Αντιστρεψιμότητα μεγάλων πινάκων και το πρόβλημα **Kadison–Singer**

Διπλωματική Εργασία

Ελευθέριος Μαρκεσίνης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2010

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα Kadison–Singer

Το πρόβλημα Kadison–Singer (1959, [22]) προέρχεται από τη Θεωρία Τελεστών σε χώρους Hilbert. Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά την αρχική του διατύπωση και μερικές από τις πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις του σε διάφορες περιοχές της Ανάλυσης.

Ορισμός 1.1.1. Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{A}$ μια υποάλγεβρα του χώρου $B(H)$ των φραγμένων γραμμικών τελεστών στον H. Με τον όρο state εννοούμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές $f \in \mathcal{A}^*$ που ικανοποιεί τα εξής: $f(I) = 1 = \|f\|$ και $f(T) \geq 0$ για κάθε θετικό τελεστή $T \in \mathcal{A}$.

Το σύνολο των states είναι w^*–συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{A}^*$. Από το θεώρημα Krein–Milman έπεται ότι ταυτίζεται με την w^*–κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του (αυτά ονομάζονται pure states). Το πρόβλημα Kadison–Singer διατυπώνεται για διακριτές μεγιστικές αβελιανές αυτοσυζυγείς υποάλγεβρες (masas) του $B(H)$:

> **Kadison–Singer (KS):** *Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και έστω $\mathcal{A}$ μια πλήρως ατομική μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υποάλγεβρα του $B(H)$. Είναι σωστό ότι κάθε pure state της $\mathcal{A}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα pure state του $B(H)$;*

Οι Kadison–Singer [22] απέδειξαν ότι το αντίστοιχο συμπέρασμα δεν ισχύει αν $\mathcal{A}$ είναι μια συνεχής μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υποάλγεβρα (masa) του $B(H)$.

Κάθε ατομική masa στον $B(H)$ είναι unitarily ισοδύναμη με τον $\ell_\infty(\mathbb{N})$, άρα και με την C^*-άλγεβρα $\mathcal{D}$ των διαγώνιων τελεστών στον $B(H)$. Έτσι, το πρόβλημα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

> *Είναι σωστό ότι κάθε pure state της $\mathcal{D}$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα pure state του $B(H)$;*

Οι Casazza–Edidin [10] αναφέρουν ότι το πρόβλημα προέκυψε από κάποιους προβληματισμούς στο βιβλίο Quantum Mechanics του Dirac [16]. Είναι γνωστό (βλέπε [17]) ότι ένα pure state της $\mathcal{D}$ έχει μοναδική επέκταση σε state του $B(H)$ αν και μόνο αν έχει μοναδική επέκταση σε pure state του $B(H)$. Επίσης, από το γεγονός ότι η $\mathcal{D}$ είναι αβελιανή, προκύπτει (βλέπε [17]) ότι τα pure states της $\mathcal{D}$ είναι τα μη μηδενικά πολλαπλασιαστικά γραμμικά συναρτησοειδή στην $\mathcal{D}$.

1.1α′ Η εικασία του paving

Μπορεί κανείς να δείξει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα pure states της $\mathcal{D}$ και τα υπερφίλτρα του $\mathbb{N}$. Αυτό φαίνεται ως εξής. Αν $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ και R_σ είναι η ορθογώνια προβολή του $B(H)$ στην κλειστή γραμμική θήκη του $\{e_n : n \in \sigma\}$, τότε κάθε διαγώνια προβολή του $B(H)$ είναι της μορφής R_σ και η γραμμική θήκη αυτών των προβολών είναι πυκνή στην $\mathcal{D}$. Τα pure states της $\mathcal{D}$ είναι πολλαπλασιαστικά συναρτησοειδή, συνεπώς απεικονίζουν κάθε R_σ στο 0 ή στο 1. Ορίζοντας $\mathcal{U}_f$ μέσω της «$\sigma \in \mathcal{U}_f$ *αν και μόνο αν* $f(R_\sigma) = 1$», παίρνουμε την αντιστοιχία.

Ορισμός 1.1.2. Ένας τελεστής $T \in B(H)$ λέγεται συμπιέσιμος αν για κάθε υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο $\mathbb{N}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\sigma \in \mathcal{U}$ ώστε

$$\|R_\sigma(T - D(T))R_\sigma\| < \varepsilon, \tag{1.1.1}$$

όπου $D(T)$ είναι ο διαγώνιος τελεστής που ορίζεται από την $\langle D(T)(e_i), e_j\rangle = \delta_{ij}\langle T(e_i), e_j\rangle$, $j \in \mathbb{N}$.

Το 1979, ο Anderson (βλέπε [1], [2]) απέδειξε ότι κάθε pure state της $\mathcal{D}$ έχει μοναδική επέκταση σε pure state του $B(H)$ αν και μόνο αν κάθε $T \in B(H)$ είναι συμπιέσιμος. Έδωσε επίσης έναν χαρακτηρισμό των συμπιέσιμων τελεστών ο οποίος αποφεύγει τα υπερφίλτρα:

Θεώρημα 1.1.3. *Ενας τελεστής $T \in B(H)$ είναι συμπιέσιμος αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ του $\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $i = 1, \dots, k$,*

$$\|R_{\sigma_i}(T - D(T))R_{\sigma_i}\| < \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

Μια απλή απόδειξη αυτού του θεωρήματος δόθηκε αργότερα από την Tanbay [26]. Δίνουμε μια σύντομη περιγραφή της απόδειξης: Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ του $\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $i = 1, \dots, k$ να ισχύει $\|R_{\sigma_i}(T - D(T))R_{\sigma_i}\| < \varepsilon$. Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Αφού $\sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_k = \mathbb{N}$, υπάρχει $i \leq k$ ώστε $\sigma_i \in \mathcal{U}$ (αν μια πεπερασμένη ένωση συνόλων ανήκει σε κάποιο υπερφίλτρο τότε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα ανήκει σε αυτό). Γι' αυτό το σ_i ικανοποιείται η (1.1.1), άρα ο T είναι συμπιέσιμος.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο καμία πεπερασμένη διαμέριση δεν ικανοποιεί την (1.1.2) και θα δείξουμε ότι κανένα υπερφίλτρο δεν συμπιέζει τον T.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $D(T) = 0$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}$ όλων των $S \subset \mathbb{N}$ για τα οποία υπάρχει διαμέριση $S = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_k$ ώστε, για κάθε $1 \leq i \leq k$, $\|R_{\sigma_1} T R_{\sigma_i}\| < \varepsilon$. Δείχνουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ιδεώδες (εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση: έχουμε $\mathbb{N} \notin \mathcal{F}$). Στη συνέχεια θεωρούμε το δυϊκό φίλτρο της $\mathcal{F}$, δηλαδή το σύνολο των συμπληρωμάτων των συνόλων που ανήκουν στην $\mathcal{F}$, και το επεκτείνουμε σε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$. Κάθε $\sigma \subseteq \mathbb{N}$ για το οποίο $\|R_\sigma T R_\sigma\| < \varepsilon$ ανήκει στην $\mathcal{F}$, συνεπώς το συμπλήρωμά του ανήκει στο $\mathcal{U}$. Δηλαδή, $\sigma \notin \mathcal{U}$. Αυτό σημαίνει ότι $\|R_\sigma T R_\sigma\| \geq \varepsilon$ για κάθε $\sigma \in \mathcal{U}$, άρα το $\mathcal{U}$ δεν συμπιέζει τον T. □

Από αυτήν την ισοδύναμη διατύπωση του προβλήματος Kadison–Singer μπορούμε να περάσουμε σε μια «πεπερασμένη έκδοσή» της που ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη τελεστών που ορίζονται στους πεπερασμένης διάστασης χώρους Hilbert ℓ_2^n.

Ορισμός 1.1.4. Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Ένας τελεστής $T \in B(H)$ λέγεται (r, ε)–συμπιέσιμος αν υπάρχει διαμέριση $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ του $\mathbb{N}$ ώστε $\|R_{\sigma_i}(T - D(T))R_{\sigma_i}\| \leq \varepsilon$ για κάθε $i = 1, \ldots, r$.

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω $\varepsilon_0 \in (0, 1)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, κάθε $T \in B(H)$ είναι συμπιέσιμος.*
- *Υπάρχει $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $T \in B(\ell_2^n)$ είναι (r, ε_0)–συμπιέσιμος.*

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της Tanbay [26]. Δείχνουμε ότι οι παρακάτω τέσσερις προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, κάθε $T \in B(H)$ είναι συμπιέσιμος για κάποιον r.

(ii) Για κάθε $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ και για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και για κάθε $T \in B(H)$ με $\|T\| = 1$ υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε ο T να είναι (r, ε_0)–συμπιέσιμος.

(iii) Για κάθε $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, κάθε $T \in B(H)$ με $\|T\| = 1$ είναι (r, ε_0)–συμπιέσιμος.

(iv) Για κάθε $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $T \in B(\ell_2^n)$ είναι (r, ε_0)–συμπιέσιμος.

Χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό του Θεωρήματος 1.1.3.

(α) Για την ισοδυναμία των (i) και (ii), η κατεύθυνση (i) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής, ενώ για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και για τυχόντα $T \in B(H)$ με $\|T\| = 1$ εφαρμόζουμε s φορές το (ii) για κάποιον $s \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την $\varepsilon^s < \varepsilon_0$.

(β) Για την ισοδυναμία των (ii) και (iii), η κατεύθυνση (iii) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής, ενώ για την αντίστροφη κατεύθυνση δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο: αν για κάθε r υπάρχει

T_r ο οποίος δεν είναι (r,ε_0)–συμπιέσιμος, τότε ο $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_m \oplus \cdots$ δεν είναι (r,ε_0)–συμπιέσιμος για κανέναν $r \in \mathbb{N}$.

(γ) Για την ισοδυναμία των (iii) και (iv), η κατεύθυνση (iii) $\Rightarrow$ (iv) είναι προφανής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, η Tanbay δείχνει ότι (iv) $\Rightarrow$ (ii) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο επιχείρημα. Θεωρούμε έναν τελεστή $T \in B(H)$ με νόρμα $\|T\| = 1$ και $D(T) = 0$. Γράφουμε T_m για τον περιορισμό του T στη γραμμική θήκη των $e_1, \dots, e_m$. Λέμε ότι μια διαμέριση του $\{1,\dots,m\}$ σε $r \leq n$ υποσύνολα $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ είναι *καλή για τον* m αν $\|R_{\sigma_i} T R_{\sigma_i}\| \leq \varepsilon_0$ για κάθε $i = 1,\dots,r$. Από την υπόθεση, για κάθε m μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον μία καλή διαμέριση. Ορίζουμε ένα δέντρο ως εξής: τα στοιχεία του δέντρου στο επίπεδο m είναι οι καλές διαμερίσεις του $\{1,\dots,m\}$ και μια διαμέριση P_m που βρίσκεται στο επίπεδο m προηγείται μιας διαμέρισης $P_{m+1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ που βρίσκεται στο επίπεδο $m+1$ αν κάθε $\sigma_i \restriction m := \sigma_i \cap \{1,\dots,m\}$ ανήκει στην P_m (σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $P_m \leq P_{m+1}$).

Κάθε διαμέριση $P_{m+1} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ που ανήκει στο επίπεδο $m+1$ έχει μοναδικό προηγούμενο: την διαμέριση $P_m = \{\sigma_1 \restriction m, \dots, \sigma_r \restriction m\}$. Έχουμε λοιπόν όντως ορίσει ένα δέντρο με άπειρα στοιχεία, το οποίο επιπλέον έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων κλαδιών: κάθε στοιχείο έχει πεπερασμένους το πλήθος προηγούμενους. Πράγματι, αν P_{m+1} είναι ένα στοιχείο του δέντρου στο επίπεδο $m+1$ και αν P_m είναι μια διαμέριση του $\{1,\dots,m\}$ με $P_m \leq P_{m+1}$, τότε η P_m είναι στοιχείο του δέντρου στο επίπεδο m (αυτό είναι φανερό από το γεγονός ότι αν $\sigma \subset \tau$ τότε $\|R_\sigma T R_\sigma\| \leq \|R_\tau T R_\tau\|$). Από το Λήμμα του König (βλέπε [23]) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο κλαδί $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_m \leq P_{m+1} \leq \cdots$ του δέντρου. Ορίζουμε διαμέριση $P = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ του $\mathbb{N}$ μέσω της σχέσης ισοδυναμίας «$s \sim t$ αν και μόνο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε οι s, t να ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο της P_m» (προφανώς, τότε θα ανήκουν στο ίδιο υποσύνολο της $P_{m'}$ για κάθε $m' > m$). Η P έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε m υπάρχει $s > m$ ώστε $P \restriction m = P_s \restriction m$. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση βλέπουμε ότι ο T είναι (n,ε_0)–συμπιέσιμος. Παρατηρούμε ότι $\|R_{\sigma_i} T R_{\sigma_i}\| = \lim_{m\to\infty} \|R_m R_{\sigma_i} T R_{\sigma_i} R_m\|$ για κάθε $i = 1,\dots,n$, και αφού για κάθε m υπάρχει $s > m$ ώστε $R_m R_{\sigma_i} = R_{\sigma_i \restriction m} = R_{\sigma_i^s \restriction m}$ για κάποιο $\sigma_i^s \in P_s$ και $\|R_{\sigma_i^s \restriction m} T R_{\sigma_i^s \restriction m}\| \leq \varepsilon_0$, συμπεραίνουμε ότι $\|R_{\sigma_i} T R_{\sigma_i}\| \leq \varepsilon_0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$. $\square$

Η περιγραφή που προηγήθηκε δείχνει ότι το πρόβλημα Kadison–Singer ανάγεται τελικά σε ένα πρόβλημα για τελεστές $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με μηδενική διαγώνιο:

> **Εικασία (P):** *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* n *και για κάθε γραμμικό τελεστή* $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ *με μηδενική διαγώνιο* $D(T) = 0$*, υπάρχει διαμέριση* $\{\sigma_j\}_{j=1}^r$ *του* $\{1,\dots,n\}$ *ώστε*
>
> $$\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\| \leq \varepsilon \|T\| \tag{1.1.3}$$
>
> *για κάθε* $j = 1,\dots,r$.

Σε αυτή την εργασία θα περιγράψουμε τη δουλειά των Bourgain και Tzafriri πάνω στην Εικασία (P) (paving conjecture). Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου περιγράφουμε μερικές από τις πολλές ισοδύναμες διατυπώσεις του σε διάφορες περιοχές της Ανάλυσης.

1.1β′ Περιορισμένη αντιστρεψιμότητα

Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε ότι το πρόβλημα Kadison–Singer συνδέεται με το ακόλουθο θεώρημα περιορισμένης αντιστρεψιμότητας των Bourgain–Tzafriri:

Θεώρημα 1.1.6. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $A, c > 0$ ώστε: αν $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι γραμμικός τελεστής με $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq cn/\|T\|^2$ ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $\{a_j\}_{j\in\sigma}$,*

$$\left\| \sum_{j\in\sigma} a_j T(e_j) \right\|_2^2 \geq A \sum_{j\in\sigma} |a_j|^2. \tag{1.1.4}$$

Αποδεικνύεται ότι δύο σχετικές εικασίες – η ισχυρή και η ασθενής εικασία Bourgain–Tzafriri – είναι ισοδύναμες με το πρόβλημα Kadison–Singer.

> **Ισχυρή εικασία (BT):** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $A > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $B > 0$ υπάρχει $r = r(B) \in \mathbb{N}$ ώστε, αν $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leq B$ και $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_k\}_{k=1}^r$ του $\{1, \dots, n\}$ ώστε, για κάθε $k = 1, \dots, r$ και για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $\{a_j\}_{j\in\sigma_k}$,*
>
> $$\left\| \sum_{j\in\sigma_k} a_j T(e_j) \right\|_2^2 \geq A \sum_{j\in\sigma_k} |a_j|^2. \tag{1.1.5}$$

Η ισοδυναμία της ισχυρής εικασίας (BT) με το πρόβλημα Kadison–Singer αποδείχτηκε από τους Casazza–Vershynin [14]. Η ασθενής εικασία (BT) διαφέρει στο ότι η σταθερά A επιτρέπεται να εξαρτάται από το φράγμα B που έχουμε για τη νόρμα του τελεστή T:

> **Ασθενής εικασία (BT):** *Για κάθε $B > 0$ υπάρχουν $A = A(B) > 0$ και $r = r(B) \in \mathbb{N}$ ώστε, αν $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leq B$ και $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, τότε υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_k\}_{k=1}^r$ του $\{1, \dots, n\}$ ώστε, για κάθε $k = 1, \dots, r$ και για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $\{a_j\}_{j\in\sigma_k}$,*
>
> $$\left\| \sum_{j\in\sigma_k} a_j T(e_j) \right\|_2^2 \geq A \sum_{j\in\sigma_k} |a_j|^2. \tag{1.1.6}$$

Μια τρίτη πρόταση, ισχυρότερη από την ασθενή εικασία (BT), είναι επίσης ισοδύναμη με το πρόβλημα Kadison–Singer (βλέπε [10]):

Θεώρημα 1.1.7. *Το πρόβλημα Kadison–Singer είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: υπάρχουν σταθερές $A > 0$ και $r \in \mathbb{N}$ ώστε, αν $P : \ell_2^{2n} \to \ell_2^{2n}$ είναι προβολή με $\|Pe_i\|_2^2 = 1/2$ για κάθε $i = 1, \dots, 2n$, τότε υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_k\}_{k=1}^r$ του $\{1, \dots, 2n\}$ ώστε, για κάθε $k = 1, \dots, r$ και για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $\{a_j\}_{j\in\sigma_k}$,*

$$\left\| \sum_{j\in\sigma_k} a_j P(e_j) \right\|_2^2 \geq A \sum_{j\in\sigma_k} |a_j|^2. \tag{1.1.7}$$

1.1γ′ Riesz βασικές ακολουθίες

Μια οικογένεια διανυσμάτων $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert H λέγεται **Riesz βασική** αν υπάρχουν σταθερές $m, M > 0$ ώστε, για κάθε επιλογή συντελεστών $\{a_i\}_{i\in I}$ ισχύει

$$m \sum_{i\in I} |a_i|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I} a_i x_i \right\|_H^2 \leq M \sum_{i\in I} |a_i|^2. \tag{1.1.8}$$

Αν, επιπλέον, η οικογένεια $\{x_i\}_{i\in I}$ παράγει τον H, τότε λέγεται Riesz βάση του H. Το γεγονός ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι Riesz βάση του H είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i\in I}$ ώστε ο τελεστής $T : H \to H$ με $T(e_i) = x_i$ να είναι αντιστρέψιμος. Ειδικότερα, κάθε Riesz βάση του H είναι άνω και κάτω φραγμένη ακολουθία: υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1 \leq \|x_i\|_H \leq c_2$ για κάθε $i \in I$. Αν $\|x_i\|_H = 1$ για κάθε $i \in I$ τότε η $\{x_i\}_{i\in I}$ λέγεται μοναδιαία.

Αν η (1.1.8) ισχύει με $m = 1 - \varepsilon$ και $M = 1 + \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon \in (0, 1)$ τότε η $\{x_i\}_{i\in I}$ λέγεται ε-Riesz βασική. Οι Casazza-Vershynin έθεσαν το εξής ερώτημα:

> **Εικασία R_ε:** *Για κάθε $\varepsilon > 0$ κάθε μοναδιαία Riesz βασική ακολουθία είναι πεπερασμένη ένωση ε-Riesz βασικών ακολουθιών.*

Οι Casazza-Vershynin απέδειξαν στο [14] ότι αν το πρόβλημα Kadison-Singer έχει καταφατική απάντηση τότε η εικασία R_ε ισχύει. Αργότερα, αποδείχτηκε από τους Casazza-Tremain στο [13] ότι τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα.

1.1δ′ Εικασία του Feichtinger

Μια οικογένεια διανυσμάτων $\{x_i\}_{i\in I}$ σε ένα χώρο Hilbert λέγεται **πλαίσιο** (frame) για τον H αν υπάρχουν σταθερές $m, M > 0$ ώστε, για κάθε $x \in H$,

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle^2 \leq M\|x\|^2. \tag{1.1.9}$$

Αν ισχύει μόνο η δεξιά ανισότητα στην (1.1.9) τότε λέμε ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι ακολουθία Bessel με σταθερά M.

Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ ένα πλαίσιο για τον H. Αν $m = M$ τότε λέμε ότι η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι M-ακριβές πλαίσιο, ενώ αν $m = M = 1$ τότε λέμε ότι έχουμε ένα πλαίσιο Parseval. Αν όλα τα x_i έχουν νόρμα 1, τότε το πλαίσιο λέγεται μοναδιαίο. Από την (1.1.9) είναι φανερό ότι $\|x_i\| \leq M$ για κάθε $i \in I$. Αν, επιπλέον, υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε $\|x_i\| \geq c$ για κάθε $i \in I$, τότε λέμε ότι έχουμε ένα φραγμένο πλαίσιο. Οι συντελεστές $\langle x, x_i\rangle$ είναι οι συντελεστές του $x \in H$ ως προς το πλαίσιο.

Έστω $\{x_i\}_{i\in I}$ μια ακολουθία Bessel στον H. Ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_2(I) \to H$ που ορίζεται μέσω της $T(e_i) = x_i$, $i \in I$, λέγεται **τελεστής σύνθεσης** του πλαισίου $\{x_i\}_{i\in I}$. Ο συζυγής τελεστής T^* λέγεται **τελεστής ανάλυσης** του $\{x_i\}_{i\in I}$ και ικανοποιεί την

$$\|T^*(y)\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle y, x_i\rangle|^2 \tag{1.1.10}$$

για κάθε $y \in H$. Ειδικότερα, η μικρότερη σταθερά M για την οποία ισχύει η (1.1.9) ισούται με $\|T^*\|^2$. Από την (1.1.10) έπεται ότι μια ακολουθία Bessel είναι Riesz βασική αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.

Ο **τελεστής του πλαισίου** είναι ο τελεστής $S = TT^* : H \to H$. Ο S ικανοποιεί την

$$S(y) = TT^*(y) = T\left(\sum_{i\in I}\langle y, x_i\rangle e_i\right) = \sum_{i\in I}\langle y, x_i\rangle T(e_i) = \sum_{i\in I}\langle y, x_i\rangle x_i. \tag{1.1.11}$$

Ειδικότερα,

$$\langle S(y), y\rangle = \sum_{i\in I} |\langle y, x_i\rangle|^2. \tag{1.1.12}$$

Μέσω του S, η (1.1.9) παίρνει τη μορφή $mI \leq S \leq MI$, ενώ το $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο Parseval αν και μόνο αν $S = I$. Μπορούμε τότε να **ανακατασκευάσουμε** το $y \in H$ μέσω του τύπου

$$\begin{aligned} y &= SS^{-1}y = \sum_{i\in I}\langle S^{-1}y, x_i\rangle x_i \\ &= \sum_{i\in I}\langle y, S^{-1}x_i\rangle x_i = \sum_{i\in I}\langle y, x_i\rangle S^{-1}x_i \\ &= \sum_{i\in I}\langle y, S^{-1/2}x_i\rangle S^{-1/2}x_i. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η οικογένεια $\{S^{-1/2}x_i\}_{i\in I}$ είναι πλαίσιο Parseval, ισοδύναμο με το $\{x_i\}_{i\in I}$ με την έννοια ότι υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής που απεικονίζει το ένα στο άλλο.

Η εικασία του Feichtinger προέκυψε από παραδείγματα πλαισίων Gabor που είχαν την ιδιότητα να γράφονται ως πεπερασμένες ενώσεις Riesz βασικών ακολουθιών:

Εικασία του Feichtinger: *Κάθε μοναδιαίο (ή, ισοδύναμα, φραγμένο) πλαίσιο γράφεται ως πεπερασμένη ένωση Riesz βασικών ακολουθιών.*

Αποδεικνύεται ότι η εικασία του Feichtinger είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα Kadison–Singer (βλέπε [11] για τη μία κατεύθυνση – η ισοδυναμία αποδείχτηκε στο [13]). Αποδεικνύεται μάλιστα ότι αρκεί κανείς να αποδείξει την εξής ασθενή μορφή της εικασίας του Feichtinger: κάθε μοναδιαία ακολουθία Bessel γράφεται ως πεπερασμένη ένωση Riesz βασικών ακολουθιών.

