθης, κατά σημείο, πολλαπλασιασμός όμως, δεν είναι καλά ορισμένη πράξη στον L^1, αφού υπάρχουν συναρτήσεις $f, g \in L^1(\lambda)$ για τις οποιες $fg \notin L^1(\lambda)$ (να κατασκευάσετε ένα τέτοιο παράδειγμα). Ο «κατάλληλος» πολλαπλασιασμός για τον $L^1(\lambda)$ είναι η *συνέλιξη*.

Έστω $f, g \in L^1(\lambda)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ με

$$\phi(x, y) = f(x - y)g(y), \tag{11.17}$$

η οποία είναι προφανώς μετρήσιμη. Ανήκει επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^{2k})$:

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\phi(x, y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^k} |f(x - y)| \, d\lambda(x) = |g(y)| \|f\|_1$$

από το αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue στις μεταθέσεις. Επομένως:

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^k} |\phi(x, y)| \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^k} |g(y)| \|f\|_1 \, d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Έπεται λοιπόν, από το Θεώρημα Tonelli, ότι $\phi \in L^1(\lambda_{2k})$ και άρα από το Θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int f(x - y)g(y) \, d\lambda(y)$$

ορίζεται $\lambda-$σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται), σαν συνάρτηση του x ορίζει ένα στοιχείο του $L^1(\lambda)$. Δίνουμε τον εξής:

Ορισμός 11.3.1. Έστω $f, g \in L^1(\lambda)$. Τότε, εκείνο το στοιχείο $f * g$ του $L^1(\lambda)$ που ορίζεται $\lambda-$σ.π. από τη σχέση

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y) \, d\lambda(y) \tag{11.18}$$

λέγεται *συνέλιξη* των f και g.

Κατά συνέπεια έχουμε τώρα μια καλά ορισμένη πράξη

$$* : L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \to L^1(\lambda) \ \text{ με } \ (f, g) \mapsto f * g.$$

Αυτός θα είναι ο «πολλαπλασιασμός» που ζητήσαμε. Πολύ εύκολα παρατηρούμε κατ΄ αρχάς ότι η συνέλιξη είναι διγραμμική – επαληθεύστε το. Μερικές βασικές ιδιότητες της συνέλιξης περιγράφονται παρακάτω:

Πρόταση 11.3.2. *Αν $f, g \in L^1(\lambda)$, τότε*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{11.19}$$

Επιπλέον, η συνέλιξη είναι συνεχής.

Απόδειξη. Με τον παραπάνω συμβολισμό για τη συνάρτηση ϕ έχουμε ότι

$$\|f * g\|_1 = \int \left| \int f(x-y)g(y)\ d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \leq$$

$$\leq \int \left(\int |\phi(x,y)|\ d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Για τη συνέχεια τώρα, θα δείξουμε ότι αν $f_n, f, g_n, g \in L^1(\lambda)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$ και $\|g_n - g\|_1 \to 0$, τότε είναι και $\|f_n * g_n - f * g\|_1 \to 0$. Πράγματι

$$\|f_n * g_n - f * g\|_1 = \|f_n * (g_n - g) + (f_n - f) * g\|_1 \leq$$

$$\leq \|f_n * (g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f) * g\|_1 \leq \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1 \to 0,$$

από τις υποθέσεις. □

Πρόταση 11.3.3. *Έστω $f, g, h \in L^1(\lambda)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) Είναι διγραμμική, δηλαδή

$$(f+g) * h = f * h + g * h \quad \textit{και} \quad f * (g+h) = f * g + f * h. \tag{11.20}$$

(ii) Είναι μεταθετική, δηλαδή

$$f * g = g * f. \tag{11.21}$$

(iii) Είναι προσεταιριστική, δηλαδή

$$(f * g) * h = f * (g * h). \tag{11.22}$$

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας της συνέλιξης, για να αποδείξουμε σε πλήρη γενικότητα αυτά τα αποτελέσματα, αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 11.2.9, όπου έχουμε τις συνήθεις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann.

Η διγραμμικότητα είναι άμεση. Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε:

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)\ dy = \int f(z)g(x-z)\ dz = (g * f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$.

Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$\big(f * (g * h)\big)(x) = \int f(x-y)(g * h)(y)\ dy = \int f(x-y) \left(\int g(y-z)h(z)\ dz \right) dy =$$

$$\int \left(\int f(x-y)g(y-z)\ dy \right) h(z)\ dz = \int \left(\int f(x-z-u)g(u)\ du \right) h(z)\ dz =$$

$$= \int (f * g)(x-z)h(z)\ dz = \big((f * g) * h\big)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = y - z$. □

Με βάση την παραπάνω πρόταση και το Θεωρήμα Riesz-Fischer, ο $L^1(\lambda)$είναι μια *μεταθετική άλγεβρα Banach*, δηλαδή μια μεταθετική άλγεβρα με μια νόρμα για την οποία ισχύει η ανισότητα (11.19) και είναι πλήρης ως προς τη μετρική που αυτή επάγει.

§ Ο $L^2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert.

Θυμίζουμε αρχικά το εξής: αν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ένα εσωτερικό γινόμενο σε ένα γραμμικό χώρο X, τότε αυτό επάγει φυσιολογικά μια νόρμα στο X που ορίζεται από τη σχέση

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \text{για } x \in X, \tag{11.23}$$

η οποία με τη σειρά της καθιστά το X μετρικό χώρο. Αν ο X είναι πλήρης ως προς αυτή τη μετρική που επάγει το εσωτερικό γινόμενο, τότε ο X λέγεται *χώρος Hilbert*. Θυμίζουμε επιπλέον ότι σε οποιοδήποτε χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η εξής:

Πρόταση 11.3.4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x, y \in X$ είναι:*

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \|y\|. \tag{11.24}$$

Απόδειξη. Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικό, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \ge 0$$

ή ισοδύναμα

$$\langle y, y \rangle \lambda^2 - 2\langle x, y \rangle \lambda + \langle x, x \rangle \ge 0.$$

Κατά συνέπεια η διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου (ως προς λ) πρέπει να είναι μη θετική, δηλαδη

$$4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \le 0$$

που ισοδυναμεί άμεσα με τη ζητούμενη από τον ορισμό της νόρμας. □

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου τώρα. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \to \mathbb{C} \ \text{ με } \ \langle f, g \rangle = \int f \overline{g} \, d\mu. \tag{11.25}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz συμπεραίνουμε ότι

$$\int |f\overline{g}| \, d\mu \le \left(\int |f|^2 \, d\mu \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 \, d\mu \right)^{1/2} < \infty$$

και κατά συνέπεια η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα ορίζει ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mu)$, δηλαδή:

(i) Είναι διγραμμική, δηλαδή

$$\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \ \text{ και } \ \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \tag{11.26}$$

για κάθε $f, g, h \in L^2(\mu)$.

(ii) Είναι αντισυμμετρική, δηλαδή

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}, \tag{11.27}$$

για κάθε $f, g \in L^2(\mu)$.

(iii) Είναι θετική, δηλαδή

$$\langle f, f\rangle \geq 0, \quad \text{για κάθε } f \in L^2(\mu) \text{ και } \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0. \tag{11.28}$$

Η απόδειξη αυτών των ιδιοτήτων αφήνεται ως άσκηση. Τέλος, παρατηρούμε ότι αν $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mu)$, τότε

$$\|f\| = \left(\int f\overline{f}\, d\mu\right)^{1/2} = \left(\int |f|^2\, d\mu\right)^{1/2} = \|f\|_2,$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$. Κατά συνέπεια ο $L^2(\mu)$ έχει κληρονομήσει τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με το Θεώρημα Riesz-Fischer, συμπεραίνουμε ότι ο $L^2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert.

11.4 Μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Radon-Nikodym

Δίνουμε σε αυτή την ενότητα μια δεύτερη, συντομότερη, απόδειξη του Θεωρήματος Radon-Nikodym. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή ότι ο L^2 είναι χώρος Hilbert. Συγκεκριμένα, θα χρειαστούμε το Θεώρημα Riesz για χώρους Hilbert το οποίο αναφέραμε και στην §10.5. Το υπενθυμίζουμε και εδώ:

Θεώρημα 11.4.1 (Riesz). *Έστω $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει $v \in \mathcal{H}$ ώστε*

$$f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Η απόδειξη είναι αυτούσια με αυτή της πραγματικής περίπτωσης και υπάρχει στις Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Ειδικότερα, στην περίπτωση του χώρου $L^2(\mu)$, όπου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου το αποτέλεσμα είναι το εξής:

Αν $\phi : L^2(\mu) \to \mathbb{C}$ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, τότε υπάρχει μια $g \in L^2(\mu)$ ώστε

$$\phi(f) = \int fg\, d\mu, \tag{11.29}$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$.

Το μειονέκτημα αυτής της απόδειξης που θα παρουσιάσουμε, σε σύγκριση με αυτή που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι ότι απαιτεί και τα δύο μέτρα που εμπλέκονται στη διατύπωση του θεωρήματος να είναι σ-πεπερασμένα. Η απόδειξη οφείλεται στον von Neumann.

Θεώρημα 11.4.2 (Radon-Nikodym). *Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ με $\nu \ll \mu$. Τότε, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $h : X \to [0, \infty]$ ώστε*

$$\nu(A) = \int_A h\, d\mu, \tag{11.30}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση που τα μ και ν είναι πεπερασμένα. Η συνέχεια για την περίπτωση που είναι σ-πεπερασμένα, την οποία παρουσιάσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.3.3, είναι απλή και δεν έχει κάποια νέα ιδέα.

Θεωρούμε το μέτρο $\rho = \mu + \nu$ στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ το οποίο είναι προφανώς πεπερασμένο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : L^2(\rho) \to \mathbb{C}$ με

$$\phi(f) = \int f \, d\nu. \tag{11.31}$$

Είναι άμεσο ότι το ϕ είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^2(\rho)$ και επιπλέον

$$|\phi(f)| \leq \int |f| \, d\nu \leq \int |f| \, d\rho \leq$$

$$\leq \left(\int 1 \, d\rho \right)^{1/2} \left(\int |f|^2 \, d\rho \right)^{1/2} = \sqrt{\rho(X)} \|f\|_2,$$

δηλαδή είναι και φραγμένο. Από το Θεώρημα Riesz λοιπόν, υπάρχει $g \in L^2(\rho)$ με την ιδιότητα

$$\phi(f) = \int fg \, d\rho,$$

δηλαδή,

$$\int f \, d\nu = \int fg \, d\rho, \tag{11.32}$$

για κάθε $f \in L^2(\rho)$. Από αυτή την g θα κατασκευάσουμε την h του θεωρήματος.

Ισχυρισμός. Ισχύει $0 \leq g \leq 1$ ρ−σ.π. στο X.

Θέτουμε αρχικά $A_n = \{x \in X : g(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\}$ και έχουμε, θέτοντας $f = \chi_{A_n}$ στην (11.32), ότι:

$$\rho(A_n) \geq \nu(A_n) = \int_{A_n} g \, d\rho \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rho(A_n),$$

δηλαδή $\rho(A_n) = 0$. Άρα και $\rho(\{x \in X : g(x) > 1\}) = 0$. Όμοια, θέτουμε $B_n = \{x \in X : g(x) \leq -\frac{1}{n}\}$ και τότε, για $f = \chi_{B_n}$, παίρνουμε:

$$0 \leq \nu(B_n) = \int_{B_n} g \, d\rho \leq -\frac{1}{n} \rho(B_n),$$

δηλαδή $\rho(B_n) = 0$. Έτσι, έπεται και ο ισχυρισμός.

Από τη σχέση $\rho = \mu + \nu$ τώρα, συμπεραίνουμε ότι

$$\int f \, d\rho = \int f \, d\mu + \int f \, d\nu$$

για κάθε $f : X \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη και κατά συνέπεια η (11.32) λαμβάνει τη μορφή:

$$\int f(1-g) \, d\nu = \int fg \, d\mu \tag{11.33}$$

για κάθε $f \in L^2(\rho)$. Αν $C = \{x \in X : g(x) = 1\}$, τότε εφαρμόζοντας την τελευταία για $f = \chi_C$, παίρνουμε ότι

$$0 = \int_C (1-g) \, d\nu = \int_C g \, d\mu$$

και κατά συνέπεια $\mu(C) = 0$. Αφού $\nu \ll \mu$, έχουμε ότι $\nu(C) = 0$ και άρα και $\rho(C) = 0$. Κατά συνέπεια, μπορούμε δίχως βλάβη να υποθέσουμε ότι $0 \leq g < 1$ παντού στο X.