Περισσότερες πληροφορίες για τον κύκλο αυτών των προβλημάτων δίνονται στο άρθρο επισκόπησης The Kadison–Singer problem in Mathematics and Engineering των P. G. Casazza, M. Fickus, J. C. Tremain και E. Weber [12]. Υπάρχουν κι άλλες ενδιαφέρουσες αναγωγές του προβλήματος (για παράδειγμα, από τον Weaver στο [28]) καθώς και θετικές απαντήσεις στην εικασία (P) σε ειδικές περιπτώσεις (για παράδειγμα, οι K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal και G. Weiss δίνουν θετική απάντηση στην περίπτωση πινάκων με μη-αρνητικά στοιχεία και στην περίπτωση των τελεστών Laurent - βλέπε [3] και [20], [21]).

1.2 Μια απλούστερη περίπτωση

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ γράφουμε $x=(x_1,\dots,x_n)$, όπου $x_j=\langle x,e_j\rangle$. Συμβολίζουμε με ℓ_p^n τον $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$, όπου

$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^p\right)^{1/p}\quad \text{αν } 1\le p<\infty \text{ και } \|x\|_\infty=\max_{1\le j\le n}|x_j|. \tag{1.2.1}$$

Για κάθε $\emptyset\neq\sigma\subset\{1,\dots,n\}$ συμβολίζουμε με R_σ την ορθογώνια προβολή επί του $\langle e_j:j\in\sigma\rangle$ (τον περιορισμό στις συντεταγμένες του σ).

Θα λέμε ότι ο γραμμικός τελεστής $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ έχει μηδενική διαγώνιο (και θα γράφουμε $D(S)=0$) αν $\langle Se_j,e_j\rangle=0$ για κάθε $j\le n$. Επίσης, θα λέμε ότι ο γραμμικός τελεστής $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ έχει μονάδες στη διαγώνιο (και θα γράφουμε $D(S)=I$) αν $\langle Se_j,e_j\rangle=1$ για κάθε $j\le n$.

Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Εικασία 1.2.1 (paving conjecture). *Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $M=M(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $S:\ell_2^n\to\ell_2^n$ με $D(S)=0$ υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_1,\dots,\sigma_M\}$ του $\{1,\dots,n\}$ με την ιδιότητα: για κάθε $j=1,\dots,M$,*

$$\|R_{\sigma_j}SR_{\sigma_j}\|\le\varepsilon\|S\|. \tag{1.2.2}$$

Παρατήρηση 1.2.2. (α) Η υπόθεση $D(S)=0$ είναι αναγκαία αν θέλουμε να ισχύει το παραπάνω για κάθε $\varepsilon>0$.

(β) Όπως θα φανεί στη συνέχεια, η μεγαλύτερη δυσκολία που παρουσιάζει το πρόβλημα είναι ότι απαιτούμε το πλήθος M των συνόλων της διαμέρισης να εξαρτάται μόνο από το ε (να μην εξαρτάται από το n).

Πριν περάσουμε στη μελέτη της Εικασίας, αξίζει τον κόπο να δούμε το ίδιο πρόβλημα στην (απλούστερη) περίπτωση που στη θέση του ℓ_2^n έχουμε τον ℓ_1^n ή τον ℓ_∞^n.

Θεώρημα 1.2.3 (Schechtman, 81). *Έστω $S : \ell_1^n \to \ell_1^n$ με $D(S) = 0$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \frac{\varepsilon n}{2\|S\|}$ τέτοιο ώστε*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon. \tag{1.2.3}$$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.3 είναι η εξής.

Πόρισμα 1.2.4. *Έστω $T : \ell_1^n \to \ell_1^n$ με $D(T) = I$. Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \frac{\varepsilon n}{2\|T\|}$ τέτοιο ώστε*

$$\|(R_\sigma T R_\sigma)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{1.2.4}$$

Απόδειξη. Γράφουμε τον T στη μορφή $I + S$. Παρατηρήστε ότι $\|S\| \leq \|T\|$ (δείτε, για παράδειγμα, την (1.2.6) παρακάτω). Από το Θεώρημα 1.2.3 υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \frac{\varepsilon n}{2\|S\|} \geq \frac{\varepsilon n}{2\|T\|}$ τέτοιο ώστε $\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon$, δηλαδή

$$\|R_\sigma T R_\sigma - I_\sigma\| \leq \varepsilon \tag{1.2.5}$$

όπου I_σ ο ταυτοτικός τελεστής στον $\langle e_j : j \in \sigma \rangle$. Έπεται η (1.2.4). $\square$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής και αν $a_{ij} = \langle S e_i, e_j \rangle$, τότε

$$\|S : \ell_1^n \to \ell_1^n\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \ \text{ και } \ \|S : \ell_\infty^n \to \ell_\infty^n\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \tag{1.2.6}$$

Από την (1.2.6) γίνεται φανερό ότι για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.3 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον S με τον S' που ορίζεται από την $\langle S' e_i, e_j \rangle = |a_{ij}|$.

Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας $n \times n$ πίνακας που ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $a_{ij} \geq 0$ *και* $a_{ii} = 0$.

(ii) *Για κάθε* $i \leq n$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$.

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \frac{\varepsilon n}{2}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $i \in \sigma$,

$$\sum_{j \in \sigma} a_{ij} \leq \varepsilon. \tag{1.2.7}$$

Θα αποδείξουμε κάτι πολύ ισχυρότερο.

Θεώρημα 1.2.6 (Bourgain, 81). *Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας $n \times n$ πίνακας που ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $a_{ij} \geq 0$ *και* $a_{ii} = 0$.

(ii) *Για κάθε* $i \leq n$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1$.

Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ του $\{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε: για κάθε $l \leq k$ και για κάθε $i \in \sigma_l$,

$$\sum_{j \in \sigma_l} a_{ij} \leq \frac{2}{k}. \tag{1.2.8}$$

Άμεση συνέπεια είναι το γεγονός ότι η Εικασία 1.2.1 «ισχύει για τελεστές στον ℓ_1^n ή τον ℓ_∞^n»:

Θεώρημα 1.2.7. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $S : \ell_1^n \to \ell_1^n$ με $D(S) = 0$ υπάρχει διαμέριση $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ του $\{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε: για κάθε $l \leq k$*

$$\|R_{\sigma_l} S R_{\sigma_l}\| \leq \frac{2}{k} \|S\|. \tag{1.2.9}$$

Παρατήρηση 1.2.8. (α) Το Θεώρημα 1.2.7 μπορεί να διατυπωθεί ώστε να απαντά στην Εικασία 1.2.1 (στην περίπτωση του ℓ_1^n ή του ℓ_∞^n). Για δοσμένο $\varepsilon > 0$ αρκεί να πάρουμε $M(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$.

(β) Το Θεώρημα 1.2.3 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.7: παίρνουμε $k = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ και θεωρούμε τη διαμέριση που μας δίνει το Θεώρημα 1.2.7. Αν σ_l είναι το υποσύνολο στη διαμέριση που έχει το μεγαλύτερο πληθάριθμο, τότε $|\sigma_l| \geq n/k \geq \varepsilon n/(2+\varepsilon)$ και $\|R_{\sigma_l} S R_{\sigma_l}\| \leq \varepsilon \|S\|$.

(γ) Αντίστροφα, από το Θεώρημα 1.2.3 μπορούμε να πάρουμε μια ασθενή μορφή του Θεωρήματος 1.2.7 (το επιχείρημα είναι γενικό, άρα μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση του ℓ_2^n): χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.2.3 βρίσκουμε σ_1 με $|\sigma_1| \geq \varepsilon n/2$ και $\|R_{\sigma_1} S R_{\sigma_1}\| \leq \varepsilon \|S\|$. Θέτουμε $\tau_1 = \{1, \ldots, n\} \setminus \sigma_1$. Τότε, $|\tau_1| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) n$ και $\|R_{\tau_1} S R_{\tau_1}\| \leq \|S\|$. Χρησιμοποιώντας πάλι το Θεώρημα 1.2.3 βρίσκουμε σ_2 με $|\sigma_2| \geq \varepsilon |\tau_1|/2$ και

$$\|R_{\sigma_2} S R_{\sigma_2}\| \leq \varepsilon \|R_{\tau_1} S R_{\tau_1}\| \leq \varepsilon \|S\|.$$

Θέτουμε $\tau_2 = \tau_1 \setminus \sigma_2$. Τότε, $|\tau_2| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 n$ και $\|R_{\tau_2} S R_{\tau_2}\| \leq \|S\|$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να «εξαντλήσουμε» το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$. Το πλήθος των βημάτων, το οποίο θα δώσει μια εκτίμηση για το $M = M(\varepsilon, n)$ στην Εικασία, ουσιαστικά δίνεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^k n = 1$$

ως προς k. Η ποσότητα $M(\varepsilon, n)$ εξαρτάται από το n: έχουμε $k \simeq \log n / \varepsilon$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.7: Το επιχείρημα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι του K. Ball και υπάρχει στο [7]. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_{ij} > 0$ αν $i \neq j$ και ότι για κάθε $i \leq n$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Τότε, ο A έχει ιδιοτιμή την $\rho = 1$ με δεξιό ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Άρα, υπάρχει μη μηδενικό $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ με $\gamma A = \gamma$.

Ισχυρισμός. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma_i > 0$ για κάθε $i \leq n$.

Απόδειξη. Από την $\gamma A = \gamma$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_{ij} = \gamma_j \tag{1.2.10}$$

για κάθε $j \leq n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|. \end{aligned}$$

Αφού έχουμε παντού ισότητα, τα γ_j είναι ομόσημα. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\gamma_j \geq 0$ για κάθε $j \leq n$. Επιστρέφουμε στην (1.2.10): αφού $a_{ij} > 0$ αν $i \neq j$, από την $\gamma_j = 0$ θα καταλήγαμε στην $\gamma = 0$. □

Θεωρούμε $k \geq 2$ και για κάθε διαμέριση $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ του $\{1, \dots, n\}$ ορίζουμε

$$f(\Delta) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{i,j \in \delta_l} \gamma_i a_{ij}. \tag{1.2.11}$$

Υπάρχει διαμέριση $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ για την οποία η ποσότητα $f(\cdot)$ ελαχιστοποιείται. Θα δείξουμε ότι η Σ ικανοποιεί το ζητούμενο:

Ισχυρισμός. Για κάθε $l \leq k$ και για κάθε $i \in \sigma_l$ έχουμε $\sum_{j \in \sigma_l} a_{ij} \leq \frac{2}{k}$.

Απόδειξη. Αν όχι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υπάρχει $r \in \sigma_1$ τέτοιο ώστε

$$\theta := \sum_{j \in \sigma_1} a_{rj} > \frac{2}{k}. \tag{1.2.12}$$

Ορίζουμε $(k-1)$ το πλήθος νέες διαμερίσεις $\Sigma^2, \dots, \Sigma^k$ ως εξής: για κάθε $s = 2, \dots, k$ παίρνουμε $\Sigma^s = \{\sigma_1^s, \dots, \sigma_k^s\}$ όπου

$$\sigma_1^s = \sigma_1 \setminus \{r\}, \;\; \sigma_s^s = \sigma_s \cup \{r\} \;\text{ και }\; \sigma_l^s = \sigma_l \;\text{ αν }\; l \neq 1, s.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(\Sigma) - f(\Sigma^s) &= \sum_{i,j\in\sigma_1} \gamma_i a_{ij} + \sum_{i,j\in\sigma_s} \gamma_i a_{ij} - \sum_{i,j\in\sigma_1\setminus\{r\}} \gamma_i a_{ij} - \sum_{i,j\in\sigma_s\cup\{r\}} \gamma_i a_{ij} \\ &= \gamma_r \sum_{j\in\sigma_1} a_{rj} + \sum_{i\in\sigma_1} \gamma_i a_{ir} - \gamma_r \sum_{j\in\sigma_s} a_{rj} - \sum_{i\in\sigma_s} \gamma_i a_{ir}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας για $s = 2, \ldots, k$ — και παίρνοντας υπόψιν τις (1.2.12) και (1.2.10) — έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{s=2}^{k} \big(f(\Sigma) - f(\Sigma^s)\big) &= (k-1)\gamma_r \sum_{j\in\sigma_1} a_{rj} + (k-1) \sum_{i\in\sigma_1} \gamma_i a_{ir} - \gamma_r \sum_{j\notin\sigma_1} a_{rj} - \sum_{i\notin\sigma_1} \gamma_i a_{ir} \\ &\geq (k-1)\gamma_r \sum_{j\in\sigma_1} a_{rj} - \gamma_r \sum_{j\notin\sigma_1} a_{rj} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_{ir} \\ &= (k-1)\gamma_r\theta - \gamma_r(1-\theta) - \gamma_r \\ &= \gamma_r(k\theta - 2) > 0. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $s \in \{2, \ldots, k\}$ τέτοιο ώστε $f(\Sigma) > f(\Sigma^s)$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Εργαλεία από τη Συναρτησιακή Ανάλυση και από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

2.1 Ανισότητα του Khintchine

Οι συναρτήσεις Rademacher $r_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) ορίζονται από την

$$r_k(t) = \mathrm{sign}\big(\sin(2^k \pi t)\big). \tag{2.1.1}$$

Οι r_k ικανοποιούν την εξής συνθήκη ορθογωνιότητας: αν $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ και $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\int_0^1 r_{k_1}^{p_1}(t) r_{k_2}^{p_2}(t) \cdots r_{k_m}^{p_m}(t) dt = 0, \tag{2.1.2}$$

εκτός αν $p_j \in 2\mathbb{N}$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι προφανώς ίσο με 1. Ειδικότερα, η $\{r_k\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2[0,1]$. Έπεται ότι, για κάθε ακολουθία $\{a_k\} \in \ell_2$,

$$\int_0^1 \Big| \sum_k a_k r_k(t) \Big|^2 dt = \sum_k a_k^2. \tag{2.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι η $\{r_k\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$: έχουμε $r_1 r_2 \perp r_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Η ανισότητα του Khintchine δείχνει ότι στον υπόχωρο του $L_2[0,1]$ που παράγουν οι r_k, όλες οι L_p-μετρικές ($p > 0$) είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 2.1.1 (Khintchine). *Υπάρχουν σταθερές* $A_p, B_p > 0$ $(p > 0)$ *με την εξής ιδιότητα: για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και για κάθε* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \ell_2^n$,

$$A_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)\right|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Παρατήρηση 2.1.2. (α) Λόγω της (2.1.3), η ανισότητα του Khintchine γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$A_p \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_{L_2} \leq \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_{L_p} \leq B_p \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_{L_2}. \tag{2.1.5}$$

(β) Αν δούμε τις r_k σαν τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$ τότε εύκολα ελέγχουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(r_1(t), \ldots, r_n(t))$ συμπίπτει με την κατανομή του $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ στον E_2^n (με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας). Συνεπώς, για κάθε $p > 0$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \Big\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k\right|^p\right)^{1/p}. \tag{2.1.6}$$

(γ) Έστω A_p^*, B_p^* οι βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα 2.1.1. Από την ανισότητα του Hölder είναι φανερό ότι $A_p^* = 1$ αν $p \geq 2$ και $B_p^* = 1$ αν $0 < p \leq 2$.

Απόδειξη της ανισότητας του Khintchine

Περιγράφουμε την απόδειξη που δίνεται στο [15].

(α) Η περίπτωση $\mathbf{p = 4}$: Αρκεί να δείξουμε τη δεξιά ανισότητα. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt = 1$$

μόνο αν $i = j = k = l$ ή αν υπάρχουν $t \neq s$ ώστε κάποιοι δύο από τους i, j, k, l να είναι ίσοι με t και οι άλλοι δύο ίσοι με s. Έτσι, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)\right|^4 dt &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_i a_j a_k a_l \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt \\
&= 3 \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i^4 \\
&\leq 3 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει με $B_4 = \sqrt[4]{3}$. □

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε με επαγωγή και να δείξουμε τη δεξιά ανισότητα για κάθε $p = 2^s$. Αντί γι' αυτό, δίνουμε απευθείας απόδειξη για κάθε $p = s \in \mathbb{N}$.

(β) Η περίπτωση $\mathbf{p = s \in \{3, 4, 5, \ldots\}}$: Έστω $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$.

Παρατηρήστε ότι

$$|f(t)|^s \leq s! e^{|f(t)|} \leq s! \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right). \tag{2.1.7}$$

Από την ανεξαρτησία των r_k έχουμε

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} \exp(a_k r_k(t)) dt = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 \exp(a_k r_k(t)) dt = \prod_{k=1}^{n} \cosh(a_k). \tag{2.1.8}$$

Για την τελευταία ισότητα, παρατηρήστε ότι $r_k(t) = -1$ με πιθανότητα $1/2$ και $r_k(t) = 1$ με πιθανότητα $1/2$, άρα,

$$\int_0^1 \exp(a_k r_k(t)) dt = \frac{e^{a_k} + e^{-a_k}}{2}. \tag{2.1.9}$$

Χρησιμοποιώντας την $\cosh(x) \leq \exp(x^2/2)$ (η οποία αποδεικνύεται με «όρο προς όρο» σύγκριση των αναπτυγμάτων Taylor των δύο συναρτήσεων) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt \leq \prod_{k=1}^{b} \exp(a_k^2/2) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) = \sqrt{e}, \tag{2.1.10}$$

και, λόγω συμμετρίας,

$$\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leq \sqrt{e}. \tag{2.1.11}$$

Από την (2.1.7) βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t) \right|^s ds \leq (2\sqrt{e}) s! \leq (2\sqrt{e}) \left(\frac{s}{e}\right)^s \leq s^s, \tag{2.1.12}$$

και, παίρνοντας υπ' όψιν την

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} = 1, \tag{2.1.13}$$

καταλήγουμε στην

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_s} \leq s \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2}. \tag{2.1.14}$$

Δηλαδή, η ανισότητα ισχύει με $B_s \leq s$. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1.

(γ) $\mathbf{2 < p < \infty}$: Έστω $p \geq 2$. Θεωρούμε τον $s = [p] + 1$. Παρατηρήστε ότι $p < s \leq 2p$. Έτσι, έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_s} \leq s \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2} \leq 2p \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k r_k \right\|_{L_2}. \tag{2.1.15}$$

(δ) $\mathbf{0 < p < 2}$: Ο 2 είναι κυρτός συνδυασμός των p και 4. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε $\theta \in (0,1)$ τέτοιον ώστε $2 = p\theta + 4(1-\theta)$: η τιμή του θ είναι $2/(4-p)$. Αν $f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)$ τότε, από την ανισότητα Hölder,

(2.1.16)
$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta}.$$

Έχουμε δείξει ότι $\|f\|_{L_4} \leq \sqrt[4]{3} \|f\|_{L_2}$. Άρα, η (2.1.16) μας δίνει

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq 3^{1-\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{2(1-\theta)}. \tag{2.1.17}$$

Παρατηρήστε ότι $1 - 2(1-\theta) = p\theta/2$. Έπεται ότι

$$3^{\frac{\theta-1}{p\theta}} \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p}. \tag{2.1.18}$$

Τέλος, $\frac{\theta-1}{p\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Δηλαδή, η ανισότητα ισχύει με $A_p = 3^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$. □

Παρατήρηση 2.1.3. Η απόδειξη που δώσαμε δίνει $B_p \simeq p$ όταν $p \to \infty$. Υπάρχουν καλύτερες αποδείξεις που δείχνουν ότι $B_p^* \simeq \sqrt{p}$ όταν $p \to \infty$. Οι ακριβείς τιμές των A_p^*, B_p^* έχουν υπολογιστεί από τους Szarek (A_1^*) και Haagerup (για κάθε p).

2.2 Ανισότητα του Grothendieck

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Khintchine δείχνουμε τώρα την ανισότητα του Grothendieck. Το επιχείρημα αυτό υπάρχει στο [15].

Θεώρημα 2.2.1 (Grothendieck, 1955). *Υπάρχει σταθερά $K_G > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε*

$$\max\left\{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}s_i t_j\right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1\right\} \leq 1, \tag{2.2.1}$$

τότε για κάθε χώρο Hilbert H και για κάθε $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leq i,j \leq n$, ισχύει η ανισότητα

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leq K_G. \tag{2.2.2}$$

Σημείωση: Η υπόθεση (2.2.1) είναι ισοδύναμη με την $\|A : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leq 1$. Η βέλτιστη τιμή της σταθεράς K_G δεν είναι γνωστή.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$S_n = \sup\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle u_i, v_j\rangle\right|, \tag{2.2.3}$$

όπου το sup είναι πάνω από όλους τους χώρους Hilbert και όλα τα $u_i, v_j \in B_H$. Αφού $\langle u_i, v_j\rangle \leq 1$, είναι φανερό ότι $S_n < +\infty$.

Έστω H χώρος Hilbert και $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leq i,j \leq n$. Επειδή το ζητούμενο αφορά $2n$ διανύσματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο H έχει πεπερασμένη διάσταση $N \leq 2n$. Έστω $\{e_1, \ldots, e_N\}$ μια ορθοκανονική βάση για τον H. Ορίζουμε $F : H \to L_2[0,1]$ με $x \mapsto X := F(x)$ όπου

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N}\langle x, e_k\rangle r_k(t). \tag{2.2.4}$$

Η F είναι ισομετρία και, για κάθε $x, y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 X(t)Y(t)dt. \tag{2.2.5}$$

Παρατήρηση. Αν ξέραμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\|X\|_\infty \leq M$ για κάθε $x \in B_H$, τότε θα δείχναμε το Θεώρημα ως εξής: αν $x_i, y_j \in B_H$, τότε

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| = \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_i(t)Y_j(t)dt\right| \leq \int_0^1 \left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}X_i(t)Y_j(t)\right|dt \leq M^2. \tag{2.2.6}$$

Στο τελευταίο βήμα εφαρμόσαμε την υπόθεση (2.2.1) για τους $\frac{X_i(t)}{M}, \frac{Y_j(t)}{M} \in [-1,1]$ (για κάθε t χωριστά).

Η απόδειξη θα βασιστεί σε αυτή την παρατήρηση: Σταθεροποιούμε $M > 0$ (το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα) και για κάθε $x \in H$ γράφουμε $X = X^g + X^b$, όπου

$$X^g(t) = X(t) \text{ αν } |X(t)| \leq M \quad \text{και} \quad X^g(t) = M(\mathrm{sign} X(t)) \text{ αλλιώς.} \tag{2.2.7}$$

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $x \in H$,

$$\|X^b\|_{L_2} \leq \frac{\sqrt{3}\|X\|_{L_2}^2}{4M}. \tag{2.2.8}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αν $t \in [0,1]$ τότε είτε $X^b(t) = 0$ ή έχουμε $|X(t)| > M$ και $|X^b(t)| = |X(t)| - M$. Από τη στοιχειώδη ανισότητα $s \leq M + \frac{s^2}{4M}$ $(s > 0)$ βλέπουμε ότι, στη δεύτερη περίπτωση,

$$|X^b(t)| = |X(t)| - M \leq \frac{|X(t)|^2}{4M}. \tag{2.2.9}$$

Δηλαδή, $|X^b| \leq X^2/(4M)$ παντού στο $[0,1]$. Άρα,

$$\|X^b\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |X^b(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \frac{1}{4M}\left(\int_0^1 |X(t)|^4 dt\right)^{1/2} = \frac{\|X\|_{L_4}^2}{4M}. \tag{2.2.10}$$

Από την ανισότητα του Khintchine — για $p = 4$ (!) — έχουμε

$$\|X\|_{L_4} \leq \sqrt[4]{3}\|X\|_{L_2}. \tag{2.2.11}$$

Έπεται ο ισχυρισμός. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.1. Έστω $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leq i,j \leq n$. Τότε,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| &= \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i(t)Y_j(t)dt\right| \\ &\leq \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^g(t)Y_j^g(t)dt\right| \\ &\quad + \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^b(t)Y_j^g(t)dt\right| + \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i(t)Y_j^b(t)dt\right|. \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο παρατηρούμε ότι $\|X_i^g\|_{L_\infty}, \|Y_j^g\|_{L_\infty} \leq M$. Όπως στην παρατήρηση, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (2.2.1) παίρνουμε

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^g(t)Y_j^g(t)dt\right| \leq M^2 \int_0^1 \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{X_i^g(t)}{M}\frac{Y_j^g(t)}{M}\right|dt \leq M^2. \tag{2.2.12}$$

Για τους άλλους δύο όρους παρατηρούμε ότι:

- Αφού $|X_i^g| \leq |X_i|$, $|Y_j^g| \leq |Y_j|$ και $\|X_i\|_{L_2}, \|Y_j\|_{L_2} \leq 1$, έχουμε $\|X_i^g\|_{L_2} \leq 1$ και $\|Y_j^g\|_{L_2} \leq 1$.