Έστω $A \in \mathcal{A}$. Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f_n = (1 + g + ... + g^n)\chi_A \tag{11.34}$$

η οποία ανήκει στον $L^2(\rho)$, αφού $0 \leq g < 1$ και το ρ είναι πεπερασμένο, και άρα η (11.33) για $f = f_n$ δίνει:

$$\int_A (1 - g^{n+1}) \, d\nu = \int_A g \cdot \frac{1 - g^{n+1}}{1 - g} \, d\mu.$$

Οι υπο ολοκλήρωση ακολουθίες είναι όμως αύξουσες και $g^n \to 0$ κατά σημείο στο X. Έτσι, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δίνει ότι:

$$\nu(A) = \int_A 1 \, d\nu = \int_A \frac{g}{1 - g} \, d\mu.$$

Το A ήταν τυχόν, οπότε θέτοντας $h = \frac{g}{1-g}$ έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

11.5 Ασκήσεις

Παραρτήματα

Παράρτημα Α′

Ολοκλήρωμα Riemann

Α′.1 Ορισμός

Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. **Διαμέριση** του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a, b]$ με $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.

Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

Η διαμέριση P_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$, η **κοινή εκλέπτυνση** των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$.

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα Α′.1.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Τότε,*
$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε
> $$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \implies \inf B \leq \inf A$). Επομένως,

$$L(f, P_1) - L(f, P) = m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k) \geq 0.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι

$$U(f, P_1) \leq U(f, P).$$

Για την απόδειξη του Λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.

Αφού η P προκύπτει από την P_2 με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων, όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leq U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

Ορισμός Α′.1.2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\Big\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\Big\}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\Big\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\Big\}.$$

Από το Λήμμα Α′.1.1 έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

Α′.2 Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα Α′.2.1 (κριτήριο Riemann). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P=P_1\cup P_2$. Τότε,

$$\begin{aligned} U(f,P)-\frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f,P_2)-\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0\leq U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P_\varepsilon)<L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon.$$

Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα Α′.2.2. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Δηλαδή,

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$U(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + \cdots + f(x_n)),$$

ενώ

$$L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})).$$

Άρα,

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann βλέπουμε εύκολα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα Α′.2.3. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση P_n που αποτελείται από τα σημεία

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Έστω $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y'_k, y''_k \in [x_k, x_{k+1}]$ τ.ω.

$$M_k = f(y'_k) \quad \text{και} \quad m_k = f(y''_k).$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y'_k - y''_k| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y'_k) - f(y''_k) = |f(y'_k) - f(y''_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Α′.3 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Θεώρημα Α′.3.1 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος)**.** *Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα Α′.3.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a, b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Θεώρημα Α′.3.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
είναι η **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

Πόρισμα Α′.3.4. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε,*
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα Α′.3.5. *Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\phi:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ με την ιδιότητα $U(\phi\circ f,P)-L(\phi\circ f,P)<\varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[m,M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A>0$ ώστε $|\phi(\xi)|\leq A$ για κάθε $\xi\in[m,M]$. Επίσης, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1=\varepsilon/(2A+b-a)>0$, υπάρχει $0<\delta<\varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi,\eta\in[m,M]$ με $|\xi-\eta|<\delta$ ισχύει $|\phi(\xi)-\phi(\eta)|<\varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμεριση $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=b\}$ ώστε
$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)<\delta^2.$$

Ορίζουμε
$$\begin{aligned} I &= \{0\leq k\leq n-1:\ M_k(f)-m_k(f)<\delta\}\\ J &= \{0\leq k\leq n-1:\ M_k(f)-m_k(f)\geq\delta\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k\in I$, τότε για κάθε $x,x'\in[x_k,x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x)-f(x')|\leq M_k(f)-m_k(f)<\delta$. Παίρνοντας $\xi=f(x)$ και $\eta=f(x')$, έχουμε $\xi,\eta\in[m,M]$ και $|\xi-\eta|<\delta$. Άρα,
$$|(\phi\circ f)(x)-(\phi\circ f)(x')|=|\phi(\xi)-\phi(\eta)|<\varepsilon_1.$$
Αφού τα x,x' ήταν τυχόντα στο $[x_k,x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f)\leq\varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι
$$\sum_{k\in I}(M_k(\phi\circ f)-m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k)\leq\varepsilon\sum_{k\in I}(x_{k+1}-x_k)\leq(b-a)\varepsilon_1.$$

(ii) Για το J έχουμε
$$\delta\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k)\leq\sum_{k\in J}(M_k(f)-m_k(f))(x_{k+1}-x_k)<\delta^2,$$
άρα
$$\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k)<\delta<\varepsilon_1.$$

Επίσης,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| \leq |(\phi \circ f)(x)| + |(\phi \circ f)(x')| \leq 2A$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k\in J}(M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq 2A \sum_{k\in J}(x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k\in I}(M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &\quad + \sum_{k\in J}(M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Α΄.3.5 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από την σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα Α΄.3.6. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*
(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*
(γ) *η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος Α΄.3.5. Για το (γ) γράψτε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

και χρησιμοποιήστε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a, b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geq b$ ως εξής:
(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).
(β) αν $a > b$ και η $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Α′.4 Ο ορισμός του Riemann

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός Α′.4.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f, P, \Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Θεώρημα Α′.4.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1}-x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f).$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f).$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0.$$

Έστω P' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, **η οποία είναι και εκλέπτυνση της** P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f,P) \leq L(f,P') \leq \sum(f,P',\Xi) \\ &\leq U(f,P') \leq U(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f,P',\Xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για **τυχούσα** διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a,b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2 = P_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$

με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \ldots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_2, \Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1} - y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l) \\ &\quad -f(\xi_l'')(y_{l+1} - x_k)| \\ &\leq 3M \max_l |y_{l+1} - y_l| < 3M\delta \\ &= \frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1, \Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k, \Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, έχουμε

$$\left|\sum(f, P_0, \Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_0, \Xi^{(0)})\right| < n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $< \delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_0, \Xi^{(0)})\right| \\ &\quad + \left|\sum(f, P_0, \Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

Παράρτημα Β′

Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Β′.1 Ισοπληθικά σύνολα

Ορισμός Β′.1.1 (Ισοπληθικότητα)**.** Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα. Τα A, B λέγονται *ισοπληθικά* αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί[1]. Τότε, γράφουμε $A =_c B$ ή $|A| = |B|$ ή και $A \sim B$.

Παραδείγματα Β′.1.2. (α) Τα σύνολα $(0, 1)$ και $(0, 2)$ είναι ισοπληθικά, μέσω της αντιστοιχίας $f : (0, 1) \to (0, 2)$ με $f(x) = 2x$. Γενικότερα, κάθε ανοικτό διάστημα (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, είναι ισοπληθικό με το $(0, 1)$ μέσω της αντιστοιχίας $f : (0, 1) \to (a, b)$ με $f(t) = (1 - t)a + tb$.

(β) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των αρτίων $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ μέσω της αντιστοιχίας $\mathbb{N} \rightarrowtail A$ με $n \mapsto 2n$.

(γ) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Πράγματι: θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με

$$f(n) = \begin{cases} k, & \text{αν } n = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 - k, & \text{αν } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f αντιστοιχεί στους περιττούς φυσικούς τους θετικούς ακεραίους και στους άρτιους φυσικούς τους μη θετικούς ακεραίους.

(δ) Τα σύνολα $[0, 1]$ και $[0, 1)$ είναι ισοπληθικά. Πράγματι: θεωρούμε το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[0, 1]$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1)$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{αν } x \in A \text{ και } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι αντιστοιχία.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η ισοπληθικότητα μεταξύ συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας.

[1] Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται αντιστοιχία. Λέμε τότε ότι έχουμε μια αντιστοιχία από το A στο B και γράφουμε $A \rightarrowtail B$.

Πρόταση Β΄.1.3. *Έστω A, B, C μη κενά σύνολα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(α) $A \sim A$,
(β) *αν* $A \sim B$, *τότε* $B \sim A$ *και*
(γ) *αν* $A \sim B$ *και* $B \sim C$, *τότε* $A \sim C$.

Απόδειξη. Άμεση. □

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με T_n το σύνολο των πρώτων n φυσικών, δηλαδή $T_n = \{1, 2, \ldots n\}$.

Ορισμός Β΄.1.4 (πεπερασμένα και άπειρα σύνολα)**.** (α) Έστω A μη κενό σύνολο[2]. Το A λέγεται *πεπερασμένο* αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και συνάρτηση $f : A \to T_n$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, λέμε ότι ο *πληθάριθμος* του A είναι n ή ότι το A έχει n στοιχεία και γράφουμε $\text{card}(A) = n$ ή $\#A = n$ ή και $|A| = n$.