- Από τον ισχυρισμό, $\|X_i^b\|_{L_2}, \|Y_j^b\|_{L_2} \leq \sqrt{3}/(4M)$.

Συνεπώς,

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i^b(t) Y_j^g(t) dt\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{4M} \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{X_i^b(t)}{\|X_i^b\|_{L_2}} Y_j^g(t) dt\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{4M} S_n \tag{2.2.13}$$

και

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i(t) Y_j^b(t) dt\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{4M} \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i(t) \frac{Y_j^b(t)}{\|Y_j^b\|_{L_2}} dt\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{4M} S_n. \tag{2.2.14}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle\right| \leq M^2 + \frac{\sqrt{3}}{2M} S_n. \tag{2.2.15}$$

Άρα,

$$S_n \leq M^2 + \frac{\sqrt{3}}{2M} S_n, \tag{2.2.16}$$

και επιλέγοντας $M = 3\sqrt{3}/4$ παίρνουμε το θεώρημα με $K_G = 81/16$. □

2.3 Θεωρήματα παραγοντοποίησης

Ορισμός 2.3.1. Έστω X χώρος Banach και έστω $T : X \to L_1(\mu)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο T **παραγοντοποιείται πολλαπλασιαστικά μέσα από τον** $L_2(\mu)$ **με σταθερά** $C > 0$ αν υπάρχει μη αρνητική $g \in L_2(\mu)$ με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ τέτοια ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\int \left(\frac{T(x)}{g}\right)^2 d\mu \leq C^2 \|x\|^2. \tag{2.3.1}$$

Ισοδύναμα, αν μπορούμε να γράψουμε $T = S \circ T_1$, όπου ο $T_1 : X \to L_2(\mu)$ ορίζεται από την $T_1(x) = T(x)/g$, ο $S : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ ορίζεται από την $S(f) = f \cdot g$, και $\|T_1\| \leq C$. Αφού $\|S\| \leq 1$, αυτό σημαίνει ότι $\|S\| \cdot \|T_1\| \leq C$.

Πρώτος μας στόχος είναι να αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 2.3.2. *Ο $T : X \to L_1(\mu)$ παραγοντοποιείται πολλαπλασιαστικά μέσα από τον $L_2(\mu)$ με σταθερά $C > 0$ αν και μόνο αν: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_m \in X$,*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{m} |T(x_i)|^2 \right)^{1/2} d\mu \leq C \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 \right)^{1/2}. \tag{2.3.2}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στις επόμενες δύο Προτάσεις.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω K ένα w^*-συμπαγές κυρτό υποσύνολο ενός δυϊκού χώρου και έστω $\mathcal{C}$ ένας κώνος που αποτελείται από κυρτές w^*-κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις f ορισμένες στο K. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{C}$ ισχύει $\min_K f \leq 0$. Τότε, υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq 0$ για κάθε $f \in \mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Στον $C(K)$ θεωρούμε τον κώνο

$$D := \{g \in C(K) : \text{υπάρχει } f \in \mathcal{C} \text{ ώστε } g \leq f\} \tag{2.3.3}$$

και τον ανοιχτό κώνο P όλων των γνήσια θετικών $h \in C(K)$. Από την υπόθεση έχουμε $D \cap P = \emptyset$, άρα υπάρχουν $\mu \in [C(K)]^*$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu(g) \leq \alpha < \mu(h) \tag{2.3.4}$$

για κάθε $g \in D$ και για κάθε $h \in P$. Αφού τα D και P είναι κώνοι, αναγκαστικά έχουμε $\alpha = 0$. Άρα, το μ είναι θετικό μέτρο στο K και μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μέτρο πιθανότητας. Κάθε $f \in \mathcal{C}$ προσεγγίζεται από τον D, άρα, για κάθε $f \in \mathcal{C}$,

$$\int f \, d\mu \leq 0. \tag{2.3.5}$$

Επιλέγουμε ως x το κέντρο βάρους του μ. Τότε, $x \in K$ και

$$f(x) \leq \int f \, d\mu \leq 0 \tag{2.3.6}$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}$. □

Πρόταση 2.3.4 (Maurey). *Έστω $(f_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mu)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Υπάρχει μη αρνητική $g \in L_2(\mu)$ με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ τέτοια ώστε: για κάθε $i \in I$,*

$$\int \left(\frac{f_i}{g} \right)^2 d\mu \leq 1. \tag{2.3.7}$$

(ii) *Για κάθε μη κενό, πεπερασμένο $\sigma \subseteq I$ και για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(a_i)_{i \in \sigma}$,*

$$\int \left(\sum_{i \in \sigma} a_i^2 f_i^2 \right)^{1/2} d\mu \leq \left(\sum_{i \in \sigma} a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{2.3.8}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει μη αρνητική $g \in L_2(\mu)$ με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ η οποία ικανοποιεί την (2.3.7). Έστω $\sigma \subseteq I$ πεπερασμένο και έστω $(a_i)_{i\in\sigma}$. Τότε, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{i\in\sigma} a_i^2 f_i^2\right)^{1/2} d\mu &= \int \left(\sum_{i\in\sigma} a_i^2 \left(\frac{f_i}{g}\right)^2\right)^{1/2} g\, d\mu \\ &\leq \left(\int \sum_{i\in\sigma} a_i^2 \left(\frac{f_i}{g}\right)^2 d\mu\right)^{1/2} \|g\|_{L_2(\mu)} \\ &\leq \left(\sum_{i\in\sigma} a_i^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η (2.3.8). Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.3.3. Σαν K παίρνουμε το $B_{L_2(\mu)} \bigcap \{g : g \geq 0\}$. Θεωρούμε τον κώνο $\mathcal{C}$ που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$F_{(\sigma,\vec{\lambda})}(g) = \sum_{i\in\sigma} \lambda_i \int \left(\frac{f_i}{g}\right)^2 d\mu - \sum_{i\in\sigma} \lambda_i, \tag{2.3.9}$$

όπου σ μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του I και $\lambda_i \geq 0$. Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε $F_{(\sigma,\vec{\lambda})}$ είναι κυρτή και w^*-κάτω ημισυνεχής.

Ελέγχουμε πρώτα ότι ικανοποιείται η υπόθεση της Πρότασης 2.3.3. Έστω σ και $\vec{\lambda}$. Επιστρέφοντας στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.4, παρατηρούμε ότι

$$\int \left(\sum_{i\in\sigma} \lambda_i f_i^2\right)^{1/2} = \min\left\{\left(\int \sum_{i\in\sigma} \lambda_i \left(\frac{f_i}{g}\right)^2 d\mu\right)^{1/2} : \|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1\right\}. \tag{2.3.10}$$

Άρα, υπάρχει $g = g(\sigma, \vec{\lambda})$ με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ τέτοια ώστε

$$\int \sum_{i\in\sigma} \lambda_i \left(\frac{f_i}{g}\right)^2 d\mu = \left(\int \left(\sum_{i\in\sigma} \lambda_i f_i^2\right)^{1/2} d\mu\right)^2 \leq \sum_{i\in\sigma} \lambda_i, \tag{2.3.11}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (2.3.8) με $a_i^2 = \lambda_i$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\min_K F_{(\sigma,\vec{\lambda})} \leq F_{(\sigma,\vec{\lambda})}(g) \leq 0. \tag{2.3.12}$$

Από την Πρόταση 2.3.3 υπάρχει μη αρνητική g με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ τέτοια ώστε $F_{(\sigma,\vec{\lambda})}(g) \leq 0$ για κάθε σ και $\vec{\lambda}$. Ειδικότερα, αν $\sigma = \{i\}$ και $\lambda_i = 1$ παίρνουμε

$$\int \left(\frac{f_i}{g}\right)^2 d\mu \leq 1. \tag{2.3.13}$$

για κάθε $i \in I$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $T : X \to L_1(\mu)$ παραγοντοποιείται πολλαπλασιαστικά μέσα από τον $L_2(\mu)$ με σταθερά C. Δηλαδή, υπάρχει μη αρνητική $g \in L_2(\mu)$ με $\|g\|_{L_2(\mu)} \leq 1$ τέτοια ώστε: για κάθε $x \in X$,

$$\int \left(\frac{T(x)}{g}\right)^2 d\mu \leq C^2\|x\|^2. \tag{2.3.14}$$

Από την Πρόταση 2.3.4, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, για οποιαδήποτε μη μηδενικά $x_1, \ldots, x_m \in X$ και για οποιουσδήποτε $a_1, \ldots, a_m \geq 0$ έχουμε

$$\int \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \left(\frac{T(x_i)}{C\|x_i\|}\right)^2\right)^{1/2} d\mu \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2}. \tag{2.3.15}$$

Παίρνοντας $a_i = C\|x_i\|$ έχουμε την (2.3.2).

Ο αντίστροφος ισχυρισμός αποδεικνύεται ανάλογα (χρησιμοποιούμε τώρα την άλλη κατεύθυνση στην ισοδυναμία της Πρότασης 2.3.4). □

Η εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.2 που θα χρειαστούμε είναι το λεγόμενο «μικρό θεώρημα του Grothendieck»:

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω H χώρος Hilbert και έστω $T : H \to L_1(\mu)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T παραγοντοποιείται πολλαπλασιαστικά μέσα από τον $L_2(\mu)$ με σταθερά $C \leq \sqrt{2}\|T\|$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.2, αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_1, \ldots, x_m \in X$,

$$\int \left(\sum_{i=1}^m |T(x_i)|^2\right)^{1/2} d\mu \leq C\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_H^2\right)^{1/2}. \tag{2.3.16}$$

Χρησιμοποιώντας κατά σημείο την ανισότητα του Khintchine για $p = 1$ (η βέλτιστη σταθερά είναι $\sqrt{2}$) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int \left(\sum_{i=1}^m |(Tx_i)(s)|^2\right)^{1/2} d\mu(s) &\leq \sqrt{2}\int\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^m (Tx_i)(s)r_i(t)\right| dt\, d\mu(s) \\
&= \sqrt{2}\int_0^1\int \left|\sum_{i=1}^m (Tx_i)(s)r_i(t)\right| d\mu(s)\, dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \left\|\sum_{i=1} r_i(t)T(x_i)\right\|_{L_1(\mu)} dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{2}\|T\| \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m r_i(t) x_i \right\|_H dt \\
&\leq \sqrt{2}\|T\| \left(\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m r_i(t) x_i \right\|_H^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|T\| \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_H^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

όπου στα δύο τελευταία βήματα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και τον κανόνα του παραλληλογράμμου. □

2.4 p-αθροίζοντες τελεστές

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε μια δυϊκή προσέγγιση στο Θεώρημα 2.3.5, η οποία βασίζεται στη θεωρία των p-αθροιζόντων τελεστών. Σημαντικό ρόλο παίζει εδώ η ανισότητα του Grothendieck. Περισσότερα για την θεωρία των p–αθροιζόντων τελεστών υπάρχουν στα βιβλία [25] και [15].

Ορισμός 2.4.1. Έστω X και Y χώροι Banach και έστω $p \geq 1$. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται *p-αθροίζων* αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_m \in X$ έχουμε

$$
\left(\sum_{i=1}^m \|Tx_i\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^m |x^*(x_i)|^p \right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*} \right\}. \tag{2.4.1}
$$

Αν ο T είναι p–αθροίζων, η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ικανοποιείται ο ορισμός συμβολίζεται με $\pi_p(T)$. Αλλιώς, θέτουμε $\pi_p(T) = +\infty$. Παίρνοντας $m = 1$ βλέπουμε ότι κάθε p–αθροίζων τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, με $\|T\| \leq \pi_p(T)$.

Συμβολίζουμε την κλάση όλων των p-αθροιζόντων τελεστών $T : X \to Y$ με $\Pi_p(X, Y)$. Μπορεί κανείς να ελέγξει τα εξής:

(α) Η κλάση $\Pi_p(X, Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $B(X, Y)$, η $\pi_p(\cdot)$ είναι νόρμα στον $\Pi_p(X, Y)$ και ο $(\Pi_p(X, Y), \pi_p(\cdot))$ είναι χώρος Banach.

(β) Αν X, Y, Z είναι χώροι Banach και αν $T : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ είναι φραγμένοι τελεστές, τότε

$$
\pi_p(S \circ T) \leq \pi_p(S)\|T\| \;\; \text{και} \;\; \pi_p(S \circ T) \leq \|S\|\pi_p(T). \tag{2.4.2}
$$

Δηλαδή, αν ένας από τους δύο τελεστές είναι p–αθροίζων, το ίδιο ισχύει και για τη σύνθεσή τους.

Το Θεώρημα του Pietsch δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $T : X \to Y$ p-αθροίζων.

Θεώρημα 2.4.2 (Pietsch, 1967). *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε, $T \in \Pi_p(X,Y)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $C > 0$ και μέτρο πιθανότητας μ στην (B_{X^*}, w^*) τέτοια ώστε*

$$\|Tx\| \leq C \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \right)^{1/p} \tag{2.4.3}$$

για κάθε $x \in X$. Σε αυτή την περίπτωση, η μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί τα παραπάνω ισούται με $\pi_p(T)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν $C > 0$ και μ στην (B_{X^*}, w^*) τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (2.4.3). Αν $x_1, \ldots, x_m \in X$, τότε

$$\sum_{i=1}^m \|Tx_i\|^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p d\mu(x^*) \leq C^p \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |x^*(x_i)|^p : x^* \in B_{X^*} \right\}. \tag{2.4.4}$$

Άρα, $T \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(T) \leq C$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $T \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(T) = 1$. Ορίζουμε $Q \subset C(B_{X^*})$ ως εξής: η f ανήκει στο Q αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^m (\|Tx_i\|^p - |x^*(x_i)|^p) \tag{2.4.5}$$

για κάποια $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in X$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το Q είναι κυρτό. Αν η f ορίζεται από το $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ και η g ορίζεται από το $\{z_1, \ldots, z_s\} \subset X$, τότε για κάθε $\lambda \in (0,1)$ η $\lambda f + (1-\lambda)g$ ορίζεται από το $\{\lambda^{1/p} x_i : i \leq m\} \cup \{(1-\lambda)^{1/p} z_j : j \leq s\}$. Τέλος, θέτουμε $Q' = \mathrm{conv}(\{Q, 0\})$.

Θεωρούμε τον θετικό κώνο P του $C(B_{X^*})$. Αυτός αποτελείται από όλες τις $f \in C(B_{X^*})$ για τις οποίες $f(x^*) > 0$ για κάθε $x^* \in B_{X^*}$. Αφού $\pi_p(T) = 1$, αν $f \in Q'$ τότε υπάρχει $x^* \in B_{X^*}$ τέτοιο ώστε $f(x^*) \leq 0$. Δηλαδή, $P \cap Q' = \emptyset$.

Αφού ο P είναι ανοικτός, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $\mu \in [C(B_{X^*})]^*$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: για κάθε $g \in Q'$ και για κάθε $f \in P$,

$$\mu(g) \leq c < \mu(f). \tag{2.4.6}$$

Όμως: (α) $0 \in Q'$ άρα $c \geq 0$, και (β) για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $f \in P \Rightarrow \lambda f \in P$ και $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$, άρα $c \leq 0$. Επίσης, αφού το μ είναι συνεχές και $\mu(f) > 0$ για κάθε $f \in P$, συμπεραίνουμε ότι $f \geq 0 \Rightarrow \mu(f) \geq 0$. Δηλαδή το μ είναι θετικό μέτρο και, διαιρώντας με τη νόρμα του, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μέτρο πιθανότητας. Επιστρέφοντας στην (2.4.6) βλέπουμε ότι

$$\int_{B_{X^*}} g(x^*) d\mu(x^*) \leq 0 \ \text{ για κάθε } \ g \in Q. \tag{2.4.7}$$

Έστω τώρα $x \in X$. Παίρνοντας την $g(x^*) = \|Tx\|^p - |x^*(x)|^p$ και βάζοντας την στην (2.4.7) έχουμε

$$\|Tx\|^p \leq C^p \int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \tag{2.4.8}$$

με $C = \pi(T) = 1$. □

Πόρισμα 2.4.3. *Έστω X και Y χώροι Banach και έστω $1 \leq p < r$. Τότε,*

(i) $\Pi_p(X,Y) \subseteq \Pi_r(X,Y)$.

(ii) *για κάθε $T \in \Pi_p(X,Y)$ ισχύει $\pi_r(T) \leq \pi_p(T)$.*

Απόδειξη. Οι δύο ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 2.4.2, με απλή εφαρμογή της ανισότητας του Hölder. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την B_{X^*} με την κλειστή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων της. Έτσι, στην ειδική περίπτωση όπου $X = C(K)$ με τον K συμπαγή, παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω $T : C(K) \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Έχουμε $T \in \Pi_p(X,Y)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $C > 0$ και μέτρο πιθανότητας μ στο K τέτοια ώστε*

$$\|Tf\| \leq C \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{2.4.9}$$

για κάθε $f \in C(K)$.

Θεώρημα 2.4.5 (Lindenstrauss-Pelczynski, 1968). *Για κάθε τελεστή $T : \ell_\infty^n \to \ell_2^n$ έχουμε*

$$\pi_2(T) \leq K_G \|T\|. \tag{2.4.10}$$

Απόδειξη. Έστω $\{e_i\}_{i \leq n}$ και $\{v_j\}_{j \leq n}$ οι συνήθεις βάσεις των ℓ_∞^n και ℓ_2^n. Θέτουμε $a_{ij} = \langle Te_i, v_j \rangle$ (δηλαδή, $Te_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$).

Έστω $x_1, \ldots, x_m \in \ell_\infty^n$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^m |x^*(x_k)|^2 : \|x^*\|_{\ell_1^n} \leq 1 \right\} = 1. \tag{2.4.11}$$

Κάθε x_k γράφεται στη μορφή $x_k = \sum_{i=1}^n b_{ki} e_i$, επομένως παίρνοντας $x^* = e_i$, από την (2.4.11) βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^m b_{ki}^2 = \sum_{k=1}^m |e_i(x_k)|^2 \leq 1 \tag{2.4.12}$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αυτό που θέλουμε να φράξουμε είναι το άθροισμα

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \|Tx_k\|_{\ell_2^n}^2 &= \sum_{k=1}^m \Big\| \sum_{i=1}^n b_{ki} Te_i \Big\|_{\ell_2^n}^2 = \sum_{k=1}^m \Big\| \sum_{i=1}^n b_{ki} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \Big\|_{\ell_2^n}^2 \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \Big| \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ij} \Big|^2 . \end{aligned}$$

Ορίζουμε $u_i = (b_{1i}, \dots, b_{mi})$, $i = 1, \dots, n$. Από την (2.4.12) έχουμε $\|u_i\|_{\ell_2^m} \leq 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και

$$\Big\| \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \Big\|_{\ell_2^m} = \sum_{k=1}^m \Big| \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ki} \Big|^2 . \tag{2.4.13}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^m \|Tx_k\|_{\ell_2^n}^2 = \sum_{j=1}^n \Big\| \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \Big\|_{\ell_2^m}^2 . \tag{2.4.14}$$

Έστω $y \in \ell_2^n$. Για κάθε $s = (s_1, \dots, s_n)$ με $\|s\|_{\ell_\infty^n} \leq 1$ θέτουμε $y_s = (s_1 y_1, \dots, s_n y_n)$. Αν $x = (t_1, \dots, t_n)$ και $\|x\|_{\ell_\infty^n} \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_j s_j t_i \Big| &= \Big| \Big\langle \sum_{j=1}^n s_j y_j v_j , \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n t_i a_{ij} \Big) v_j \Big\rangle \Big| \\ &= \Big| \Big\langle \sum_{j=1}^n s_j y_j v_j , \sum_{i=1}^n t_i \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \Big) \Big\rangle \Big| \\ &= \Big| \Big\langle y_s , \sum_{i=1}^n t_i Te_i \Big\rangle \Big| \\ &= |\langle y_s, Tx \rangle| \leq \|Tx\|_{\ell_2^n} \\ &\leq \|T\|. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Grothendieck έπεται ότι, αν $w_1, \dots, w_j \in \ell_2^n$ και $\|w_j\|_{\ell_2^n} \leq 1$, τότε

$$\Big| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_j \langle u_i, w_j \rangle \Big| \leq K_G \|T\|. \tag{2.4.15}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{j=1}^n y_j \Big\langle \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i , w_j \Big\rangle \leq K_G \|T\|, \tag{2.4.16}$$

και αφού τα w_j είναι τυχόντα στην $B_{\ell_2^n}$,

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right\|_{\ell_2^m} \leq K_G \|T\|. \tag{2.4.17}$$

Όμως το $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ήταν τυχόν στην $B_{\ell_2^n}$. Άρα,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right\|_{\ell_2^m}^2 \right)^{1/2} \leq K_G \|T\|. \tag{2.4.18}$$

Αφού είχαμε κάνει την υπόθεση (2.4.11), έχουμε αποδείξει ότι

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|Tx_k\|_{\ell_2^n}^2 \right)^{1/2} \leq K_G \|T\| \sup \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)|^2 \right)^{1/2} : \|x^*\|_{\ell_1^n} \leq 1 \right\}. \tag{2.4.19}$$

Άρα, $\pi_2(T) \leq K_G \|T\|$. □

Πόρισμα 2.4.6. *Έστω H χώρος Hilbert διάστασης k και έστω $S : H \to \ell_1^k$ φραγμένος $1-1$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο S m-παραγοντοποιείται μέσα από τον ℓ_2^k με σταθερά $C \leq K_G \|S\|$.*

Απόδειξη. Ο $S^* : \ell_\infty^k \to H$ είναι 2-αθροίζων. Από το Θεώρημα 2.4.4 (αφού ο ℓ_∞^k συμπίπτει με τον $C(\{1, \ldots, k\})$) υπάρχουν $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 = 1$ τέτοιοι ώστε

$$\|S^* x\|_H \leq K_G \|S\| \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \tag{2.4.20}$$

για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \ell_\infty^k$.

Ορίζουμε $D : \ell_\infty^k \to \ell_2^k$ με $De_i = \lambda_i e_i$, και $U : \ell_2^k \to H$ με $Ue_i = \frac{S^* e_i}{\lambda_i}$. Η (2.4.20) δείχνει ότι

$$\|U(Dx)\|_H \leq K_G \|S\| \cdot \|Dx\|_{\ell_2^k} \tag{2.4.21}$$

για κάθε $x \in \ell_\infty^k$. Άρα, $\|U\| \leq K_G \|S\|$. □

2.5 Κανονικές τυχαίες μεταβλητές

Η τυπική κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ είναι το Borel μέτρο πιθανότητας γ_n που ορίζεται από την

$$\gamma_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B \exp(-\|x\|_2^2) dx, \tag{2.5.1}$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Μια τυχαία μεταβλητή $N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$ αν $P(N \in B) = \gamma_n(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$ αν $X = \sigma N + m$ για κάποια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή N στο $\mathbb{R}$ και κάποιους $\sigma \geq 0$ και $m \in \mathbb{R}$. Γράφουμε μ για την κατανομή $\mathrm{dist}(X)$ της X (δηλαδή, το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\mu(B) = P(X \in B)$). Τότε ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 2.5.1. *Έστω $X = \sigma N + m$ μια κανονική τ.μ. και έστω $\mu = \mathrm{dist}(X)$. Τότε, η μέση τιμή και η διασπορά της X δίνονται από τις*

$$\mathbb{E}X = m \quad \textit{και} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2. \tag{2.5.2}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η

$$\hat{\mu}(-t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \tag{2.5.3}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Λέμε ότι η X της Πρότασης 2.5.1 είναι μια $N(m, \sigma^2)$ τυχαία μεταβλητή. Αν $\sigma = 0$ τότε $\mu = \delta_m$ (η σημειακή μάζα στο m), ενώ αν $\sigma > 0$ έχουμε

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \tag{2.5.4}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx \tag{2.5.5}$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ ή $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel μετρήσιμη.

Πρόταση 2.5.2. *Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχουν $n \times n$ πίνακας A και διάνυσμα $m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN + m), \tag{2.5.6}$$

όπου N τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

(β) *Για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, η τυχαία μεταβλητή*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i \tag{2.5.7}$$

είναι κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$.
(γ) *Υπάρχουν* $a \in \mathbb{R}^n$ *και θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή* Q *στον* $\mathbb{R}^n$ *τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y,X\rangle}) = e^{i\langle a,y\rangle - \frac{1}{2}Q(y)} \tag{2.5.8}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. □

Έστω ότι οι ισοδύναμες συνθήκες (α)-(γ) ισχύουν για το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Θεωρούμε τον πίνακα $\Gamma = (\gamma_{ij})$ των συνδιακυμάνσεων

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}\big([X_i - \mathbb{E}X_i] \cdot [X_j - \mathbb{E}X_j]\big), \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.5.9}$$

Τότε, με το συμβολισμό της Πρότασης 2.5.2, ισχύουν τα εξής:

(i) $m = \mathbb{E}X$.

(ii) $\mathbb{E}(Y) = \langle t, m\rangle$, όπου $t = (t_1, \ldots, t_n)$.

(iii) $\mathbb{V}(Y) = \|A^*t\|_2^2$.

(iv) $AA^* = \Gamma$.

(v) $a = m$.

(vi) $Q(y) = \langle \Gamma y, y\rangle = \mathbb{V}(\langle y, X\rangle)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα αντιστροφής για το μετασχηματισμό Fourier. *Αν* $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *τότε*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y,z\rangle} dy \tag{2.5.10}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. *Επιπλέον, η* (2.5.10) *ισχύει για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *στο οποίο η* f *είναι συνεχής.* □

Υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι κανονικά κατανεμημένο στον $\mathbb{R}^n$, και ότι $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Αν ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Γ είναι αντιστρέψιμος, τότε από το θεώρημα αντιστροφής παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 2.5.3. *Αν* $\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN)$, *τότε το* X *έχει πυκνότητα που δίνεται από την*

$$g(z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, z\rangle - \langle \Gamma y, y\rangle/2) dy, \tag{2.5.11}$$

όπου $\Gamma = AA^*$ *ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των* X_i. □

Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο βιβλίο [4] του Bogachev.

2.5(α) Το Λήμμα του Slepian

Το Λήμμα του Slepian [27] δίνει ένα κριτήριο σύγκρισης για n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δύο n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον Ω και έχουν μέση τιμή 0. Υποθέτουμε ότι*

$$\begin{aligned} \int_\Omega X_i^2 d\mu &= \int_\Omega Y_i^2 d\mu, \\ \int_\Omega X_i X_j d\mu &\geq \int_\Omega Y_i Y_j d\mu \end{aligned}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\int_\Omega \max_{i \leq n} X_i \, d\mu \leq \int_\Omega \max_{i \leq n} Y_i \, d\mu. \tag{2.5.12}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι, αν $Z = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ είναι μια n-άδα κανονικών τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή 0, τότε ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\Gamma = (\gamma_{ij})$, όπου $\gamma_{ij} = \int Z_i Z_j dP$, είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας: δηλαδή, $\langle \Gamma x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα, κάθε θετικά ημιορισμένος ορισμένος πίνακας Γ ορίζει μια n-άδα $Z = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ που έχει τον Γ σαν πίνακα συνδιακυμάνσεων. Η πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος Z δίνεται από την

$$g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Gamma)^{-1/2} \exp\big(- \langle \Gamma^{-1} z, z \rangle / 2 \big), \tag{2.5.13}$$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση του Z είναι η

$$\hat{g}(y) = \exp\big(- \langle \Gamma y, y \rangle / 2 \big). \tag{2.5.14}$$

Από το θεώρημα αντιστροφής, έχουμε

$$g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\big(i \langle y, z \rangle - \langle \Gamma y, y \rangle / 2 \big) dy \tag{2.5.15}$$

για κάθε $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Παραγωγίζοντας ως προς γ_{ij} παίρνουμε την ταυτότητα

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} \tag{2.5.16}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Σταθεροποιούμε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\Gamma \mid t_1, \ldots, t_n) := G(\Gamma)$ με

$$G(\Gamma) := P\left(\bigcap_{j=1}^n \{ \omega \in \Omega \mid Z_j(\omega) < t_j \} \right) = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz \tag{2.5.17}$$

σαν συνάρτηση του Γ (παραλείπουμε τα $t_1, \ldots, t_n$ για ευκολία στο συμβολισμό). Από την (2.5.16) βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{ij}} = \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} g(z_1, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz \tag{2.5.18}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ισούται με ένα ολοκλήρωμα της g ως προς τις $(m-2)$-μεταβλητές z_k, $k \neq i, j$. Για παράδειγμα,

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{12}} = \int_{-\infty}^{t_3} \cdots \int_{-\infty}^{t_n} g(t_1, t_2, z_3, \ldots, z_n \mid \Gamma) dz_n \ldots dz_3. \tag{2.5.19}$$

Άρα,

$$\frac{\partial G(\Gamma)}{\partial \gamma_{ij}} \geq 0 \tag{2.5.20}$$

για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \max_{i \leq n} Z_i &= \int_\Omega \big(\max_{i \leq n} Z_i\big)^+ d\mu - \int_\Omega \big(\max_{i \leq n} Z_i\big)^- d\mu \\
&= \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i > t\big) dt - \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i < -t\big) dt \\
&= \int_0^\infty [1 - P\big(\max_{i \leq n} Z_i < t\big)] dt - \int_0^\infty P\big(\max_{i \leq n} Z_i < -t\big) dt \\
&= \int_0^\infty (1 - G(\Gamma \mid t, \ldots, t)) dt - \int_0^\infty G(\Gamma \mid -t, \ldots, -t) dt.
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τις n-άδες $X = (X_1, \ldots, X_n)$ και $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ του Θεωρήματος, και γράφουμε Γ_X και Γ_Y για τους αντίστοιχους πίνακες συνδιακυμάνσεων. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι Γ_X και Γ_Y είναι θετικά ορισμένοι (αλλιώς, προσεγγίζουμε τις X και Y με n-άδες X_ε και Y_ε που έχουν αυτήν την ιδιότητα, και μετά περνάμε στο όριο).

Για κάθε $\theta \in [0, 1]$ θέτουμε

$$\Gamma(\theta) = \theta \Gamma_X + (1 - \theta) \Gamma_Y. \tag{2.5.21}$$

Με αυτό τον ορισμό έχουμε $\Gamma(0) = \Gamma_Y$ και $\Gamma(1) = \Gamma_X$. Κάθε $\Gamma(\theta)$ είναι θετικά ορισμένος πίνακας. Αν ορίσουμε

$$T(\theta) = G(\Gamma(\theta)), \tag{2.5.22}$$

τότε

$$\begin{aligned} T'(\theta) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \frac{d\gamma_{ij}(\theta)}{d\theta} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \big(\mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(Y_iY_j)\big) \\ &= \sum_{i\neq j} \frac{\partial G(\Gamma(\theta))}{\partial \gamma_{ij}} \cdot \big(\mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(Y_iY_j)\big) \end{aligned}$$

γιατί $\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}Y_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Από την (2.5.20) και τη δεύτερη υπόθεσή μας, έπεται ότι

$$T'(\theta) \geq 0, \tag{2.5.23}$$

άρα

$$G(\Gamma_X) = G(\Gamma(1)) \geq G(\Gamma(0)) = G(\Gamma_Y). \tag{2.5.24}$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i &= \int_0^{\infty} (1 - G(\Gamma_X \mid t, \ldots, t))dt - \int_0^{\infty} G(\Gamma_X \mid -t, \ldots, -t)dt \\ &\leq \int_0^{\infty} (1 - G(\Gamma_Y \mid t, \ldots, t))dt - \int_0^{\infty} G(\Gamma_Y \mid -t, \ldots, -t)dt \\ &= \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \end{aligned}$$

Αυτό προκύπτει άμεσα, αν θεωρήσουμε $t \geq 0$ και εφαρμόσουμε την (2.5.24) για τις n-άδες $(t, \ldots, t)$ και $(-t, \ldots, -t)$. Για την ακρίβεια, η (2.5.24) δίνει πολύ ισχυρότερη πληροφορία για την κατανομή των X και Y. □

Θα χρειαστούμε επίσης την εξής παραλλαγή του Λήμματος του Slepian.

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ δύο n-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον Ω και έχουν μέση τιμή 0. Υποθέτουμε ότι*

$$\|X_i - X_j\|_2 \leq \|Y_i - Y_j\|_2 \tag{2.5.25}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε,

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i \leq 2\mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \tag{2.5.26}$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $X_i' = X_i - X_1$ και $Y_i' = Y_i - Y_1$, τότε η (2.5.25) εξακολουθεί να ισχύει, και

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i' = \mathbb{E}\max_{i\leq n} X_i \quad , \quad \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i' = \mathbb{E}\max_{i\leq n} Y_i. \tag{2.5.27}$$

Μπορούμε λοιπόν να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $X_1 = Y_1 = 0$. Τότε, από την (2.5.25) παίρνουμε

$$\|X_i\|_2 \leq \|Y_i\|_2 \tag{2.5.28}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή g, ανεξάρτητη από τις X_i, Y_i, στον Ω, και θέτουμε

$$\begin{aligned} C &= \max_{i\leq n} \|Y_i\|_2 \\ \tilde{X}_i &= X_i + C\cdot g \\ \tilde{Y}_i &= Y_i + \left(C^2 - \|Y_i\|_2^2 + \|X_i\|_2^2\right)^{1/2} g = Y_i + b_i\cdot g. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $C^2 - \|Y_i\|_2^2 + \|X_i\|_2^2 \geq 0$, άρα ο b_i ορίζεται καλά. Από την (2.5.28) έπεται ότι

$$b_i \leq C. \tag{2.5.29}$$

Από τον τρόπο ορισμού των $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ έχουμε

$$\|\tilde{X}_i - \tilde{X}_j\|_2 = \|X_i - X_j\|_2 \tag{2.5.30}$$

και

$$\|\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j\|_2 = \|(Y_i - Y_j) + g(b_i - b_j)\|_2 = \left(\|Y_i - Y_j\|_2^2 + |b_i - b_j|^2\right)^{1/2} \geq \|Y_i - Y_j\|_2, \tag{2.5.31}$$

άρα

$$\|\tilde{X}_i - \tilde{X}_j\|_2 \leq \|\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_j\|_2 \tag{2.5.32}$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Επίσης,

$$\|\tilde{X}_i\|_2^2 = \|X_i\|_2^2 + C^2 = \|Y_i\|_2^2 + b_i^2 = \|\tilde{Y}_i\|_2^2. \tag{2.5.33}$$

Από τις (2.5.32) και (2.5.33) είναι φανερό ότι οι n-άδες $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n)$ και $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5.4. Άρα,

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n} \tilde{X}_i \leq \mathbb{E}\max_{i\leq n} \tilde{Y}_i. \tag{2.5.34}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n}\tilde{X}_i=\mathbb{E}\left(\max_{i\leq n}X_i+C\cdot g\right)=\mathbb{E}\max_{i\leq n}X_i \tag{2.5.35}$$

και, λόγω της (2.5.29),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{i\leq n}\tilde{Y}_i &\leq \mathbb{E}\max_{i\leq n}(Y_i+b_i\cdot g^+)\\ &\leq \mathbb{E}\max_{i\leq n}Y_i+C\cdot\mathbb{E}g^+.\end{aligned}$$

Όμως, απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\mathbb{E}Y_i^+=\|Y_i\|_2\cdot\mathbb{E}g^+$, άρα

$$C=\max_{i\leq n}\|Y_i\|_2=\max_{i\leq n}\frac{\mathbb{E}Y_i^+}{\mathbb{E}g^+}\leq\frac{\mathbb{E}\max_{i\leq n}Y_i^+}{\mathbb{E}g^+}=\frac{\mathbb{E}\max_{i\leq n}Y_i}{\mathbb{E}g^+}, \tag{2.5.36}$$

γιατί $\max_{i\leq n}Y_i^+=\max_{i\leq n}Y_i$ αφού $Y_1\equiv 0$. Άρα,

$$C\cdot\mathbb{E}g^+\leq\mathbb{E}\max_{i\leq n}Y_i, \tag{2.5.37}$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n}\tilde{Y}_i\leq 2\mathbb{E}\max_{i\leq n}Y_i. \tag{2.5.38}$$

Από τις (2.5.34), (2.5.35) και (2.5.38) έπεται το συμπέρασμα. □

2.5(β) Κανονικές και Rademacher τυχαίες μεταβλητές

Σε αυτή την υποπαράγραφο δείχνουμε δύο ακόμα τεχνικά Λήμματα για κανονικές και Rademacher τυχαίες μεταβλητές, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα Κεφάλαια (περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο βιβλίο [24] των Ledoux και Talagrand).

Πρόταση 2.5.6. *Έστω $g_1,\ldots,g_N$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Τότε,*

$$c_1\sqrt{\log N}\leq\mathbb{E}\max_{i\leq N}g_i\leq c_2\sqrt{\log N}, \tag{2.5.39}$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $q\geq 1$. Από την ανισότητα Hölder,

$$\mathbb{E}\max_{i\leq N}g_i\leq\mathbb{E}\max_{i\leq N}|g_i|\ \leq\ \mathbb{E}\big(\sum_{i\leq N}|g_i|^q\big)^{1/q}\leq\left(\sum_{i\leq N}\mathbb{E}|g_i|^q\right)^{1/q}. \tag{2.5.40}$$

Η ροπή τάξης q της g υπολογίζεται ακριβώς:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|g|^q &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^q e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (2y)^{\frac{q-1}{2}}e^{-y}dy \\ &= \frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{q+1}{2}\Big). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\left(\max_{i\leq N} g_i\right) \leq \left(N\frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{q+1}{2}\Big)\right)^{1/q} \leq c\sqrt{q}N^{1/q}. \tag{2.5.41}$$

Αν επιλέξουμε $q\sim \log N$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\max_{i\leq N} g_i\right) \leq c_2\sqrt{\log N}, \tag{2.5.42}$$

όπου $c_2>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει (αρκετά μικρή) απόλυτη σταθερά $\alpha>0$ και υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε: αν $g\sim N(0,1)$ και $N\geq n_0$, τότε

$$P(g>\alpha\sqrt{\log N}) \geq \frac{1}{N}. \tag{2.5.43}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(g>\alpha\sqrt{\log N}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log N}}^\infty e^{-x^2/2}dx \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log N}}^{2\alpha\sqrt{\log N}} e^{-x^2/2}dx \\ &= \frac{\alpha\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\alpha^2\log N} = \frac{\alpha\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}}N^{-2\alpha^2} \\ &\geq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

αν, για παράδειγμα, $\alpha=1/2$ και το n_0 επιλεγεί κατάλληλα. Τότε, για κάθε $N\geq n_0$ έχουμε

$$P\left(\max_{i\leq N} g_i\leq \alpha\sqrt{\log N}\right) = \left[P(g\leq\alpha\sqrt{\log N})\right]^N \leq \left(1-\frac{1}{N}\right)^N \leq \frac{1}{e}, \tag{2.5.44}$$

άρα, από την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$\mathbb{E}\max_{i\leq N} g_i \geq \frac{1}{2}\sqrt{\log N}\cdot P\left(\max_{i\leq N} g_i\geq \frac{1}{2}\sqrt{\log N}\right) \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\sqrt{\log N} \tag{2.5.45}$$

αν $N\geq n_0$. Είναι τώρα φανερό ότι αν επιλέξουμε κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_1>0$, πετυχαίνουμε την

$$c_1\sqrt{\log N} \leq \mathbb{E}\max_{i\leq N} g_i \tag{2.5.46}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. $\square$

Το επόμενο Λήμμα των Maurey-Pisier μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τη μέση τιμή της νόρμας «κανονικών διανυσμάτων» με τη μέση τιμή της νόρμας των αντίστοιχων «Rademacher διανυσμάτων».

Πρόταση 2.5.7. *Έστω H χώρος Hilbert και έστω $e_1, \dots, e_n \in H$. Αν g_i είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε κάποιο χώρο πιθανότητας Ω και r_i είναι οι Rademacher συναρτήσεις στον $E_2^n = \{-1,1\}^n$, τότε*

$$\begin{aligned}\sqrt{2/\pi}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{1/2} &\leq \left(\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{1/2}\\ &\leq C\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\int_\Omega |g_i(\omega)|d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty te^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2/\pi}. \tag{2.5.47}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2/\pi}}\left(\int_{E_2^n}\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)\left(\int_\Omega |g_i(\omega)|d\omega\right)e_i\|^2 d\epsilon\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{\pi/2}\left(\int_{E_2^n}\|\int_\Omega\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)|g_i(\omega)|e_i d\omega\|^2 d\epsilon\right)^{1/2}\\ &\leq \sqrt{\pi/2}\left(\int_{E_2^n}\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)|g_i(\omega)|e_i\|^2 d\omega d\epsilon\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{\pi/2}\left(\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{1/2},\end{aligned}$$

αν πάρουμε υπ' όψιν μας το γεγονός οτι οι g_i στον Ω και οι $r_i|g_i|$ στον $E_2^n \times \Omega$ έχουν την ίδια κατανομή.

Για τη δεύτερη ανισότητα, θέτουμε $h_i = g_i\chi_{\{|g_i|\leq 1\}}$ και $h_i' = g_i\chi_{\{|g_i|>1\}}$. Αρα, $g_i = h_i + h_i'$ και

$$\left(\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{1/2} \leq \left(\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n h_i(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega\|\sum_{i=1}^n h_i'(\omega)e_i\|^2 d\omega\right)^{1/2}. \tag{2.5.48}$$

Ορίζουμε $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}$, με

$$f(t_1,\dots,t_n) = \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) t_i e_i \|^2 d\epsilon \right)^{1/2} . \tag{2.5.49}$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι η f είναι κυρτή, επομένως η μέγιστη τιμή της παίρνεται σε κορυφή του $[-1,1]^n$. Ακόμα, η f είναι άρτια και η τιμή της σε όλες τις κορυφές είναι η ίδια. Αρα,

$$f(t_1,\dots,t_n) \le f(1,\dots,1) = \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i \|^2 d\epsilon \right)^{1/2} . \tag{2.5.50}$$

Λόγω της ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h_i, οι h_i και $r_i h_i$ έχουν την ίδια κατανομή στους Ω και $E_2^n \times \Omega$ αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i(\omega) e_i \|^2 d\omega \right)^{1/2} &= \left(\int_\Omega \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) h_i(\omega) e_i \|^2 d\epsilon \right) d\omega \right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) e_i \|^2 d\epsilon \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε το $\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|^2 d\omega \right)^{1/2}$ παρατηρούμε ότι, λόγω ανεξαρτησίας και συμμετρίας των h_i',

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|_H^2 d\omega \right)^{1/2} &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |h_i'(\omega)|^2 \|e_i\|_H^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |h_i'(\omega)|^2 d\omega \right) \|e_i\|_H^2 \right)^{1/2} . \end{aligned}$$

Θέτουμε $I_1 = \int_\Omega |h_i'(\omega)|^2 d\omega$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{4} t^2 e^{\frac{-t^2}{2}} < t e^{\frac{-t^2}{4}}$ για $t > 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} 4 \int_1^\infty t e^{-\frac{t^2}{4}} dt \\ &= \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{4}}^\infty e^{-s} ds = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/4}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε και, χρησιμοποιώντας την συμμετρία των h_i' και τον κανόνα του παραλληλογράμμου, έχουμε ότι

$$\left(\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n h_i'(\omega) e_i \|_H^2 d\omega \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n I_1 \|e_i\|_H^2 \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_H^2 \right)^{1/2} \\ &= C_1 \left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) e_i \|_H^2 d\epsilon \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. $\square$

Κεφάλαιο 3

Αντιστρεψιμότητα μεγάλων πινάκων

3.1 Περιορισμένη αντιστρεψιμότητα

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το «θεώρημα περιορισμένης αντιστρεψιμότητας» των Bourgain και Tzafriri από το [8].

Θεώρημα 3.1.1 (Bourgain-Tzafriri, 87). *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν ο γραμμικός τελεστής $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ ικανοποιεί την $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i \leq n$, τότε υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με $|\sigma| \geq cn/\|T\|^2$ τέτοιο ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(a_i)_{i\in\sigma}$,*

$$\left\| \sum_{i\in\sigma} a_i T e_i \right\| \geq c \left(\sum_{i\in\sigma} a_i^2 \right)^{1/2} . \tag{3.1.1}$$

Παράδειγμα 3.1.2. Η εκτίμηση για τον πληθάριθμο του σ στο Θεώρημα 3.1.1 είναι βέλτιστη: Ας υποθέσουμε ότι $n = km$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς k και m. Ορίζουμε $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ θέτοντας $T(e_{i+jk}) = e_i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$ και $0 \leq j < m$. Τότε, $\mathrm{rank}(T) = k$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $\|T\| = \sqrt{m}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{rank}(T) = \frac{n}{\|T\|^2}.$$

Παρατηρήστε ότι αν τα $T(e_i)$, $i \in \sigma$ ικανοποιούν την (3.1.1) τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, ο πληθάριθμος του σ δεν μπορεί να ξεπεράσει την $\mathrm{rank}(T)$.

Θυμηθείτε ότι, σαν πρώτο βήμα για το πρόβλημα Kadison–Singer, θα θέλαμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα της παρακάτω μορφής.

Θεώρημα 3.1.3. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιοι ώστε: αν $n \geq n(\varepsilon)$ και αν $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με διαγώνιο $D(S) = 0$, τότε υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με $|\sigma| \geq \delta(\varepsilon)n$ τέτοιο ώστε*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon \|S\|. \tag{3.1.2}$$

Τα δύο θεωρήματα συνδέονται στενά: ας υποθέσουμε ότι έχουμε αποδείξει το Θεώρημα 3.1.3 και ότι μας δίνουν έναν τελεστή $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $D(T) = I$. Γράφουμε τον T στη μορφή $T = I + S$. Αν $n \geq n\big(\frac{\varepsilon}{\|T\|+1}\big)$, τότε από το Θεώρημα 3.1.3 μπορούμε να βρούμε $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με $|\sigma| \geq \delta\big(\frac{\varepsilon}{\|T\|+1}\big)n$ τέτοιο ώστε

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|+1}\|T - I\| \leq \varepsilon. \tag{3.1.3}$$

Έπεται το εξής:

Πόρισμα. *Για κάθε $M > 0$ και $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $d = d(M, \varepsilon) > 0$ τέτοιος ώστε: αν $n \geq 1/d$ και αν $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής νόρμας $\|T\| \leq M$ με $D(T) = I$, τότε υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με $|\sigma| \geq dn$ τέτοιο ώστε*

$$\|(R_\sigma T R_\sigma)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}. \tag{3.1.4}$$

Πράγματι, αρκεί να πάρουμε $d = \min\big\{\delta(\theta), \frac{1}{n(\theta)}\big\}$, όπου $\theta = \frac{\varepsilon}{M+1}$ και να παρατηρήσουμε ότι

$$\|R_\sigma T R_\sigma - I_\sigma\| = \|R_\sigma T R_\sigma - R_\sigma I R_\sigma\| = \|R_\sigma (T - I) R_\sigma\| = \|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να δείξουμε μια έκδοση του Θεωρήματος 3.1.1. Υποθέτουμε ότι ισχύει το Θεώρημα 3.1.3 και θεωρούμε έναν τελεστή $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ που ικανοποιεί την $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i \leq n$. Τότε, ο T^*T ικανοποιεί τις υποθέσεις του Πορίσματος με $M = \|T^*T\| = \|T\|^2$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα με $\varepsilon = 1/2$, βρίσκουμε $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με $|\sigma| \geq \delta\big(\frac{c}{\|T\|^2}\big)n$ τέτοιο ώστε

$$\|(R_\sigma T^* T R_\sigma)^{-1}\| \leq 2. \tag{3.1.6}$$

Τότε, για κάθε επιλογή συντελεστών $(a_i)_{i\in\sigma}$,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i\in\sigma} a_i^2\Big)^{1/2} &= \Big\|\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\Big\|_2 \\ &\leq \|(R_\sigma T R_\sigma)^{-1}\| \,\Big\|(R_\sigma T R_\sigma)\Big(\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\Big)\Big\|_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; 2\left\|(R_\sigma T^*T)\left(\sum_{i\in\sigma} a_i e_i\right)\right\| \\
&\leq \; 2\|T^*\|\left\|\sum_{i\in\sigma} a_i T(e_i)\right\|.
\end{aligned}
$$

Αυτό είναι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.1.1, με πολύ ασθενείς, όμως, εκτιμήσεις: αντί για μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ έχουμε την ποσότητα $2\|T\|$, η δε εκτίμηση του $|\sigma|$ με αυτό τον τρόπο θα ήταν η σωστή μόνο αν πετυχαίναμε να δείξουμε το Θεώρημα 3.1.3 με $\delta(\varepsilon) \geq c\varepsilon$.