(β) Ένα σύνολο A λέγεται *άπειρο* αν δεν είναι πεπερασμένο.

Πρόταση Β΄.1.5. *Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $B \sim \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι άπειρο. Ειδικότερα, το A είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_1 \in A$. Τότε, το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι μη κενό. Άρα, υπάρχει $a_2 \in A\setminus\{a_1\}$. Ομοίως, $A\setminus\{a_1, a_2\} \neq \emptyset$ και μπορούμε να επιλέξουμε $a_3 \in A\setminus\{a_1, a_2\}$. Επαγωγικά, ορίζεται ακολουθία (a_n) στοιχείων του A. Πράγματι: αν υπήρχε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $A \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \emptyset$ τότε θα είχαμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ και το A θα ήταν πεπερασμένο.

Ορίζουμε τότε $f : \mathbb{N} \to A$ με $f(n) = a_n$. Η f είναι 1-1 διότι τα a_n είναι διαφορετικά ανά δύο. Αν θέσουμε $B = f(\mathbb{N})$ τότε $B \subseteq A$ και η $f : \mathbb{N} \to B$ είναι 1-1 και επί. Δηλαδή, $B \sim \mathbb{N}$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Αν το A είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $g : A \to T_m$ η οποία είναι 1-1 και επί. Τότε, η συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{N} \to T_m$ είναι 1-1, άτοπο (εξηγήστε γιατί). □

Συμβολισμός. Έστω A, B δύο σύνολα. Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$, γράφουμε $A \leq_c B$ ή $A \preceq B$ και λέμε ότι το A έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με αυτόν του B. Ο συμβολισμός και η ορολογία δικαιολογούνται από το γεγονός ότι το A είναι ισοπληθικό με το $f(A)$ το οποίο είναι υποσύνολο του B.

Παραδείγματα Β΄.1.6. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο, διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
(β) Το σύνολο των ρητών είναι άπειρο διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.
(γ) Κάθε μη τετριμμένο διάστημα είναι άπειρο σύνολο.

Σχόλια Β΄.1.7. Κάθε άπειρο σύνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του. Πράγματι, στην πρόταση Β΄.1.6. δείξαμε ότι αν το A είναι άπειρο τότε υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$. Γράφουμε $b_n = f(n)$ για $n = 1, 2, \ldots$ και θέτουμε $B = f(\mathbb{N}) = \{b_1, b_2, \ldots\} \subseteq A$. Θεωρούμε το σύνολο $C = A \setminus \{b_1\}$, το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του A και ορίζουμε μια συνάρτηση $g : A \to C$ ως εξής:

$$g(x) = \begin{cases} b_{n+1}, & \text{αν } x = b_n \text{ για κάποιο } n \\ x, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι 1-1 και επί (άσκηση).

[2] Για το κενό σύνολο δεχόμαστε ότι είναι πεπερασμένο με πληθάριθμο 0.

Β′.2 Αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός Β′.2.1 (αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα)**.** Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Το A θα λέγεται *άπειρο αριθμήσιμο* αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, δηλαδή αν $A \sim \mathbb{N}$. Ένα σύνολο A λέγεται *αριθμήσιμο* αν είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Αν το A δεν είναι αριθμήσιμο, θα λέγεται *υπεραριθμήσιμο.*

Συμβολισμός. Τον πληθάριθμο των φυσικών αριθμών τον συμβολίζουμε με ω ή $\aleph_0$ (άλεφ 0). Έτσι, αν το σύνολο A είναι αριθμήσιμο γράφουμε $|A| = \aleph_0$.

Παραδείγματα Β′.2.2. (α) Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο αριθμήσιμο.

(β) Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m,n) : m,n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο: η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$ είναι 1-1 και επί. Το γεγονός ότι είναι επί έπεται από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής (δείξτε ότι είναι 1-1).

(γ) Αν A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ είναι επίσης άπειρο αριθμήσιμο. Πράγματι, αν τα A, B είναι άπειρα αριθμήσιμα τότε υπάρχουν $f : A \to \mathbb{N}$ και $g : B \to \mathbb{N}$ συναρτήσεις 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ όπου $h(a,b) = (f(a), g(b))$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι f και g είναι 1-1 και επί μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η h είναι 1-1 και επί. Άρα, $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, οπότε από την πρόταση Α′.1.3. έπεται ότι $A \times B \sim \mathbb{N}$.