Στη συνέχεια δίνουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 (πρώτο βήμα)

Το πρώτο βήμα της απόδειξης βασίζεται σε ένα πιθανοθεωρητικό επιχείρημα επιλογής και ισχυρίζεται ότι αν οι στήλες του πίνακα του T είναι μοναδιαία διανύσματα και, ταυτόχρονα, η νόρμα του T είναι μικρή, τότε αρκετές από τις στήλες είναι «κάθετες μεταξύ τους».

Πρόταση 3.1.4. *Έστω $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ που ικανοποιεί την $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i \leq n$. Υπάρχει $\sigma_1 \subset \{1, \ldots, n\}$ με $|\sigma_1| \geq c_1 n/\|T\|^2$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i \in \sigma_1$,*

$$\left\|P_{\langle Te_j : j\in\sigma_1\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)\right\| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3.1.7}$$

όπου P είναι η ορθογώνια προβολή και $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρειαστούμε ένα Λήμμα για ανεξάρτητες τυχαίες 0-1 μεταβλητές.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ) που παίρνουν τις τιμές 0 ή 1. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}(\xi_i) = \delta \in (0,1)$ για κάθε $i \leq n$. Τότε,*

$$\mu\left(\left\{\omega : \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) < \frac{\delta n}{2}\right\}\right) \leq \exp(-\delta n/10). \tag{3.1.8}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $\psi_i = \xi_i - \delta$ (η ψ_i παίρνει την τιμή $1-\delta$ με πιθανότητα δ και την τιμή $-\delta$ με πιθανότητα $1-\delta$). Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{E}(\psi_i) = 0 \;\text{ και }\; \mathbb{E}(\psi_i^2) = (1-\delta)^2\delta + \delta^2(1-\delta) = \delta(1-\delta). \tag{3.1.9}$$

Για κάθε $t > 0$ γράφουμε

$$\mathbb{E}\left(e^{t\psi_i}\right) \;=\; 1 + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left(\psi_i^2\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=3}^\infty \frac{t^k\psi_i^k}{k!}\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \; 1 + \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\psi_i^2 + \mathbb{E}\left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k\psi_i^2}{k!}\right) \\ &= \; 1 + \frac{t^2\delta(1-\delta)}{2} f(t), \end{aligned}$$

όπου

$$f(t) = 1 + \frac{2}{t^2}\big(e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}\big). \tag{3.1.10}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{t(\xi_1+\cdots+\xi_n-\delta n)}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{t(\psi_1+\cdots+\psi_n)}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{t^2\delta(1-\delta)}{2} f(t)\right)^n \\ &\leq \exp\left(\frac{nt^2\delta(1-\delta)}{2} f(t)\right). \end{aligned}$$

Όμοια,

$$\mathbb{E}\left(e^{-t(\xi_1+\cdots+\xi_n-\delta n)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-t(\psi_1+\cdots+\psi_n)}\right) \leq \exp\left(\frac{nt^2\delta(1-\delta)}{2} f(t)\right). \tag{3.1.11}$$

Έχουμε

$$\mu\left(\left\{\omega : \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) < \frac{\delta n}{2}\right\}\right) = \mu\left(\left\{\omega : \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) - \delta n < -\frac{\delta n}{2}\right\}\right). \tag{3.1.12}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned} \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i < \frac{\delta n}{2}\right) &= \mu\left(e^{-t(\xi_i+\cdots+\xi_n-\delta n)} \geq e^{t\delta n/2}\right) \\ &\leq e^{-t\delta n/2} \exp\left(\frac{nt^2\delta(1-\delta)}{2} f(t)\right). \end{aligned}$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς $t > 0$ την ποσότητα

$$\frac{\delta n}{2}\big(t^2(1-\delta)f(t) - t\big) \tag{3.1.13}$$

παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.4. Σταθεροποιούμε $\delta \in (0,1)$ (το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα) και θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες 0-1 μεταβλητές $\xi_1, \ldots, \xi_n$ με $\mathbb{E}(\xi_i) = \delta$ σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$\sigma(\omega) = \{i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}. \tag{3.1.14}$$

Παρατηρήστε ότι

$$|\sigma(\omega)| = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega). \tag{3.1.15}$$

Από το Λήμμα 3.1.5,

$$\mu\left(\left\{\omega : |\sigma(\omega)| < \frac{\delta n}{2}\right\}\right) \leq \exp(-\delta n/10). \tag{3.1.16}$$

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των ξ_i και τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\neq i\rangle}(Te_i)\big\|^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}\xi_i(\omega))\ \mathbb{E}\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\neq i\rangle}(Te_i)\big\|^2 \\
&= \delta\ \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\neq i\rangle}(Te_i)\big\|^2\right) \\
&\leq \delta\ \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\leq n\rangle}(Te_i)\big\|^2\right) \\
&= \delta\ \mathbb{E}\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\leq n\rangle}T\big\|_{HS}^2 \\
&\leq \delta\|T\|^2\ \mathbb{E}\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\leq n\rangle}\big\|_{HS}^2 \\
&= \delta\|T\|^2\ \mathbb{E}\left[\dim(\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\leq n\rangle)\right] \\
&\leq \delta\|T\|^2\ \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_i(\omega)\right) \\
&= \delta^2 n\|T\|^2.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Markov συμπεραίνουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του 1/2 έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)\big\|P_{\langle \xi_j(\omega)Te_j : j\neq i\rangle}(Te_i)\big\|^2 \leq 2\delta^2 n\|T\|^2. \tag{3.1.17}$$

Συνδυάζοντας με την (3.1.16) βλέπουμε ότι υπάρχει $\omega_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε για το $\sigma_0 := \sigma(\omega_0)$ να έχουμε $|\sigma_0| \geq \delta n/2$ και

$$\sum_{i\in\sigma_0}\big\|P_{\langle Te_j : j\in\sigma_0\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)\big\|^2 \leq 2\delta^2 n\|T\|^2. \tag{3.1.18}$$

Θέτουμε

$$\tau := \{i \in \sigma_0 : \|P_{\langle Te_j : j\in\sigma_0\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)\| > 4\|T\|\sqrt{\delta}\}. \tag{3.1.19}$$

Εφαρμόζοντας ξανά την ανισότητα του Markov — τώρα στην (3.1.18) — βλέπουμε ότι

$$|\tau|(16\delta\|T\|^2) \leq 2\delta^2 n\|T\|^2, \tag{3.1.20}$$

δηλαδή,

$$|\tau| \leq \delta n/8. \tag{3.1.21}$$

Αν λοιπόν θέσουμε $\sigma_1 = \sigma_0 \setminus \tau$, τότε έχουμε $|\sigma_1| \geq 3\delta n/8$ και, για κάθε $i \in \sigma_1$,

$$\|P_{\langle Te_j : j\in\sigma_1\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)\| \leq \|P_{\langle Te_j : j\in\sigma_0\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)\| \leq 4\|T\|\sqrt{\delta}. \tag{3.1.22}$$

Επιλέγοντας $\delta = 1/(32\|T\|^2)$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 (δεύτερο βήμα)

Το δεύτερο βήμα της απόδειξης θα βασιστεί σε ένα συνδυαστικό λήμμα που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Sauer και Shelah.

Λήμμα 3.1.6 (Sauer-Shelah, 71). *Έστω A ένα υποσύνολο του $E_2^n = \{-1,1\}^n$ και έστω $k \in \{1,\dots,n\}$. Αν*

$$|A| > \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}, \tag{3.1.23}$$

τότε υπάρχει $\sigma \subset \{1,\dots,n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| = k$ τέτοιο ώστε $R_\sigma(A) = E_2^\sigma = \{-1,1\}^\sigma$, όπου R_σ είναι ο περιορισμός στις συντεταγμένες του σ.

Απόδειξη. Η απόδειξη που περιγράφουμε υπάρχει στο [5] και γίνεται με επαγωγή στο $n+k$. Θα περιγράψουμε το επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $A \subseteq E_2^n$, και $|A| > \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k}$. Θεωρούμε το σύνολο $A_1 \subseteq E_2^{n-1}$ που σχηματίζεται αν από κάθε στοιχείο του A αφαιρέσουμε τη n-οστή συντεταγμένη του. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $|A_1| > \binom{n-1}{0} + \cdots + \binom{n-1}{k}$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και να βρούμε $\sigma_1 \subseteq \{1,\dots,n-1\}$ με $|\sigma_1| > k$, για το οποίο $R_{\sigma_1}(A_1) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$. Όμως $R_{\sigma_1}(A) = R_{\sigma_1}(A_1)$, άρα το ζητούμενο ισχύει με $\sigma = \sigma_1$.

Αν πάλι $|A_1| \leq \binom{n-1}{0} + \cdots + \binom{n}{k}$, τότε από το τρίγωνο του Pascal έχουμε

$$|A| - |A_1| > \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n-1}{i}. \tag{3.1.24}$$

Τότε, θεωρούμε τα σύνολα

$$B_1 = \{x \in A_1 : (x,1) \in A\}, \quad B_2 = \{x \in A_1 : (x,-1) \in A\} \tag{3.1.25}$$

και την τομή τους

$$C = \{x \in A_1 : (x,1) \in A, (x,-1) \in A\}. \tag{3.1.26}$$

Έχουμε $|B_1| + |B_2| = |A|$ και $|A_1| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|$, άρα

$$|C| = |B_1 \cap B_2| = |A| - |A_1| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}. \tag{3.1.27}$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση και να βρούμε $\sigma_1 \subseteq \{1,\dots,n-1\}$ με $|\sigma_1| > k-1$, τέτοιο ώστε $R_{\sigma_1}(C) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$.

Όμως, $(C \times \{1\}) \cup (C \times \{-1\}) \subseteq A$. Αν λοιπόν θέσουμε $\sigma = \sigma_1 \cup \{n\}$, έχουμε $|\sigma| > k$ και

$$R_\sigma(A) \supseteq R_\sigma((C \times \{1\}) \cup (C \times \{-1\})) = \{-1,1\}^\sigma. \tag{3.1.28}$$

$\square$

Πρόταση 3.1.7. *Έστω $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ που ικανοποιεί την $\|Te_i\|_2 = 1$ για κάθε $i \le n$. Υπάρχει $\sigma_2 \subset \{1,\dots,n\}$ με $|\sigma_2| \ge c_2 n/\|T\|^2$ τέτοιο ώστε, για κάθε επιλογή συντελεστών $(a_i)_{i\in\sigma_2}$,*

$$\Big\| \sum_{i\in\sigma_2} a_i T e_i \Big\| \ge c_2 \frac{\sum_{i\in\sigma_2} |a_i|}{\sqrt{|\sigma_2|}}. \tag{3.1.29}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σ_1 που μας δίνει η Πρόταση 3.1.4. Δηλαδή, έχουμε $|\sigma_1| \ge c_1 n/\|T\|^2$ και για κάθε $i \in \sigma_1$,

$$\big\| P_{\langle Te_j : j\in\sigma_1\setminus\{i\}\rangle}(Te_i) \big\| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.1.30}$$

Για κάθε $i \in \sigma_1$ ορίζουμε $u_i' = Te_i - P_{\langle Te_j : j\in\sigma_1\setminus\{i\}\rangle}(Te_i)$ και $u_i = u_i'/\|u_i'\|$. Τότε, $\|u_i\| = 1$ και εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $i \in \sigma_1$,

$$\langle Te_i, u_i\rangle \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \ \text{ και } \ \langle Te_i, u_j\rangle = 0 \ \text{ αν } \ j \ne i. \tag{3.1.31}$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\mathrm{Ave}\left\{ \Big\| \sum_{j\in\sigma_1} \varepsilon_j u_j \Big\|^2 : \varepsilon_j = \pm 1 \right\} = \sum_{j\in\sigma_1} \|u_j\|^2 = |\sigma_1|. \tag{3.1.32}$$

Από την ανισότητα του Markov, αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$A := \left\{ (\varepsilon_j)_{j\in\sigma_1} \in E_2^{\sigma_1} : \Big\| \sum_{j\in\sigma_1} \varepsilon_j u_j \Big\| \le \sqrt{2|\sigma_1|} \right\}, \tag{3.1.33}$$

έχουμε

$$|A| \geq 2^{|\sigma_1|-1}. \tag{3.1.34}$$

Επομένως, εφαρμόζεται το Λήμμα των Sauer-Shelah με $k \geq |\sigma_1|/2$: υπάρχει $\sigma_2 \subset \sigma_1$ με $|\sigma_2| \geq |\sigma_1|/2 \geq (c_1/2)n/\|T\|^2$ τέτοιο ώστε

$$R_{\sigma_2}(\mathrm{conv}(A)) = \mathrm{conv}\left(\{-1,1\}^{\sigma_2}\right) = [-1,1]^{\sigma_2}. \tag{3.1.35}$$

Από τον ορισμό του A ελέγχουμε εύκολα ότι αν $(t_j)_{j\in\sigma_1} \in \mathrm{conv}(A)$ τότε

$$\Big\| \sum_{j\in\sigma_1} t_j u_j \Big\| \leq \sqrt{2|\sigma_1|} \leq 2\sqrt{|\sigma_2|}. \tag{3.1.36}$$

Για τυχούσα επιλογή πραγματικών αριθμών $(a_i)_{i\in\sigma_2}$, χρησιμοποιώντας την (3.1.31), γράφουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i\in\sigma_2} |a_i| \leq \Big\langle \sum_{i\in\sigma_2} a_i T e_i, \sum_{j\in\sigma_2} \mathrm{sign}(a_j) u_j \Big\rangle. \tag{3.1.37}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\big(\mathrm{sign}(a_j)\big)_{j\in\sigma_2} \in [-1,1]^{\sigma_2} \subset R_{\sigma_2}(\mathrm{conv}(A)). \tag{3.1.38}$$

Άρα, υπάρχει ακολουθία $(t_j)_{j\in\sigma_1} \in \mathrm{conv}(A)$ τέτοια ώστε

$$t_j = \mathrm{sign}(a_j) \ \text{ αν } \ j \in \sigma_2. \tag{3.1.39}$$

Αφού $\langle Te_i, u_j\rangle = 0$ αν $i \in \sigma_2$ και $j \in \sigma_1 \setminus \sigma_2$, έχουμε

$$\Big\langle \sum_{i\in\sigma_2} a_i T e_i, \sum_{j\in\sigma_2} \mathrm{sign}(a_j) u_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i\in\sigma_2} a_i T e_i, \sum_{j\in\sigma_1} t_j u_j \Big\rangle. \tag{3.1.40}$$

Από τις (3.1.37), (3.1.40) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i\in\sigma_2} |a_i| &\leq \Big\langle \sum_{i\in\sigma_2} a_i T e_i, \sum_{j\in\sigma_1} t_j u_j \Big\rangle \\ &\leq \Big\| \sum_{j\in\sigma_1} t_j u_j \Big\| \Big\| \sum_{i\in\sigma_2} a_j T e_j \Big\| \\ &\leq 2\sqrt{|\sigma_2|} \Big\| \sum_{i\in\sigma_2} a_j T e_j \Big\|. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν το ζητούμενο με $c_2 = \frac{\min\{c_1, 1/\sqrt{2}\}}{2}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 (τρίτο βήμα)

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.1.1. Θεωρούμε έναν τελεστή $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $\|Te_i\| = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Θέτουμε $x_i = Te_i$ και θεωρούμε το $\sigma_2 \subset \{1, \dots, n\}$ που μας δίνει η Πρόταση 3.1.7. Τότε, $|\sigma_2| \geq c_2 n/\|T\|^2$ και ο τελεστής $S : X = \langle x_i : i \in \sigma_2 \rangle \to \ell_1^n$ που ορίζεται από τις

$$Sx_i = \frac{e_i}{\sqrt{|\sigma_2|}}, \qquad i \in \sigma_2 \tag{3.1.41}$$

έχει νόρμα $\|S\| \leq 1/c_2$ (αυτό ακριβώς είναι το συμπέρασμα της Πρότασης 3.1.7).

Ο συζυγής τελεστής $S^* : \ell_\infty^n \to X$ είναι 2-αθροίζων και, από το Θεώρημα 2.4.5 και το Πόρισμα 2.4.6, έχουμε

$$\pi_2(S^*) \leq K_G \|S^*\| \leq \frac{K_G}{c_2} \tag{3.1.42}$$

και ο S^* παραγοντοποιείται στη μορφή $S^* = U \circ D$, όπου $U : \ell_2^n \to X$ με $\|U\| \leq \pi_2(S^*)$ και $D : \ell_\infty^n \to \ell_2^n$ είναι διαγώνιος τελεστής με $De_i = \lambda_i e_i$ για κάποιους $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 1$.

Έπεται ότι ο S γράφεται στη μορφή $S = D^* \circ U^*$, όπου $D^* e_i = \lambda_i e_i$. Παρατηρήστε ότι

$$U^*(x_j) = \frac{1}{\lambda_j \sqrt{|\sigma_2|}} e_j, \qquad j \in \sigma_2. \tag{3.1.43}$$

Ορίζουμε

$$\sigma = \{j \in \sigma_2 : |\lambda_j| \leq \sqrt{2/|\sigma_2|}. \tag{3.1.44}$$

Από την $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq 1$ βλέπουμε ότι

$$1 \geq \sum_{j \in \sigma_2 \setminus \sigma} \lambda_j^2 \geq \frac{2|\sigma_2 \setminus \sigma|}{|\sigma_2|}, \tag{3.1.45}$$

άρα

$$|\sigma| \geq \frac{|\sigma_2|}{2} \geq c_3 n/\|T\|^2. \tag{3.1.46}$$

Τέλος, για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(a_i)_{i \in \sigma}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{K_G}{c_2} \left\| \sum_{j \in \sigma} a_j x_j \right\|_2 &\geq \left\| U^* \left(\sum_{j \in \sigma} a_j x_j \right) \right\|_2 = \left(\sum_{j \in \sigma} \left| \frac{a_j}{\lambda_j \sqrt{|\sigma_2|}} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j \in \sigma} a_j^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα. $\square$

3.2 Πίνακες με μηδενική διαγώνιο

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε δύο αποδείξεις του Θεωρήματος 3.1.3:

Θεώρημα 3.2.1 (Θ.3.1.3). *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $\delta(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε: αν $n \geq n(\varepsilon)$ και $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με $D(S) = 0$, τότε υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \delta(\varepsilon)n$ τέτοιο ώστε*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon \|S\|.$$

Αποδεικνύεται ότι η καλύτερη δυνατή εξάρτηση του $\delta(\varepsilon)$ από το ε είναι $\delta(\varepsilon) \simeq \varepsilon^2$. Θα δούμε πρώτα μια απόδειξη που οδηγεί σε ασθενέστερη εξάρτηση, και μετά την απόδειξη των Bourgain-Tzafriri που δίνει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

3.2(α) Πρώτη απόδειξη

Η απόδειξη που δίνουμε εδώ είναι του K. Ball (βλέπε [7]) και δείχνει ότι τα Θεωρήματα 3.1.1 και 3.1.3 είναι «ισοδύναμα» αν δεν μας απασχολεί η βέλτιστη εξάρτηση από το ε. Έχουμε ήδη δείξει ότι το Θεώρημα 3.1.1 προκύπτει από το Θεώρημα 3.2.1. Τώρα θα δείξουμε και το αντίστροφο. Εκτός από το Θεώρημα 3.1.1, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.6.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ ένας $n \times n$ πίνακας που ικανοποιεί τα εξής:*

(i) *$b_{ij} \geq 0$ και $b_{ii} = 0$.*

(ii) *Για κάθε $i \leq n$, $\sum_{j=1}^n b_{ij} \leq M$.*

Τότε, για κάθε $\rho \in (0,1)$ υπάρχει $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq \frac{\rho n}{2M}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $i \in \sigma$,

$$\sum_{j\in\sigma} b_{ij} \leq \rho. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ο πίνακας με στοιχεία $a_{ij} = \langle Se_i, e_j\rangle$.

Θεωρούμε τον πίνακα $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ με $b_{ij} = a_{ij}^2$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \|Se_i\|^2 \leq \|S\|^2. \tag{3.2.2}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.2 με $M = \|S\|^2$ και $\rho = \varepsilon^2/4$: Υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με $|\sigma| \geq \frac{\varepsilon^2 n}{8\|S\|^2}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i \in \sigma$,

$$\|R_\sigma S e_i\|^2 = \sum_{j\in\sigma} a_{ij}^2 = \sum_{j\in\sigma} b_{ij} \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{3.2.3}$$

Ορίζουμε $x_i = \frac{2R_\sigma Se_i}{\varepsilon}$, $i \in \sigma$. Τότε, για κάθε $i \in \sigma$ έχουμε

$$\|x_i\| = \frac{2}{\varepsilon}\|R_\sigma Se_i\| \leq 1 \tag{3.2.4}$$

και, για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$,

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i x_i\right\| = \frac{2}{\varepsilon}\left\|R_\sigma S\left(\sum_{i\in\sigma}\alpha_i e_i\right)\right\| \leq \frac{2\|S\|}{\varepsilon}\left(\sum_{i\in\sigma}\alpha_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.2.5}$$

Ορίζουμε

$$K := \frac{2\|S\|}{\varepsilon} \tag{3.2.6}$$

και θεωρούμε τον πίνακα $C = (c_{ij})_{i,j\in\sigma}$ με

$$c_{ij} := \frac{K^2}{K^2-1}\delta_{ij} - \frac{\langle x_i, x_j\rangle}{K^2-1}. \tag{3.2.7}$$

Υποθέτουμε ότι $K > 2$ και σκοπός μας είναι να «μικρύνουμε» αυτή τη σταθερά περνώντας σε κατάλληλο υποσύνολο του σ. Παρατηρούμε ότι, για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$,

$$\sum_{i,j\in\sigma} c_{ij}\alpha_i\alpha_j = \frac{K^2}{K^2-1}\sum_{i\in\sigma}\alpha_i^2 - \frac{1}{K^2-1}\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i x_i\right\|^2 \geq 0. \tag{3.2.8}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο C είναι θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς, υπάρχουν διανύσματα z_i, $i \in \sigma$ σε κάποιον χώρο Hilbert H ώστε

$$\langle z_i, z_j\rangle = c_{ij}, \qquad i, j \in \sigma. \tag{3.2.9}$$

Από την (3.2.9) βλέπουμε ότι

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i z_i\right\|^2 = \frac{1}{K^2-1}\left(K^2\sum_{i\in\sigma}|\alpha_i^2 - \left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i x_i\right\|^2\right) \tag{3.2.10}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$. Έπεται ότι

$$\|z_i\| \geq 1, \qquad i \in \sigma \tag{3.2.11}$$

και

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i z_i\right| \leq \frac{K}{\sqrt{K^2-1}}\left(\sum_{i\in\sigma}\alpha_i^2\right)^{1/2} \leq 2\left(\sum_{i\in\sigma}\alpha_i^2\right)^{1/2} \tag{3.2.12}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T:\ell_2^\sigma\to H$ με $Te_i=z_i/\|z_i\|_H$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $H=\langle z_i : i\in\sigma\rangle$, δηλαδή $\dim(H)=|\sigma|$. Από τις (3.2.11) και (3.2.12) έχουμε $\|T\|\leq 2$. Παρατηρήστε ότι $\|Te_i\|_H=1$ για κάθε $i\in\sigma$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.1.1 για τον T: υπάρχει $\sigma_1\subset\sigma$ με πληθάριθμο $|\sigma_1|\geq c|\sigma|/4$, τέτοιο ώστε

$$\left\|\sum_{i\in\sigma_1}\alpha_i z_i\right\|^2\geq c\left(\sum_{i\in\sigma_1}\alpha_i^2\right)^{1/2} \tag{3.2.13}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma_1}$. Επιστρέφοντας στην (3.2.8) βλέπουμε ότι

$$\left\|\sum_{i\in\sigma_1}\alpha_i x_i\right\|\leq K_1\left(\sum_{i\in\sigma_1}\alpha_i^2\right)^{1/2} \tag{3.2.14}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma_1}$, όπου

$$K_1=\big(1+(K^2-1)(1-c^2)\big)^{1/2}. \tag{3.2.15}$$

Τώρα, μπορούμε να επαναλάβουμε αυτό το επιχείρημα και να βρούμε $\sigma_2\subset\sigma_1$ με $|\sigma_2|\geq c|\sigma_1|/4$ τέτοιο ώστε

$$\left\|\sum_{i\in\sigma_2}\alpha_i x_i\right\|\leq K_2\left(\sum_{i\in\sigma_2}\alpha_i^2\right)^{1/2} \tag{3.2.16}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma_2}$, όπου

$$K_2=\big(1+(K_1^2-1)(1-c^2)\big)^{1/2}=\big(1+(K^2-1)(1-c^2)^2\big)^{1/2}. \tag{3.2.17}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, και σταματώντας στον μικρότερο s για τον οποίο

$$(K^2-1)(1-c^2)^s\leq 3, \tag{3.2.18}$$

βρίσκουμε $\sigma_s\subset\sigma$ τέτοιο ώστε

$$|\sigma_s|\geq\frac{c^s|\sigma|}{4}\geq\frac{c^s\varepsilon^2 n}{8\cdot 4^s\|S\|^2} \tag{3.2.19}$$

και

$$\left\|\sum_{i\in\sigma_s}\alpha_i x_i\right\|\leq 2\left(\sum_{i\in\sigma_s}\alpha_i^2\right)^{1/2} \tag{3.2.20}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma_s}$. Τότε,

$$\Big\|\sum_{i\in\sigma_s}\alpha_i R_{\sigma_s} S e_i\Big\| \le \varepsilon\left(\sum_{i\in\sigma_s}\alpha_i^2\right)^{1/2}, \tag{3.2.21}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma_s}$, δηλαδή

$$\|R_{\sigma_s} S R_{\sigma_s}\| \le \varepsilon. \tag{3.2.22}$$

Θέτοντας $\varepsilon' = \varepsilon\|S\|$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

3.2(β) Δεύτερη απόδειξη

Η δεύτερη απόδειξη είναι από το [8]. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη ισοδύναμη διατύπωση του Θεωρήματος 3.2.1.

Θεώρημα 3.2.3. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $M > 0$ υπάρχει σταθερά $c = c(\varepsilon, M) > 0$ τέτοια ώστε: αν $n \ge 1/c$ και αν $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με $D(S) = 0$ και $\|S\| \le M$, τότε υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \ge cn$, τέτοιο ώστε*

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \le \varepsilon. \tag{3.2.23}$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις.

Πρόταση 3.2.4. *Υπάρχει σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $1 < r \le 2$, $0 < \delta < 1$ και $\delta^{r'} e^2 \le \gamma \le \delta$ όπου $r' = \frac{r}{r-1}$, μπορούμε να βρούμε φυσικό n_0 τέτοιον ώστε για κάθε $n \ge n_0$ και για κάθε ακολουθία $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ) να έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i\Big\|_m &:= \left(\int_\Omega \Big|\sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i(\omega)\Big|^m d\mu(\omega)\right)^{1/m}\\ &\le A\Big(\frac{m}{\log(\frac{\gamma}{\delta^{r'}})}\Big)^{1/r'}\|c\|_r\end{aligned}$$

για κάθε $c = \sum\limits_{1\le i\le n} c_i e_i \in \ell_r^n$ με $c_i \ge 0$, όπου $m = [\gamma n]$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $P(\xi_i = 1) = \delta$ και $P(\xi_i = 0) = 1 - \delta$. Επίσης, $\xi_i^k = \xi_i$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Σταθεροποιούμε τα r, δ, γ και επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $n^{1/m} \le 2$. Τότε, για κάθε $c = \sum\limits_{1\le i\le n} c_i e_i \in \ell_r^n$ με $\|c\|_r = 1$ και $c_i \ge 0$ έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i\Big\|_m = \left(\int_\Omega \Big|\sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i(\omega)\Big|^m d\mu(\omega)\right)^{1/m}$$

$$= \left(\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n} \int_\Omega c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_m}\xi_{i_1}(\omega)\xi_{i_2}(\omega)\cdots\xi_{i_m}(\omega)d\mu(\omega)\right)^{1/m}$$

$$= \left(\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_m}\int_\Omega \xi_{i_1}(\omega)\xi_{i_2}(\omega)\cdots\xi_{i_m}(\omega)d\mu(\omega)\right)^{1/m}$$

$$= \left(\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_m}\delta^{h(i_1,i_2,\dots i_m)}\right)^{\frac{1}{m}},$$

όπου $h(i_1,\dots i_m)$ είναι το πλήθος των διαφορετικών δεικτών i_j στην m-άδα $(i_1,\dots,i_m)$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder παίρνουμε
(3.2.24)

$$\Big\| \sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i\Big\|_m \le \left[\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n}(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_m})^r\right]^{1/r}\left[\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n}\delta^{r'h(i_1,\dots,i_m)}\right]^{1/r'}.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $\|c\|_r = 1$, συνεπώς

$$\sum_{1\le i_1,i_2\dots,i_m\le n}(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_m})^r = \left(\sum_{1\le i\le n} c_i^r\right)^m = \|c\|_r^{rm} = 1, \tag{3.2.25}$$

άρα η (3.2.24) γράφεται

$$\Big\| \sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i\Big\|_m \le \left[\sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n}\delta^{r'h(i_1,\dots,i_m)}\right]^{1/r'}. \tag{3.2.26}$$

Θεωρούμε μια δεύτερη ακολουθία $\tilde{\xi_i}$ τυχαίων 0-1 μεταβλητών με $\mathbb{E}(\tilde{\xi_i}) = \delta^{r'}$. Τότε, αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για τις $\tilde{\xi_i}$ με $c_i = 1$, μπορούμε να γράψουμε την (3.2.26) στη μορφή

$$\Big\| \sum_{1\le i\le n} c_i\xi_i\Big\|_m \le \Big\| \sum_{1\le i\le n} \tilde{\xi_i}\Big\|_m^{1/r'}. \tag{3.2.27}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\xi_i} = k\right) = \binom{n}{k}\delta^{r'k}(1-\delta^{r'})^{n-k} \tag{3.2.28}$$

για κάθε $k = 0,1,\dots,n$, γράφουμε

$$\Big\| \sum_{1\le i\le n} \tilde{\xi_i}\Big\|_m = \left[\sum_{k=0}^n k^m\binom{n}{k}\delta^{r'k}(1-\delta^{r'})^{n-k}\right]^{1/m} \le \left[\sum_{k=0}^n k^m\binom{n}{k}\delta^{r'k}\right]^{1/m}. \tag{3.2.29}$$

Χρησιμοποιώντας και την

$$\binom{n}{k} \leq \Big(\frac{en}{k}\Big)^k, \tag{3.2.30}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} c_i\xi_i \Big\|_m &\leq \Big[\sum_{k=0}^{n} k^m \Big(\frac{en}{k}\Big)^k \delta^{r'k} \Big]^{1/m} \\ &\leq n^{1/m} \max_{0\leq k\leq n} \Big[k\Big(\frac{en\delta^{r'}}{k}\Big)^{k/m} \Big] \\ &\leq 2 \max_{0\leq k\leq n} \Big[k\Big(\frac{en\delta^{r'}}{k}\Big)^{k/m} \Big]. \end{aligned}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας και την $m = [\gamma n]$ καταλήγουμε στην

$$\Big\| \sum_{1\leq i\leq n} c_i\xi_i \Big\|_m \leq 2m \sup_{x>0} \Big[x\Big(\frac{e\delta^{r'}}{x\gamma}\Big)^x \Big]. \tag{3.2.31}$$

Τώρα, κάνοντας μελέτη της συνάρτησης $f(x) = x\Big(\frac{e\delta^{r'}}{x\gamma}\Big)^x$ παρατηρούμε ότι το supremum πιάνεται σε κάποιο $x = x_0$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{\log(\gamma/\delta^{r'})} \leq x_0 \leq \frac{2}{\log(\gamma/\delta^{r'})}. \tag{3.2.32}$$

Εισάγοντας αυτή την τιμή του x στην (3.2.31) συμπεραίνουμε ότι, για κάποια απόλυτη σταθερά $A \geq 1$,

$$\Big\| \sum_{1\leq i\leq n} c_i\xi_i \Big\|_m \leq \Big\| \sum_{1\leq i\leq n} \tilde{\xi}_i \Big\|_m^{1/r'} \leq A\Big(\frac{m}{\log(\gamma/\delta^{r'})}\Big)^{1/r'}, \tag{3.2.33}$$

όπως ισχυρίζεται η Πρόταση. □

Πρόταση 3.2.5. *Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος πιθανότητας και (Ω', Σ', μ') ένα ανεξάρτητο αντίγραφο του (Ω, Σ, μ). Σταθεροποιούμε $0 < \delta < 1$ και θεωρούμε μια ακολουθία $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Τότε, για κάθε χώρο Banach X και για κάθε διπλή ακολουθία διανυσμάτων $\{x_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ στον X με $x_{ii} = 0$ για $1 \leq i \leq n$, έχουμε*

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{1\leq i,j\leq n} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega) \leq 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \Big\| \sum_{1\leq i,j\leq n} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{ij} \Big\| d\mu'(\omega')d\mu(\omega).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε την πρόταση με την επιπλέον υπόθεση ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ έχουν μέση τιμή 0. Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ που παίρνουν τις τιμές 0 και 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και είναι ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(U, \mathcal{U}, \nu)$. Τότε, για κάθε $1 \leq i \neq j \leq n$ έχουμε ότι

$$\int_U \eta_i(u)(1-\eta_i(u))d\nu(u) = \frac{1}{4}. \tag{3.2.34}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \Big\| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \Big\| \sum_{i,j=1}^n 4\left[\int_U \eta_i(u)(1-\eta_i(u))d\nu(u)\right]\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega) \\ &= 4\int_\Omega \Big\| \sum_{i,j=1}^n \left[\int_U \eta_i(u)(1-\eta_i(u))d\nu(u)\right]\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega) \\ &\leq 4\int_U\int_\Omega \Big\| \sum_{i,j=1}^n \eta_i(u)(1-\eta_i(u))\xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega)d\nu(u). \end{aligned}$$

Για κάθε $u \in U$ θέτουμε

$$\sigma(u) = \{1 \leq i \leq n : \eta_i(u) = 1\}. \tag{3.2.35}$$

Τότε,

$$I \leq 4\int_U\int_\Omega \Big\| \sum_{i\in\sigma(u)} \sum_{j\notin\sigma(u)} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)x_{ij} \Big\| d\mu(\omega)d\nu(u) \tag{3.2.36}$$

Δεδομένου ότι, για κάθε σταθερό $u \in U$ οι ακολουθίες $\{\xi_i\}_{i\in\sigma(u)}$ και $\{\xi_j\}_{j\notin\sigma(u)}$ είναι ανεξάρτητες, παίρνουμε

$$I \leq 4\int_U\int_\Omega\int_{\Omega'} \Big\| \sum_{i\in\sigma(u)} \sum_{j\notin\sigma(u)} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{ij} \Big\| d\mu'(\omega')d\mu(\omega)d\nu(u). \tag{3.2.37}$$

Συνεπώς, υπάρχει $u_0 \in U$ με την ιδιότητα

$$I \leq 4\int_\Omega\int_{\Omega'} \Big\| \sum_{i\in\sigma(u_0)} \sum_{j\notin\sigma(u_0)} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{ij} \Big\| d\mu'(\omega')d\mu(\omega). \tag{3.2.38}$$

Θέτουμε $\sigma = \sigma(u_0)$. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$, παίρνοντας μέση τιμή πρώτα ως προς την υποάλγεβρα της Σ που παράγει το $\{\xi_i(\omega)\}_{i\notin\sigma}$ και μετά ως προς την υποάλγεβρα της Σ' που παράγει το $\{\xi_i(\omega')\}_{i\notin\sigma}$, παίρνουμε

$$J = \int_\Omega \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega')x_{ij} \right\| d\mu'(\omega')d\mu(\omega) \geq I/4. \tag{3.2.39}$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου $\mathbb{E}(\xi_i) = \delta > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} I \;&\leq\; \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \delta)(\xi_j(\omega') - \delta)x_{ij} \right\| \, d\mu'(\omega')\, d\mu(\omega) + \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) \\ &\quad + \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_j(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) + \delta^2 \left\| \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \right\|. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Jensen ελέγχουμε εύκολα ότι καθένας από τους τρεις τελευταίους όρους του δεξιού μέλους φράσσεται από J. Άρα,

$$I \leq \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i(\omega) - \delta)(\xi_j(\omega') - \delta)x_{ij} \right\| \, d\mu'(\omega')\, d\mu(\omega) + 3J. \tag{3.2.40}$$

Αφού $\mathbb{E}(\xi_i(\omega) - \delta) = 0$, το αποτέλεσμα για την περίπτωση $\delta = 0$ σε συνδυασμό με μία ακόμα εφαρμογή της ανισότητας Jensen μας δίνει

$$\begin{aligned} I \;&\leq\; 4\Bigg[J + \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) \\ &\qquad + \delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_j(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) + \delta^2 \left\| \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \right\| \Bigg] + 3J \\ &\leq\; 7J + 4\delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) \\ &\qquad + 4\delta \int_\Omega \left\| \sum_{i,j=1}^{n} \xi_j(\omega)x_{ij} \right\| \, d\mu(\omega) + \delta^2 \left\| \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \right\| \\ &\leq\; 20J. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.2.6. *Υπάρχει σταθερά* $D > 0$ *τέτοια ώστε: για κάθε* $0 < \delta < 1$ *μπορούμε να βρούμε φυσικό* $n(\delta)$ *τέτοιον ώστε, για κάθε* $n \geq n(\delta)$ *και για κάθε γραμμικό τελεστή* $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ *με* $D(S) = 0$*, υπάρχει* $\tau \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *με πληθάριθμο* $|\tau| = m = [\delta n]$ *για το οποίο*

$$\|R_\tau S R_\tau x\|_1 \leq D\|S\| \Big(\frac{m}{\log(1/\delta)}\Big)^{1/2} \|x\|_2 \tag{3.2.41}$$

για κάθε $x \in \ell_2^n$.

Απόδειξη. Έστω $0 < \delta < 1$ και $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $D(S) = 0$. Γράφουμε

$$Se_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.2.42}$$

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ) και θεωρούμε ένα ανεξάρτητο αντίγραφο (Ω', Σ', μ') του (Ω, Σ, μ).

Για κάθε γραμμικό τελεστή $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμφωνούμε να γράφουμε

$$|||W||| = \sup \left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} \|Wx\|_1 : x \in \ell_2^n, \, \|x\|_2 \leq 1 \right\}. \tag{3.2.43}$$

Τότε, αν θεωρήσουμε τον W σαν τελεστή από τον ℓ_2^n στον ℓ_2^n, έχουμε

$$|||W||| \leq \frac{2}{\sqrt{\delta}} \|W\|. \tag{3.2.44}$$

Αφού $D(S) = 0$, έχουμε $a_{ii} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$\tau(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}. \tag{3.2.45}$$

Από την Πρόταση 3.2.5 έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \Big|\Big|\Big| \sum_{i,j=1}^n \xi_i(\omega)\xi_j(\omega) a_{ij} e_i \otimes e_j \Big|\Big|\Big| \, d\mu(\omega) \\ &\leq 20 \int_{\Omega'} \int_\Omega \Big|\Big|\Big| \sum_{i \in \tau(\omega)} \sum_{j=1}^n \xi_j(\omega') a_{ij} e_i \otimes e_j \Big|\Big|\Big| \, d\mu(\omega) d\mu(\omega'). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.5 έχουμε

$$|\tau(\omega)| \leq 2\delta n \tag{3.2.46}$$

για όλα τα ω σε ένα $\overline{\Omega} \subseteq \Omega$ μέτρου μεγαλύτερου από $1 - \exp(-\delta n/10)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I &\leq 20 \int_{\Omega'} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}} \left|\left|\left| \sum_{i \in \tau(\omega)} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega') a_{ij} e_i \otimes e_j \right|\right|\right| d\mu(\omega) d\mu(\omega') + \frac{40}{\sqrt{\delta}} \|S\| e^{-\delta n/10} \\ &\leq 40 \sup\{I(\tau) : |\tau| = m\} + \frac{40}{\sqrt{\delta}} \|S\| e^{-\delta n/10}, \end{aligned}$$

όπου

$$I(\tau) = \int_{\Omega} \left|\left|\left| \sum_{i \in \tau} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) a_{ij} e_i \otimes e_j \right|\right|\right| d\mu(\omega). \tag{3.2.47}$$

Σταθεροποιούμε ένα υποσύνολο τ του $\{1, \ldots, n\}$ με $|\tau| = m$ και θεωρούμε ένα $\frac{1}{2}$-δίκτυο $\mathcal{F}(\tau)$ της μοναδιαίας μπάλας του $R_\tau \ell_2^n$ με πληθάριθμο

$$|\mathcal{F}(\tau)| \leq 4^m. \tag{3.2.48}$$

Ένα απλό επιχείρημα διαδοχικών προσεγγίσεων δείχνει ότι κάθε x στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του $R_\tau \ell_2^n$ γράφεται σαν άθροισμα $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ με τα $x_k \in \mathcal{F}(\tau)$ και τους $\lambda_k \geq 0$ να ικανοποιούν την $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leq 2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} I(\tau) &\leq \frac{2}{\sqrt{m}} \int_{\Omega} \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i \in \tau} a_{ij} b_i \right| \xi_j(\omega) : x = \sum_{i \in \tau} b_i e_i \in \mathcal{F}(\tau) \right\} d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{m}} \int_{\Omega} \left(\sum_{x = \sum_{i \in \tau} b_i e_i \in \mathcal{F}(\tau)} \left| \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i \in \tau} a_{ij} b_i \right| \xi_j(\omega) \right|^m \right)^{1/m} d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{m}} |\mathcal{F}(\tau)|^{1/m} \max \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i \in \tau} a_{ij} b_i \right| \xi_j \right\|_m : x = \sum_{i \in \tau} b_i e_i \in \mathcal{F}(\tau) \right\} \\ &\leq \frac{8\|S\|}{\sqrt{m}} \max \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j \xi_j \right\|_m : c = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \in \ell_2^n, \ \|c\|_2 \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 3.2.4, με $\gamma = \delta$ και $r = 2$, παίρνουμε

$$I(\tau) \leq \frac{D_0 \|S\|}{\sqrt{\log(1/\delta)}} \tag{3.2.49}$$

για κάποια σταθερά D_0 ανεξάρτητη του n. Συνεπώς,

$$I \leq \frac{40 D_0 \|S\|}{\sqrt{\log(1/\delta)}} + \frac{40\|S\|}{\sqrt{\delta}} e^{-\delta n/10}. \tag{3.2.50}$$

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\omega_0 \in \{\omega \in \Omega : m \leq \sum_{i=1}^n \xi_i(\omega) \leq 3\delta n/2\}$ με την ιδιότητα

$$\left|\left|\left| \sum_{i,j\in\tau(\omega_0)} a_{ij} e_i \otimes e_j \right|\right|\right| \leq \frac{41 D_0 \|S\|}{\sqrt{\log(1/\delta)}}, \tag{3.2.51}$$

αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ικανοποιείται η

$$e^{-\delta n/10} \leq \frac{D_0}{40}\left(\frac{\delta}{\log(1/\delta)}\right)^{1/2}. \tag{3.2.52}$$

Αφού $m \leq |\tau(\omega_0)| \leq 3\delta n/2$, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να πάρουμε σαν τ οποιοδήποτε υποσύνολο του $\tau(\omega_0)$ που να έχει m στοιχεία. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3. Από την Πρόταση 3.2.6 υπάρχει $D > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < 1$ να μπορούμε να βρούμε υποσύνολο $\tau \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με πληθάριθμο $|\tau| = m = [\delta n]$ ώστε για τον $W = R_\tau S R_\tau : \ell_2^n \to \ell_1^n$ να έχουμε

$$\|W\| \leq D\|S\|\Big(\frac{m}{\log\frac{1}{\delta}}\Big)^{1/2}. \tag{3.2.53}$$

Θεωρούμε τον συζυγή τελεστή $W^* : \ell_\infty^n \to \ell_2^n$. Ο W^* είναι 2-αθροίζων και

$$\pi_2(W^*) \leq K_G\|W^*\| = K_G\|W\| \leq K_G D\|S\|\Big(\frac{m}{\log\frac{1}{\delta}}\Big)^{1/2}. \tag{3.2.54}$$

Συνεπώς, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον W^* στη μορφή $W^* = U \circ V$, όπου $U : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $\|U\| = 1$ και $V : \ell_\infty^n \to \ell_2^n$ με $Ve_i = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$, όπου $\lambda_i = 0$ αν $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \sigma_2$ και

$$\sum_{i\in\sigma_2} \lambda_i^2 \leq (K_G D\|S\|)^2 m/\log(1/\delta). \tag{3.2.55}$$

Περνώντας στον W, έχουμε $W = V^* \circ U^*$, όπου $V^* e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Θέτουμε

$$\sigma = \{i \leq n : |\lambda_i| \leq 2K_G D\|S\|/\sqrt{\log(1/\delta)}\}. \tag{3.2.56}$$

Από την (3.2.55), εφαρμόζοντας την ανισότητα του Markov, παίρνουμε

$$|\sigma| \geq \big(1 - \frac{\delta}{4}\big)n. \tag{3.2.57}$$

Για κάθε $x \in \ell_2^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|R_\sigma S R_\sigma x\|_2 &= \|R_\sigma W R_\sigma x\|_2 = \|R_\sigma V^* U^* R_\sigma x\|_2 \\ &\leq \left(\max_{i\in\sigma} |\lambda_i|\right) \|U^* R_\sigma x\|_2 \leq 2K_G D\|S\| \cdot \|x\|_2/\sqrt{\log(1/\delta)}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq 2K_G D\|S\|/\sqrt{\log(1/\delta)} \leq 2K_G DM/\sqrt{\log(1/\delta)}. \tag{3.2.58}$$

Για δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \delta(\varepsilon, M) \in (0,1)$ αρκετά μικρό ώστε

$$2K_G DM/\sqrt{\log(1/\delta)} < \varepsilon. \tag{3.2.59}$$

Τότε, $\|R_\sigma S R_\sigma\| < \varepsilon$. □

Κεφάλαιο 4

Μερική απάντηση στο πρόβλημα Kadison–Singer

4.1 Πίνακες με μηδενική διαγώνιο: βελτιωμένες εκτιμήσεις

Σε αυτή την Παράγραφο, δίνουμε νέα απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3 με βελτιωμένες εκτιμήσεις για το μέγεθος του υποπίνακα στον οποίο επιτυγχάνεται δεδομένη μείωση της νόρμας. Γενικότερα, αποδεικνύουμε ότι αν περιορίσουμε τόσο το πεδίο ορισμού όσο και το πεδίο τιμών σε ένα σύνολο «μεγάλου μέτρου», τότε η νόρμα ενός $n \times n$ πίνακα με μηδενική διαγώνιο μειώνεται κατά ένα σταθερό παράγοντα. Το Θεώρημα που ακολουθεί είναι από το δεύτερο άρθρο των Bourgain και Tzafriri [9] και δίνει βέλτιστες εκτιμήσεις.