Η επόμενη πρόταση δίνει χρήσιμους χαρακτηρισμούς για τα αριθμήσιμα σύνολα.

Πρόταση Β′.2.3. *Έστω A άπειρο σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το A είναι αριθμήσιμο.*
(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί.*
(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1.*

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα Β′.2.4. *Έστω A άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το A είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το A είναι άπειρο, επομένως είναι μη κενό. Από την αρχή της καλής διάταξης (αρχή του ελαχίστου) υπάρχει το $a_1 = \min A$. Το σύνολο $A \setminus \{a_1\}$ είναι επίσης μη κενό (αλλιώς το A θα ήταν πεπερασμένο) οπότε, πάλι από την αρχή της καλής διάταξης, υπάρχει το $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ′ άπειρον, γιατί αν σταματούσε σε κάποιο βήμα n_0 θα είχαμε $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n_0}\} = \emptyset$, δηλαδή το A θα ήταν πεπερασμένο. Έτσι, ορίζεται επαγωγικά μια ακολουθία (a_n) διαφορετικών ανά δύο στοιχείων του A. Παρατηρήστε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, άρα $a_n \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

Είναι προφανές ότι $\{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\} \subseteq A$. Αν υποθέσουμε ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, τότε υπάρχει $a \in A$ ώστε $a \neq a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς, είναι $a > a_1$ και επίσης υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > a$ (διότι $a_n \geq n$). Άρα, υπάρχει μέγιστος n με την ιδιότητα $a > a_n$. Τότε, $a_n < a < a_{n+1}$. Αυτό είναι άτοπο, διότι έχουμε $a \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ και $a < \min A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Από τον ισχυρισμό έπεται άμεσα ότι το A είναι αριθμήσιμο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την πρόταση Β′.2.3.

Απόδειξη της πρότασης Β′.2.3. Η συνεπαγωγή (α) $\Rightarrow$ (β) είναι άμεση από τον ορισμό του αριθμήσιμου συνόλου.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (β), δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$, η οποία είναι επί. Τότε, για κάθε $a \in A$ ισχύει $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Θέτουμε $n_a = \min f^{-1}(\{a\})$, $a \in A$ (το min υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης). Η συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$, με $g(a) = n_a$ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Πράγματι: παρατηρούμε ότι αν $a, b \in A$ με $a \neq b$, τότε $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ και άρα $n_a \neq n_b$.

Έστω ότι ισχύει το (γ) δηλαδή, υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : A \to \mathbb{N}$. Τότε, το $B = g(A)$ είναι άπειρο υποσύνολο των φυσικών. Από το λήμμα είναι αριθμήσιμο, δηλαδή υπάρχει $h : B \to \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1 και επί. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{N}$ με $\phi(a) = h(g(a))$. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι 1-1 και επί, άρα το A είναι αριθμήσιμο. □

Παραδείγματα Β′.2.5. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αφού το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Αφού $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ με $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ και $\gcd(m, n) = 1$.

Το επόμενο θεώρημα οφείλεται στον Cantor και δείχνει ότι αριθμήσιμες το πλήθος πράξεις μεταξύ αριθμήσιμων συνόλων παράγουν αριθμήσιμα σύνολα. Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται για την απόδειξη είναι γνωστό ως *πρώτο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*.

Θεώρημα Β′.2.6 (Cantor, 1899)**.** *Έστω $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια αριθμήσιμων υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν το I είναι αριθμήσιμο, τότε και το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το I είναι αριθμήσιμο, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι είναι το $\mathbb{N}$. Έτσι, έχουμε την οικογένεια $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Επίσης, κάθε A_i είναι αριθμήσιμο, επομένως μπορούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία του ως

$$A_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i, \ldots\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