Θεώρημα 4.1.1. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει το εξής: Έστω $0 < \delta < 1$ και $n \geq \frac{1}{c}$, και έστω $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής με $D(S) = 0$. Για κάθε ακολουθία $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ μη αρνητικών αριθμών με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, υπάρχει υποσύνολο σ του $\{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο*

$$\sum_{i\in\sigma} \lambda_i \geq c\delta \tag{4.1.1}$$

και

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \sqrt{\delta}\|S\|. \tag{4.1.2}$$

Επιλέγοντας $\lambda_i = \frac{1}{n}$ για $1 \leq i \leq n$, μπορούμε να δώσουμε μια ισχυρότερη έκδοση του Θεωρήματος 3.1.3:

Θεώρημα 4.1.2. *Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq \frac{1}{c}$, αν $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με $D(S) = 0$, τότε υπάρχει*

$\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$ *με πληθάριθμο*

$$|\sigma| \geq c\varepsilon^2 n \tag{4.1.3}$$

τέτοιο ώστε

$$\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \varepsilon \|S\|. \tag{4.1.4}$$

Ομοίως, μπορούμε να πάρουμε μια άλλη διατύπωση του Πορίσματος του Θεωρήματος 3.1.3:

Πόρισμα 4.1.3. *Υπάρχει σταθερά $d > 0$ ώστε να ισχύει το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1/d$, αν $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με $D(T) = I$, τότε υπάρχει $\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ με πληθάριθμο*

$$|\sigma| \geq d\varepsilon^2 n / \|T\|^2 \tag{4.1.5}$$

τέτοιο ώστε

$$\|(R_\sigma T R_\sigma)^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon. \tag{4.1.6}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά Λήμματα.

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $\{g_i\}_{i=1}^n$ ακολουθία ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή 0 στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Υποθέτουμε ότι οι g_i έχουν νόρμα 1 στον $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$. Τότε, για κάθε $E \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, έχουμε ότι*

$$\int_\Omega \sup_{x \in E} \Big| \sum_{i=1}^n |x_i| g_i(\omega) \Big|^2 d\mu(\omega) \leq 8 \int_\Omega \sup_{x \in E} \Big| \sum_{i=1}^n x_i g_i(\omega) \Big|^2 d\mu(\omega). \tag{4.1.7}$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν, για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ και για κάθε $\omega \in \Omega$, θέτουμε

$$X_x(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(\omega)$$

και

$$Y_x(\omega) = \sum_{i=1}^n |x_i| g_i(\omega).$$

Παρατηρούμε ότι οι X_x, Y_x είναι συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές. Με αυτό το συμβολισμό, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_\Omega \sup_{x \in E} \Big| Y_x(\omega) \Big|^2 d\mu(\omega) \leq 8 \int_\Omega \sup_{x \in E} \Big| X_x(\omega) \Big|^2 d\mu(\omega). \tag{4.1.8}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} t_i g_i\Big\|_{L_2(\Omega,\Sigma,\mu)} = \|t\|_2$$

για κάθε $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή ο υπόχωρος του $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ ο οποίος παράγεται από την ακολουθία $\{g_i\}_{i=1}^n$ είναι ισομετρικός με τον ℓ_2^n. Από την ανισότητα $\big||x_i| - |x_i'|\big| \leq |x_i - x_i'|$ έχουμε

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \big||x_i| - |x_i'|\big|^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'|^2\Big)^{1/2}. \tag{4.1.9}$$

Συνεπώς, για κάθε $x, x' \in E$,

$$\|Y_x - Y_{x'}\|_{L_2} \leq \|X_x - X_{x'}\|_{L_2}. \tag{4.1.10}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Slepian, παίρνουμε

$$\int_\Omega \Big|\sup_{x,x'\in E} \big(Y_x(\omega) - Y_{x'}(\omega)\big)\Big|^2 d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \Big|\sup_{x,x'\in E} \big(X_x(\omega) - X_{x'}(\omega)\big)\Big|^2 d\mu(\omega). \tag{4.1.11}$$

Κάνοντας απλές πράξεις στο δεξιό μέλος της σχέσης (4.1.11) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big|\sup_{x,x'\in E} \big(X_x(\omega) - X_{x'}(\omega)\big)\Big|^2 d\mu(\omega) &\leq \int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} X_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega) \\ &\quad + \int_\Omega \Big|\sup_{x'\in E} X_{x'}(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega) \\ &\quad + 2\int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} X_x(\omega)\Big| \Big|\sup_{x'\in E} X_{x'}(\omega)\Big| d\mu(\omega) \\ &\leq 4\int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} X_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega).\end{aligned}$$

Επίσης, από το γεγονός ότι οι $(Y_x)_{x\in E}$ είναι συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu\Big(\sup_{x\in E} |Y_x|^2 > \rho^2\Big) &= \mu\Big(\Big\{\sup_{x\in E}(Y_x) > \rho\Big\} \cup \Big\{\sup_{x\in E}(-Y_x) > \rho\Big\}\Big) \\ &= 2\mu\Big(\Big\{\sup_{x\in E}(Y_x) > \rho\Big\}\Big) \\ &\leq 2\mu\Big(\Big|\sup_{x\in E} Y_x\Big|^2 > \rho^2\Big),\end{aligned}$$

για κάθε $\rho > 0$. Έπεται ότι

$$\int_\Omega \sup_{x\in E} \Big|Y_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega) \leq 2\int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} Y_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega). \tag{4.1.12}$$

Αν θέσουμε $x_1 = 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sup_{x\in E} \Big|Y_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega) &\leq 2\int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} \Big(Y_x(\omega) - Y_{x_1}(\omega)\Big)\Big|^2 d\mu(\omega) \\
&\leq 2\int_\Omega \Big|\sup_{x,x'\in E} \Big(Y_x(\omega) - Y_{x'}(\omega)\Big)\Big|^2 d\mu(\omega) \\
&\leq 2\Big(4\int_\Omega \Big|\sup_{x\in E} X_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega)\Big) \\
&= 8\int_\Omega \sup_{x\in E} \Big|X_x(\omega)\Big|^2 d\mu(\omega).
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (4.1.8). □

Πρόταση 4.1.5. *Υπάρχει σταθερά $D > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \geq D$ και $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής με $D(S) = 0$, τότε για κάθε ακολουθία $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ μη αρνητικών αριθμών με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ και για κάθε $0 < \tau < 1$ υπάρχει υποσύνολο η του $\{1, 2\ldots, n\}$ ώστε*

$$\sum_{i\in\eta} \lambda_i \geq \frac{\tau}{2} \tag{4.1.13}$$

και

$$\|R_\eta S R_\eta\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \leq D\|S\|\sqrt{\tau}\Big(\sum_{i\in\eta} \lambda_i\Big)^{1/2}, \tag{4.1.14}$$

όπου $L_1^n(\sqrt{\lambda})$ είναι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|x\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} = \sum_{i=1}^n |x_i|\sqrt{\lambda_i}. \tag{4.1.15}$$

Απόδειξη. Έστω $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ), που έχουν μέση τιμή τ. Θεωρούμε ένα ανεξάρτητο αντίγραφο (Ω', Σ', μ') του (Ω, Σ, μ) και μια ακολουθία $\{\xi_i'\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που έχει την ίδια από κοινού κατανομή με την $\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$\sigma(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\} \tag{4.1.16}$$

και

$$\sigma(\omega') = \{1 \leq i \leq n : \xi_i'(\omega') = 1\}. \tag{4.1.17}$$

Έστω $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής με νόρμα $\|S\| = 1$. Γράφουμε $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ για τον πίνακα που ορίζεται από την $S(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$, $j = 1, \ldots, n$. Υποθέτουμε επίσης ότι ο S έχει μηδενική διαγώνιο, δηλαδή, $a_{ii} = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.5 γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} S R_{\sigma(\omega)}\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \Big\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} \xi_j(\omega)\xi_i(\omega) a_{ij} e_i \otimes e_j \Big\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} d\mu(\omega) \\ &\leq 20 \int_\Omega \int_{\Omega'} \Big\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} \xi_j(\omega)\xi_i'(\omega') a_{ij} e_i \otimes e_j \Big\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} d\mu'(\omega') d\mu(\omega) \\ &\leq 20 \int_{\Omega'} \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} S R_{\sigma(\omega')}\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \, d\mu(\omega) \, d\mu'(\omega'). \end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε $\omega' \in \Omega'$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} J(\omega') &= \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} S R_{\sigma(\omega')}\|_{\ell_2^n \to L_1^n(\sqrt{\lambda})} d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \|R_{\sigma(\omega)} S R_{\sigma(\omega')}(x)\|_{L_1^n(\sqrt{\lambda})} d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|R_{\sigma(\omega)} S R_{\sigma(\omega')}(x)\|_{L_1^n(\sqrt{\lambda})} = \sum_{j \in \sigma(\omega)} \xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i \in \sigma(\omega')} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big|, \tag{4.1.18}$$

άρα,

$$J(\omega') = \int_\Omega \sup_{\|x\| \leq 1} \Big\{ \sum_{j \in \sigma(\omega)} \xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i \in \sigma(\omega')} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega). \tag{4.1.19}$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned} J(\omega') &= \int_\Omega \sup_{\|x\| \leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^n \Big(\xi_j(\omega) - \tau + \tau \Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^n \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\ &\leq \int_\Omega \sup_{\|x\| \leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^n \Big(\xi_j(\omega) - \tau \Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^n \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\ &\quad + \int_\Omega \sup_{\|x\| \leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^n \tau \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^n \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\xi_j(\omega) - \tau\Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega)$$
$$+\tau \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega).$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz στο δεύτερο ολοκλήρωμα και παίρνοντας υπ' όψιν την υπόθεση ότι $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
J(\omega') &\leq \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\xi_j(\omega) - \tau\Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\
&\quad +\tau \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big|^2 \Big)^{1/2} \Big\} d\mu(\omega) \\
&= \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\xi_j(\omega) - \tau\Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\
&\quad +\tau \sup_{\|x\|\leq 1} \Big(\sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big|^2 \Big)^{1/2} \Big\} \\
&= \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\xi_j(\omega) - \tau\Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\
&\quad +\tau \sup_{\|x\|\leq 1} \|SR_{\sigma(\omega')}(x)\| \\
&\leq \int_{\Omega} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \Big(\xi_j(\omega) - \tau\Big) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} d\mu(\omega) \\
&\quad +\tau \|S\|.
\end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι οι $\xi_j - \tau$ έχουν μέση τιμή 0, εισάγοντας τις συναρτήσεις Rademacher ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο $[0,1]$, βλέπουμε ότι

$$J(\omega') \leq \tau + 2 \int_{\Omega} \int_{0}^{1} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} r_j(t) \xi_j(\omega) \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big\} dt \, d\mu(\omega), \tag{4.1.20}$$

χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι $\|S\| = 1$.

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega'', \Sigma'', \mu'')$. Από το θεώρημα σύγκρισης Rademacher–κανονικών μέσων και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε

$$J(\omega') \leq \sqrt{2\pi} \Big(\int_{\Omega} \int_{\Omega''} \sup_{\|x\|\leq 1} \Big\{ \Big| \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\omega) g_j(\omega'') \sqrt{\lambda_j} \Big| \sum_{i=1}^{n} \xi_i'(\omega') x_i a_{ij} \Big| \Big|^2 d\mu(\omega'') d\mu(\omega) \Big\} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\tau.$$

Ορίζουμε

$$E=\left\{\Big\{\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}\Big(\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\Big)\Big\}_{j=1}^n:\sum_{i=1}^n|x_i|^2\le 1\right\}. \tag{4.1.21}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1.4 γι' αυτό το E – με τα $\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}\Big(\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\Big)$ στο ρόλο των x_j – έχουμε

$$\int_\Omega\sup_E\Big|\sum_{j=1}^n\Big|\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}\Big(\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\Big)\Big|g_j(\omega)\Big|^2d\mu(\omega)$$

$$\le 8\int_\Omega\sup_E\Big|\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}\Big(\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\Big)g_j(\omega)\Big|^2d\mu(\omega). \tag{4.1.22}$$

Έπεται ότι
(4.1.23)

$$J(\omega')\le\sqrt{2\pi}\left(8\int_\Omega\int_{\Omega''}\sup_{\|x\|\le1}\left\{\left|\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)g_j(\omega'')\sqrt{\lambda_j}\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\right|^2d\mu''(\omega'')d\mu(\omega)\right\}\right)^{1/2}+\tau.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)g_j(\omega'')\sqrt{\lambda_j}\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_ia_{ij}\right|^2 &= \left|\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')x_i\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)g_j(\omega'')\sqrt{\lambda_j}a_{ij}\right|^2\\ &\le \sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')\left|\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)g_j(\omega'')\sqrt{\lambda_j}a_{ij}\right|^2\end{aligned}$$

αν $\sum_{i=1}^n x_i^2\le 1$, χρησιμοποιώντας και την $\big(\xi_j(\omega)\big)^2=\xi_j(\omega)$. Άρα,

$$\begin{aligned}J(\omega') &\le \tau+4\sqrt{\pi}\left(\int_\Omega\int_{\Omega''}\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')\left|\sum_{j=1}^n g_j(\omega'')\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}a_{ij}\right|^2d\mu''(\omega'')d\mu(\omega)\right)^{1/2}\\ &= \tau+4\sqrt{\pi}\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\xi_i'(\omega')\sum_{j=1}^n\xi_j(\omega)\lambda_j|a_{ij}|^2d\mu(\omega)\right)^{1/2}\\ &= \tau+4\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}\left(\sum_{i,j=1}^n\xi_i'(\omega')\lambda_j|a_{ij}|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\int_{\Omega''}\left|\sum_{j=1}^{n} g_j(\omega'')\xi_j(\omega)\sqrt{\lambda_j}a_{ij}\right|^2 d\mu''(\omega'') = \sum_{j=1}^{n}\xi_j(\omega)\lambda_j|a_{ij}|^2. \tag{4.1.24}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, ολοκληρώνουμε την $J(\omega')$ ως προς ω':

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}SR_{\sigma(\omega)}\|_{\ell_2^n\to L_1^n(\sqrt{\lambda})}d\mu(\omega) \\ &\leq 20\int_{\Omega'} J(\omega')\,d\mu'(\omega') \\ &\leq 20\int_{\Omega'}\left(\tau+4\sqrt{\pi\tau}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i'(\omega')\Big\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|a_{ij}|^2\Big\}\right)^{1/2}\right)d\mu'(\omega') \\ &\leq 20\left(\tau+4\sqrt{\pi\tau}\left(\int_{\Omega'}\sum_{i=1}^{n}\xi_i'(\omega')\Big\{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|a_{ij}|^2\Big\}d\mu'(\omega')\right)^{1/2}\right) \\ &= 20\tau\left(1+4\sqrt{\pi}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_j|a_{ij}|^2\right)^{1/2}\right). \end{aligned}$$

Αφού $\|S\| = 1$, έχουμε $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leq 1$ για κάθε $j = 1,\dots,n$. Χρησιμοποιώντας και την $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$, παίρνουμε

$$1+4\sqrt{\pi}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_j|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \leq 1+4\sqrt{\pi} \leq 10. \tag{4.1.25}$$

Συνεπώς,

$$\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}SR_{\sigma(\omega)}\|_{\ell_2^n\to L_1^n(\sqrt{\lambda})}d\mu(\omega) \leq 200\tau. \tag{4.1.26}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i(\omega)d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_\Omega\xi_i(\omega)d\mu(\omega) = \tau\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \tau. \tag{4.1.27}$$

Επομένως, υπάρχει $\omega_0 \in \Omega$ ώστε, για το $\sigma(\omega_0)$ να έχουμε

$$\sum_{i\in\sigma(\omega_0)}\lambda_i \geq \frac{\tau}{2} \tag{4.1.28}$$

και

$$\|R_{\sigma(\omega_0)}SR_{\sigma(\omega_0)}\|_{\ell_2^n\to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \leq 200\tau \leq 200\sqrt{2\tau}\Big(\sum_{i\in\sigma(\omega_0)}\lambda_i\Big)^{1/2}. \tag{4.1.29}$$

Αν θέσουμε $D = 200\sqrt{2}$ και $\eta = \sigma(\omega_0)$, έχουμε

$$\|R_\eta SR_\eta\|_{\ell_2^n\to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \leq D\|S\|\Big(\sum_{i\in\eta}\lambda_i\Big)^{1/2}\sqrt{\tau} \tag{4.1.30}$$

αφού είχαμε υποθέσει ότι $\|S\| = 1$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Θεωρούμε τη σταθερά D της Πρότασης 4.1.5, σταθεροποιούμε $n \geq D$ και θεωρούμε $S : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $D(S) = 0$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.1.5 με $\tau = \delta/4D^2$ βρίσκουμε $\eta \subset \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{i\in\eta}\lambda_i \geq \frac{\delta}{8D^2} \tag{4.1.31}$$

και

$$\|R_\eta SR_\eta\|_{\ell_2^n\to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \leq \frac{\|S\|\sqrt{\delta}}{2}\left(\sum_{i\in\eta}\lambda_i\right)^{1/2}. \tag{4.1.32}$$

Με τη συνήθη διαδικασία, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον $R_\eta SR_\eta$ στη μορφή $R_\eta SR_\eta = V \circ U$, όπου $U : \ell_2^n \to \ell_2^\eta$ τελεστής με

$$\|U\|_{\ell_2^n\to\ell_2^\eta} \leq \sqrt{\delta}\|S\| \tag{4.1.33}$$

και $V : \ell_2^\eta \to L_1^n(\sqrt{\lambda})$ διαγώνιος τελεστής με $Ve_i = t_ie_i$, $i \in \eta$ και

$$\|V\|_{\ell_2^\eta\to L_1^n(\sqrt{\lambda})} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in\eta}\lambda_i\right)^{1/2}. \tag{4.1.34}$$

Παρατηρώντας ότι

$$\|V\|_{\ell_2^\eta\to L_1^n(\sqrt{\lambda})} = \left(\sum_{i\in\eta}t_i^2\lambda_i\right)^{1/2}, \tag{4.1.35}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov, βλέπουμε ότι το

$$\sigma = \{i \in \eta : |t_i| \leq 1\} \tag{4.1.36}$$

ικανοποιεί την

$$\sum_{i\in\sigma}\lambda_i \geq \frac{3}{4}\sum_{i\in\eta}\lambda_i \geq \frac{3\delta}{32D^2}. \tag{4.1.37}$$

Τέλος, από την $|t_i| \leq 1$, $i \in \sigma$, έχουμε $\|R_\sigma V\| \leq 1$. Συνεπώς, για κάθε $x \in \ell_2^n$ έχουμε

$$\|R_\sigma S R_\sigma x\| = \|R_\sigma V U R_\sigma x\| \leq \|U R_\sigma x\|_{\ell_2^n} \leq \sqrt{\delta}\|S\|\,\|x\|, \tag{4.1.38}$$

δηλαδή $\|R_\sigma S R_\sigma\| \leq \sqrt{\delta}\|S\|$. □

4.2 Διαμερίσεις και το πρόβλημα Kadison–Singer

Έστω $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ τελεστής νόρμας 1 με μηδενική διαγώνιο. Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μεγάλων υποσυνόλων σ του $\{1,\dots,n\}$ με την ιδιότητα ο $R_\sigma T R_\sigma$ να έχει οσοδήποτε μικρή νόρμα. Σε αυτή την παράγραφο προσπαθούμε να βρούμε διαμερίσεις του $\{1,\dots,n\}$, μικρού μήκους, ώστε το παραπάνω να ισχύει για κάθε σύνολο της διαμέρισης. Όλα τα αποτελέσματα αυτής της Παραγράφου προέρχονται από το δεύτερο άρθρο των Bourgain και Tzafriri [9].

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω T ένας $n \times n$ πίνακας με μηδενική διαγώνιο. Έστω $0 < \delta < 1$, $\varepsilon > 0$ και $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ), οι οποίες έχουν μέση τιμή δ. Υποθέτουμε ότι*

$$\Big(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \leq \varepsilon, \tag{4.2.1}$$

όπου $d = \log n$ και, για κάθε $\omega \in \Omega$, $\sigma(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}$. Τότε, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\{\sigma_j\}_{j=0}^m$ του $\{1, 2..., n\}$ σε $m+1$ ξένα ανά δύο υποσύνολα όπου $m = [1/\delta]$, ώστε

$$\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\| \leq 3\varepsilon \tag{4.2.2}$$

για κάθε $j = 0, 1, \dots, m$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ανεξάρτητα αντίγραφα $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$, $0 \leq j < m$, του (Ω, Σ, μ) και, για κάθε j, ανεξάρτητες τυχαίες 0-1 μεταβλητές ϕ_i^j, $i = 1, \dots, n$ με μέση τιμή $\frac{\delta}{1-j\delta}$ στον $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$.

Θεωρούμε τον $\Omega' = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{m-1}$ με το μέτρο πιθανότητας $\mu' = \mu_0 \otimes \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{m-1}$ και γράφουμε $\omega' = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{m-1})$ για τα σημεία του Ω'. Για κάθε $1 \leq i \leq n$ ορίζουμε

$$\xi_i^0(\omega') = \phi_i^0(\omega_0) \tag{4.2.3}$$

και

$$\xi_i^j(\omega') = \phi_i^j(\omega_j) \prod_{l=0}^{j-1} \Big(1 - \phi_i^l(\omega_l)\Big) \tag{4.2.4}$$

για $j = 1, 2, ..., m-1$. Τέλος, ορίζουμε

$$\xi_i^m(\omega') = \prod_{l=0}^{m-1} (1 - \phi_i^l(\omega_l)), \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{4.2.5}$$

Παρατηρήστε ότι η μέση τιμή της ξ_i^0 είναι ίση με δ, και, λόγω της ανεξαρτησίας των $\{\phi_i^j\}_{i=1}^n$ η μέση τιμή της ξ_i^j είναι ίση με το γινόμενο των αντίστοιχων μέσων τιμών, δηλαδή

$$\mathbb{E}(\xi_i^j) = \frac{\delta}{1 - j\delta} \prod_{l=0}^{j-1} \frac{1 - (l+1)\delta}{1 - l\delta} = \delta. \tag{4.2.6}$$

Η μέση τιμή της ξ_i^m είναι ίση με $1 - m\delta$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\sum_{j=0}^{m} \xi_i^j(\omega') = 1 \tag{4.2.7}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $\omega' \in \Omega$. Πράγματι, αντικαθιστώντας τους ορισμούς των $\{\xi_i^j\}_{i=1}^n$ ελέγχουμε (για παράδειγμα, με επαγωγή) ότι

$$1 - \sum_{j=0}^{s-1} \xi_i^j(\omega') = \prod_{l=0}^{s-1} (1 - \phi_i^l(\omega_l)), \tag{4.2.8}$$

άρα

$$1 - \sum_{j=0}^{m-1} \xi_i^j(\omega') = \prod_{l=0}^{m-1} (1 - \phi_i^l(\omega_l)) = \xi_i^m(\omega'). \tag{4.2.9}$$

Για κάθε $\omega' \in \Omega'$ ορίζουμε

$$\sigma_{\omega'}^j = \{1 \leq i \leq n : \xi_i^j(\omega') = 1\}. \tag{4.2.10}$$

Έχουμε ότι

$$\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \leq \varepsilon^d, \tag{4.2.11}$$

απ' όπου βλέπουμε ότι, για κάθε j,

$$\int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega'^j)} T R_{\sigma(\omega'^j)}\|^d d\mu(\omega') \leq \varepsilon^d. \tag{4.2.12}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{j=0}^{m} \int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega'^j)} T R_{\sigma(\omega'^j)}\|^d d\mu(\omega') \leq (m+1)\varepsilon^d. \tag{4.2.13}$$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\omega_0' \in \Omega'$ ώστε αν θέσουμε $\sigma_j = \sigma^j_{\omega_0'}$ να έχουμε

$$\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\| \leq (m+1)^{1/d}\varepsilon \tag{4.2.14}$$

για κάθε $j = 0, 1, \ldots, m$. Για κάθε i έχουμε

$$\sum_{j=0}^{m} \xi_i^j(\omega_0') = 1. \tag{4.2.15}$$

Έπεται ότι υπάρχει j_0 ώστε $\xi_i^{j_0}(\omega_0') = 1$ (άρα για j διαφορετικό από το j_0 έχουμε $\xi_i^j(\omega_0') = 0$). Άρα, $\bigcup_j \sigma^j_{\omega_0'} = \{1, 2, \ldots, n\}$ και τα $\sigma^j_{\omega_0'}$ είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή έχουμε τη ζητούμενη διαμέριση. □

Το προηγούμενο θεώρημα αφορούσε πίνακες με μηδενική διαγώνιο. Στη συνέχεια θα δούμε ότι μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση πίνακα που τα στοιχεία του είναι αρκετά μικρά, αρκεί να έχουμε κατάλληλο φράγμα για τα στοιχεία αυτά. Πρώτα όμως θα δώσουμε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι αν τα στοιχεία του πίνακα δεν είναι κατάλληλα φραγμένα τότε δεν μπορούμε να περιμένουμε το ανάλογο του προηγούμενου θεωρήματος.