(αν κάποιο από τα A_i είναι πεπερασμένο, «επαναλαμβάνουμε» κάποιο στοιχείο του άπειρες φορές). Αριθμώντας με αυτόν τον τρόπο τα στοιχεία του εκάστοτε συνόλου παίρνουμε έναν άπειρο πίνακα, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & : & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \ldots & a_k^1 & \ldots \\
A_2 & : & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_k^2 & \ldots \\
A_3 & : & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_k^3 & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
A_n & : & a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_k^n & \ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Τότε, είναι προφανές ότι ο πίνακας αυτός περιέχει όλα τα στοιχεία του $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (ενδεχομένως με επαναλήψεις). Απαριθμούμε τα στοιχεία αυτού του πίνακα κατά μήκος των διαγωνίων με κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά, ως εξής:

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \ldots$$

Από την παραπάνω διαδικασία αρίθμησης προκύπτει απεικόνιση $\pi : \mathbb{N} \to A$ επί (ορίστε την π). Το συμπέρασμα έπεται από το (β) της πρότασης Α΄.2.3. $\square$

Η επόμενη πρόταση αποδεικνύει ότι υπάρχουν σύνολα τα οποία δεν είναι αριθμήσιμα. Αυτό μάλιστα ισχύει για τα μη τετριμμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση Β΄.2.7. *Το σύνολο* $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Το σύνολο $[0,1]$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Διαιρούμε το $[0,1]$ σε τρία διαδοχικά ισομήκη διαστήματα ως εξής: $[0,1] = [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$. Τότε, τουλάχιστον ένα από αυτά τα τρία διαστήματα δεν περιέχει το x_1. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_1 και το διαιρούμε σε τρία ισομήκη διαδοχικά κλειστά διαστήματα μήκους $1/9$. Τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περιέχει το x_2. Ονομάζουμε αυτό το διάστημα I_2. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, οπότε παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ με $x_n \notin I_n$ και $b_n - a_n = 3^{-n} \to 0$. Από την αρχή κιβωτισμού ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$. Αφού $x \in [0,1]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x = x_{n_0}$. Άτοπο, διότι $x \in I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ενώ $x_{n_0} \notin I_{n_0}$. $\square$

Σημείωση: Παρατηρήστε ότι η πληρότητα των πραγματικών αριθμών παίζει ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη: χρησιμοποιήσαμε την αρχή του κιβωτισμού. Σε αντιδιαστολή, το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα Β΄.2.8. *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *και το σύνολο των αρρήτων* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *είναι υπεραριθμήσιμα.*

Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών είναι υπεραριθμήσιμο.

Θεώρημα Β΄.2.9 (Cantor). *Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών*

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x(n)) : x(n) \in \{0,1\},\ n = 1, 2, \dots\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη. Το επιχείρημα της απόδειξης είναι γνωστό ως *δεύτερο διαγώνιο επιχείρημα του Cantor*. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι άπειρο. Έστω ότι είναι αριθμήσιμο. Τότε, υπάρχει μια αρίθμηση των στοιχείων του: $2^{\mathbb{N}} = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$, όπου κάθε x_n είναι δυαδική ακολουθία. Μπορούμε τότε να παραστήσουμε τα στοιχεία x_n και τις συντεταγμένες τους σε μορφή άπειρου πίνακα:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (x_1(1), x_1(2), x_1(3), \dots, x_1(k), \dots) \\
x_2 &= (x_2(1), x_2(2), x_2(3), \dots, x_2(k), \dots) \\
x_3 &= (x_3(1), x_3(2), x_3(3), \dots, x_3(k), \dots) \\
&\ \vdots \\
x_n &= (x_n(1), x_n(2), x_n(3), \dots, x_n(k), \dots) \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Κοιτάμε το πρώτο στοιχείο στην πρώτη συντεταγμένη, το δεύτερο στοιχείο στη δεύτερη συντεταγμένη, το τρίτο στοιχείο στην τρίτη συντεταγμένη κ.ο.κ. Δηλαδή, κινούμαστε στην «κύρια διαγώνιο» του πίνακα και βάσει αυτής ορίζουμε το εξής στοιχείο του $2^{\mathbb{N}}$:

$$y = (1 - x_1(1), 1 - x_2(2), \dots, 1 - x_k(k), \dots)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x_n \neq y$ διότι $x_n(n) \neq 1 - x_n(n) = y(n)$. Με άλλα λόγια, το y διαφέρει από το x_1 στην πρώτη θέση, από το x_2 στη δεύτερη θέση κ.ο.κ. Έτσι οδηγούμαστε σε αντίφαση. $\square$