Παράδειγμα 4.2.2. *Για κάθε $0 < \delta < 1$ υπάρχει φυσικός $n(\delta)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n(\delta)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ νόρμας 1 με $|a_{ij}| \leq 2\frac{\log(1/\delta)}{\log n}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$, ώστε*

$$\int_{\Omega} \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A) R_{\sigma(\omega)}\|\, d\mu(\omega) \geq \frac{1}{2},$$

όπου $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών με μέση τιμή δ σε κάποιο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ) και, για κάθε $\omega \in \Omega$, $\sigma(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε k με $1 \leq k \leq n$ και για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα υποθέτουμε επιπλέον ότι $k \mid n$. Ορίζουμε $m = \frac{n}{k}$ και για $1 \leq l \leq m$ θέτουμε

$$\eta_l = \{(l-1)k + 1, (l-1)k + 2, \ldots, lk\} \tag{4.2.16}$$

και

$$\Omega_l = \{\omega \in \Omega : \xi_i(\omega) = 1 \text{ για κάθε } i \in \eta_l\}. \tag{4.2.17}$$

Τώρα, ορίζουμε έναν πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ με $a_{ij} = \frac{1}{k}$ αν $i, j \in \eta_l$ για κάποιο $1 \leq l \leq m$ και $a_{ij} = 0$ αλλιώς. Ο τελεστής $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ που ορίζεται από τον πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ έχει νόρμα $\|A\| = 1$: αυτό φαίνεται αμέσως αν παρατηρήσουμε ότι είναι η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $u_l = \sum_{i \in \eta_l} e_i$, $l = 1, \ldots, m$. Έπεται ότι $\|A - D(A)\| \leq 1$. Αν $\omega \in \Omega_l$, τότε $\eta_l \subset \sigma_\omega$ και $\|R_{\eta_l} A R_{\eta_l}\| = 1$ για κάθε $l = 1, \ldots, m$. Άρα,

$$\|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\| = 1. \tag{4.2.18}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) &\geq \int_{\bigcup_{l=1}^m \Omega_l} \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^m \Omega_l\right) \\ &= 1 - \mu\left(\bigcap_{l=1}^m \Omega_l^c\right) = 1 - \prod_{l=1}^m \mu\Big(\Omega_l^c\Big) \\ &= 1 - (1 - \delta^k)^m, \end{aligned}$$

αφού τα ενδεχόμενα $\{\Omega_l\}_{i=1}^m$ είναι ανεξάρτητα. Θέτουμε

$$k = \left[\frac{\log n}{2\log(1/\delta)}\right] + 1 \tag{4.2.19}$$

και παρατηρούμε ότι, αν το n είναι αρκετά μεγάλο,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) &\geq \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) \\ &\quad - \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} D(A) R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) \\ &\geq 1 - (1 - \delta^k)^m - \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega)}\| d\mu(\omega) \geq 1/2$. □

Το προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι ένα ομοιόμορφο φράγμα της τάξης του $1/\log n$ για τις συντεταγμένες ενός $n \times n$ πίνακα A δεν είναι αρκετό για να επιλέξουμε καλή διαμέριση με την πιθανοθεωρητική μέθοδο. Αν όμως υποθέσουμε ένα ελαφρώς μικρότερο φράγμα, τότε ισχύει το ανάλογο του θεωρήματος 4.2.1 ακόμα και για πίνακες που μπορεί να μην έχουν μηδενική διαγώνιο.

Θεώρημα 4.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ και για κάθε $0<\delta<1$ και $\nu>0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\delta,\nu)$ ώστε για κάθε $n\geq n(\delta,\nu)$ και για κάθε $n\times n$ πίνακα $A=\big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τη συνθήκη*

$$|a_{ij}|\leq \frac{1}{(\log n)^{1+\nu}} \tag{4.2.20}$$

για κάθε $1\leq i,j\leq n$, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\{\sigma_j\}_{j=1}^{m}$ του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ σε $m=[1/\delta]$ ξένα ανά δύο υποσύνολα ώστε

$$\|R_{\sigma_j}AR_{\sigma_j}\|\leq C\delta^{\nu/C} \tag{4.2.21}$$

για κάθε $j=1,\dots,m$.

Πριν από την απόδειξη του θεωρήματος 4.2.3 θα αποδείξουμε το ασθενέστερο θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 4.2.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ και για κάθε $0<\delta<1$ και $\nu>0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\delta,\nu)$ ώστε για κάθε $n\geq n(\delta,\nu)$ και για κάθε $n\times n$ πίνακα $A=\big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τη συνθήκη*

$$|a_{ij}|\leq \frac{1}{n^{\nu}} \tag{4.2.22}$$

για κάθε $1\leq i,j\leq n$, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\{\sigma_j\}_{j=1}^{m}$ του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ σε $m=[1/\delta]$ ξένα ανά δύο υποσύνολα ώστε

$$\|R_{\sigma_j}AR_{\sigma_j}\|\leq C\delta^{\nu/C} \tag{4.2.23}$$

για κάθε $j=1,\dots,m$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την εξής βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 4.2.5. *Για κάθε πολυώνυμο*

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k \tag{4.2.24}$$

ισχύουν οι ανισότητες

$$|c_k|\leq \frac{n^k}{k!}\max_{|x|\leq 1}\big|Q_n(x)\big|\leq e^n\max_{|x|\leq 1}\big|Q_n(x)\big| \tag{4.2.25}$$

για κάθε $0\leq k\leq n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το πολυώνυμο Chebychev

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{4.2.26}$$

Το P_n έχει την εξής ιδιότητα: αν σταθεροποιήσουμε κάποιον συντελεστή a_{k_0} τότε για όλα τα πολυώνυμα βαθμού n που έχουν συντελεστή του x^{k_0} τον a_{k_0} ισχύει

$$\max_{|x|\leq 1} \big|Q_n(x)\big| \geq \max_{|x|\leq 1} \big|P_n(x)\big|. \tag{4.2.27}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τυχόν πολυώνυμο $Q_n(x)$, για κάθε $0 \leq k \leq n$ θεωρούμε το πολυώνυμο $\frac{a_k}{c_k} Q_n(x)$ (ώστε ο συντελεστής του x^k να είναι ο ίδιος) και έχουμε

$$\left|\frac{a_k}{c_k}\right| \max_{|x|\leq 1} \big|Q_n(x)\big| \geq \max_{|x|\leq 1} \big|P_n(x)\big| = 1, \tag{4.2.28}$$

δηλαδή

$$\big|c_k\big| \leq \big|a_k\big| \max_{|x|\leq 1} \big|Q_n(x)\big|. \tag{4.2.29}$$

Υπολογίζοντας τον συντελεστή a_k του πολυωνύμου Chebychev, συμπεραίνουμε ότι

$$|c_k| \leq \frac{n^k}{k!} \max_{|x|\leq 1} \big|Q_n(x)\big| \leq e^n \max_{|x|\leq 1} \big|Q_n(x)\big|. \qquad \square \tag{4.2.30}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4. Θέτουμε $d = \log n$ και, για να απλουστεύσουμε την απόδειξη, υποθέτουμε ότι ο d είναι δύναμη του 2. Από το γεγονός ότι αν ο T είναι αυτοσυζυγής τότε η $\|T\|$ ισούται με τη μέγιστη ιδιοτιμή του, έχουμε

$$\|T\|^d \leq \mathrm{tr}(T^d) \tag{4.2.31}$$

και

$$\mathrm{tr}(T) \leq n\|T\| \tag{4.2.32}$$

για κάθε αυτοσυζυγή $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο A είναι αυτοσυζυγής. Θεωρούμε $0 < \delta < 1$ και μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Για κάθε $\omega \in \Omega$ ορίζουμε $\sigma(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} &\leq \left(\int_\Omega \mathrm{tr}\big(R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\big)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \left(\int_\Omega n\|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&= e\left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d}.
\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με $\left(a_{ij}^{(d)}(\omega)\right)_{i,j=1}^{n}$ τον πίνακα του τελεστή $\left(R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\right)^{d}$ και παρατηρούμε ότι

$$a_{ij}^{(d)}(\omega) = \sum_{l\in\Gamma_{ij}} s_l\phi_l(\omega), \tag{4.2.33}$$

όπου

$$\Gamma_{ij} = \{(i,i_1,\dots,i_{d-1},j) : 1\leq i_h\leq n, 1\leq h<d\} \tag{4.2.34}$$

και, για κάθε $l=(i,i_1,\dots,i_{d-1},j)\in\Gamma_{ij}$,

$$s_l = a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{d-1}j} \tag{4.2.35}$$

και

$$\phi_l(\omega) = \xi_i(\omega)\xi_{i_1}(\omega)\cdots\xi_{i_{d-1}}(\omega)\xi_j(\omega) \tag{4.2.36}$$

για κάθε $\omega\in\Omega$ και $1\leq i,j\leq n$.

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{tr}\Big(R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\Big)^{d}d\mu(\omega) &= \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(d)}(\omega)d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\sum_{l\in\Gamma_{ii}}s_l\phi_l(\omega)d\mu(\omega).\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$c_h = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\sum}_{l\in\Gamma_{ii}}s_l,$$

όπου το άθροισμα $\widetilde{\sum}_{l\in\Gamma_{ii}}$ αναφέρεται στους $l\in\Gamma_{ii}$ που αποτελούνται από ακριβώς h διαφορετικούς ακέραιους. Τότε, η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$\int_\Omega \mathrm{tr}\Big(R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\Big)^{d}d\mu(\omega) = \sum_{h=1}^{n}c_h\delta^h. \tag{4.2.37}$$

Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι αφού

$$\int_\Omega\phi_l(\omega)d\mu(\omega) = \int_\Omega\xi_i(\omega)\xi_{i_1}(\omega)\cdots\xi_{i_{d-1}}(\omega)\xi_j(\omega)d\mu(\omega), \tag{4.2.38}$$

και αφού $\xi_{i_h}^k = \xi_{i_h}$, μαζεύοντας τους ίδιους όρους σε δυνάμεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega\phi_l(\omega)d\mu(\omega) &= \int_\Omega\xi_{i_1}(\omega)\xi_{i_1}(\omega)\cdots\xi_{i_h}(\omega)d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega\xi_{i_1}d\mu(\omega)\int_\Omega\xi_{i_2}(\omega)d\mu(\omega)\cdots\int_\Omega\xi_{i_h}(\omega)d\mu(\omega)\\ &= \delta^h.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\sum_{h=1}^{n} c_h \delta^h \leq e^d \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \right) \leq e^d \tag{4.2.39}$$

για κάθε $0 < \delta < 1$, επομένως

$$\max_{|\delta| \leq 1} \Big| \sum_{h=1}^{d} c_h \delta^{2h} \Big| \leq e^d. \tag{4.2.40}$$

Τότε, από τη πρόταση 4.2.5 έπεται ότι

$$|c_h| \leq \frac{d^{2h}}{(2h)!} \max_{|\delta| \leq 1} \Big| \sum_{h=1}^{d} c_h \delta^{2h} \Big| \leq e^{2d} e^d = e^{3d}. \tag{4.2.41}$$

Εναλλακτικά, ξεκινώντας από την

$$c_h = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\sum}_{l \in \Gamma_{ii}} s_l, \tag{4.2.42}$$

αν απαριθμήσουμε τους όρους του αθροίσματος έχουμε ότι

$$|c_h| \leq n \binom{n-1}{h-1} (h-1)^{d-1} n^{-dn} \leq (en)^h h^{d-h} n^{-dn}, \tag{4.2.43}$$

όπου, για την τελευταία ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$n \binom{n-1}{h-1} (h-1)^{d-1} \leq (en)^h h^{d-h}. \tag{4.2.44}$$

Πράγματι, από την ανισότητα $\frac{n^n}{n!} \leq e^n$ έπεται ότι $\frac{(h-1)^{h-1}}{(h-1)!} \leq e^{h-1}$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $n\frac{(n-1)!}{(n-h)!} \leq n^h$, άρα

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{h-1} (h-1)^{d-1} &= n \frac{(n-1)!}{(h-1)!(n-h)!} (h-1)^{d-1+h-h} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(n-h)!} (h-1)^{d-h} \frac{(h-1)^{h-1}}{(h-1)!} \\ &\leq n^h h^{d-h} e^{h-1} \leq (en)^h h^{d-h}. \end{aligned}$$

Τώρα, επιστρέφοντας στην απόδειξη του θεωρήματος, αν θέσουμε $k = [d\nu/2]$, παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \leq \sum_{h=1}^{d} c_h \delta^h$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{h=1}^{k} |c_h| + \sum_{h=k+1}^{d} |c_h|\delta^h \\ &\leq k^d (en)^k n^{-d\nu} + e^{3d}\frac{\delta^{k+1}}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \leq \nu d(en)^{\nu/2}n^{-\nu} + \frac{e^3\delta^{\nu/2}}{(1-\delta)^{1/d}} \leq C\delta^{\nu/2} \tag{4.2.45}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$ και n αρκετά μεγάλο.

Αν ο A δεν είναι αυτοσυζυγής, εφαρμόζουμε το προηγούμενο επιχείρημα στους $A + A^*$ και $i(A - A^*)$ και καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με τη σταθερά $2C$ στη θέση της C.

Το Θεώρημα είναι τώρα άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.1. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3. Κάνουμε την ασθενέστερη υπόθεση ότι $|a_{ij}| \leq \frac{1}{(\log n)^{1+\nu}}$.

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ και για κάθε $0 < \delta < 1$ και $\nu > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\delta, \nu)$ ώστε για κάθε $n \geq n(\delta, \nu)$ και για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν τη συνθήκη

$$|a_{ij}| \leq \frac{1}{(\log n)^{1+\nu}}$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\{\sigma_j\}_{j=1}^m$ του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ σε $m = [1/\delta]$ ξένα ανά δύο υποσύνολα ώστε

$$\|R_{\sigma_j}AR_{\sigma_j}\| \leq C\delta^{\nu/C}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις για τις οποίες εισάγουμε τον κατάλληλο συμβολισμό. Για κάθε ακέραιο n και για κάθε $0 < \delta < 1$ και $0 < \gamma, \varrho \leq 1$ ορίζουμε

$$a_n(\gamma, \delta) = \sup_A \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d}, \tag{4.2.46}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλους τους γραμμικούς τελεστές $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ νόρμας $\|A\| \leq 1$ που ικανοποιούν την $|\langle Ae_i, e_j\rangle| \leq \gamma$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Επίσης, ορίζουμε

$$b_n(\varrho, \delta) = \sup_A \left(\int_\Omega \|AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d}, \tag{4.2.47}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλους τους γραμμικούς τελεστές $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ νόρμας $\|A\| \leq 1$ που ικανοποιούν την $\|Ae_i\| \leq \varrho$ για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, θέτουμε $d = \log n$ και θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε $\sigma(\omega) = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega) = 1\}$.

Πρόταση 4.2.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $D_0 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε φυσικό n και για κάθε $0 < \delta < 1$ και $0 < \gamma \leq 1$,*

$$a_n(\gamma, \delta) \leq D_0 b_n(\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{\log n}, \delta). \tag{4.2.48}$$

Απόδειξη. Έστω A ένας γραμμικός τελεστής $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ νόρμας $\|A\| \leq 1$ του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση του ℓ_2^n ικανοποιεί τη συνθήκη $|a_{ij}| \leq \gamma$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Τότε, $\|D(A)\| \leq \gamma$ και

$$\begin{aligned}
I &:= \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&= \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A) + D(A)) R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} D(A) R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} + \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 20\left(\int_\Omega \int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega')}\|^d d\mu'(\omega') d\mu(\omega)\right)^{1/d},
\end{aligned}$$

όπου (Ω', Σ', μ') είναι ένα ανεξάρτητο αντίγραφο του (Ω, Σ, μ) και $\sigma(\omega') = \{1 \leq i \leq n : \xi_i(\omega') = 1\}$. Για τις τελευταίες ανισότητες παρατηρούμε ότι

$$R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) R_{\sigma(\omega)} = \sum_{i,j \in \sigma_\omega, i \neq j} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega) a_{ij} e_i \otimes e_j \tag{4.2.49}$$

και εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2.5.

Σταθεροποιούμε κάποιο $\omega \in \Omega$ και παρατηρούμε ότι

$$\|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A))\| \leq \|R_{\sigma(\omega)} A\| + \|R_{\sigma(\omega)} D(A)\| \leq 1 + \gamma \tag{4.2.50}$$

και

$$\|R_{\sigma(\omega)}(A - D(A)) e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j \in \sigma(\omega) \setminus \{i\}} a_{ij}^2\right)^{1/2} =: \varrho_\omega. \tag{4.2.51}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \left(\int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega)}(A-D(A))R_{\sigma(\omega')}\|^d d\mu'(\omega')\right)^{1/d} \\
&\leq (1+\gamma)\left(\int_{\Omega;} \left\|\frac{1}{1+\gamma}(A-D(A))R_{\sigma(\omega')}\right\|^d d\mu'(\omega')\right)^{1/d} \\
&= (1+\gamma)b_n\left(\frac{\varrho_\omega}{1+\gamma},\delta\right) \\
&\leq 2b_n\left(\frac{\varrho_\omega}{1+\gamma},\delta\right) \\
&\leq 2b_n(\varrho_\omega,\delta)
\end{aligned}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Ορίζουμε

$$\widetilde{\varrho} = \Big(\int_\Omega \varrho_\omega^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d}. \tag{4.2.52}$$

Παρατηρούμε ότι

$$b_n(\varrho_\omega,\delta) \leq b_n(\widetilde{\varrho},\delta) \tag{4.2.53}$$

αν $\varrho_\omega < \widetilde{\varrho}$ και

$$b_n(\varrho_\omega,\delta) \leq \frac{\varrho_\omega}{\widetilde{\varrho}} b_n(\widetilde{\varrho},\delta) \tag{4.2.54}$$

αν $\varrho_\omega \geq \widetilde{\varrho}$. Οι ανισότητες αυτές προκύπτουν άμεσα από τη σχέση

$$b_n(\varrho,\delta) \leq Bb_n\left(\frac{\varrho}{B},\delta\right) \tag{4.2.55}$$

η οποία ισχύει για κάθε $B \geq 1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
b_n(\varrho,\delta) &= \sup_A \left(\int_\Omega \|AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq B\sup_A \left(\int_\Omega \|(B^{-1}A)R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&= Bb_n\left(\frac{\varrho}{B},\delta\right).
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην απόδειξη, έχουμε

$$
\begin{aligned}
I &:= \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)}AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 20\left(\int_\Omega\int_{\Omega'} \|R_{\sigma(\omega)}(A-D(A))R_{\sigma(\omega')}\|^d d\mu'(\omega')d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 20\left(\int_\Omega (2b_n(\varrho_\omega,\delta))^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 40\left(\int_\Omega b_n(\varrho_\omega,\delta)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 40\left(\int_{\{\omega\in\Omega:\varrho_\omega<\widetilde{\varrho}\}} b_n(\varrho_\omega,\delta)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} + 40\left(\int_{\{\omega\in\Omega:\varrho_\omega\geq\widetilde{\varrho}\}} b_n(\varrho_\omega,\delta)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 40\left(\int_{\{\omega\in\Omega:\varrho_\omega<\widetilde{\varrho}\}} b_n(\widetilde{\varrho},\delta)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} + 40\left(\int_{\{\omega\in\Omega:\varrho_\omega\geq\widetilde{\varrho}\}} \left(\frac{\varrho_\omega}{\widetilde{\varrho}} b_n(\widetilde{\varrho},\delta)\right)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 40\mu\Big(\{\omega\in\Omega : \varrho_\omega<\widetilde{\varrho}\}\Big)^{1/d} b_n(\widetilde{\varrho},\delta) + 40\frac{b_n(\widetilde{\varrho},\delta)}{\widetilde{\varrho}}\left(\int_\Omega \varrho_\omega^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \gamma + 40b_n(\widetilde{\varrho},\delta) + 40\frac{b_n(\widetilde{\varrho},\delta)}{\widetilde{\varrho}}\widetilde{\varrho} \\
&= \gamma + 80b_n(\widetilde{\varrho},\delta).
\end{aligned}
$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varrho}^2 &= \Big(\int_\Omega \varrho_\omega^d d\mu(\omega)\Big)^{2/d} \\
&\leq \left(\int_\Omega \max_{1\leq i\leq n}\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^n \xi_j(\omega)a_{ij}^2\Big)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big(\sum_{j=1,j\neq i}^n \xi_j(\omega)a_{ij}^2\Big)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d} \\
&= n^{\frac{1}{\log n}} \max_{1\leq i\leq n}\left(\int_\Omega \Big(\sum_{j=1,j\neq i}^n \xi_j(\omega)a_{ij}^2\Big)^d d\mu(\omega)\right)^{1/d}
\end{aligned}
$$

$$= \quad e \max_{1\leq i\leq n} \left(\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n \xi_j(\omega) a_{ij}^2 \Big)^d d\mu(\omega) \right)^{1/d}.$$

Όμως, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $\{b_j\}_{j=1}^n$ με $|b_j| \leq \gamma$ και $\sum_{j=1}^n |b_j|^2 \leq 1$, εισάγοντας ανεξάρτητα αντίγραφα των ξ_i έχουμε ότι

$$\begin{aligned} J \quad &:= \quad \left(\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n \xi_j(\omega) |b_j|^2 \Big)^d d\mu(\omega) \right)^{1/d} \\ &\leq \quad \delta + \left(\int_\Omega \int_{\Omega'} \Big| \sum_{j=1}^n (\xi_j(\omega) - \xi_j(\omega')) |b_j|^2 \Big|^d d\mu'(\omega') d\mu(\omega) \right)^{1/d}. \end{aligned}$$

Εισάγοντας τις συναρτήσεις Rademacher και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Khintchine, παίρνουμε

$$\begin{aligned} J \quad &\leq \quad \delta + \left(\int_\Omega \int_{\Omega'} \int_0^1 \Big| \sum_{j=1}^n (\xi_j(\omega) - \xi_j(\omega')) |b_j|^2 r_j(t) \Big|^d dt d\mu'(\omega') d\mu(\omega) \right)^{1/d} \\ &\leq \quad \delta + \sqrt{d} \left(\int_\Omega \int_{\Omega'} \Big| \sum_{j=1}^n (\xi_j(\omega) - \xi_j(\omega'))^2 |b_j|^4 \Big|^d d\mu'(\omega') d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2d}} \\ &\leq \quad \delta + 2\sqrt{d} \left(\int_\Omega \Big| \sum_{j=i,}^n \xi_j(\omega) |b_j|^4 \Big|^d d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2d}} \\ &\leq \quad \delta + 2\gamma\sqrt{d}\sqrt{J}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$J \leq 2\delta + 16\gamma^2 d, \tag{4.2.56}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\widetilde{\varrho} \leq C_1(\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{d}) \tag{4.2.57}$$

για κάποια σταθερά $C_1 \geq 1$. Συνεπώς,

$$a_n(\gamma,\delta) \leq \gamma + 80 b_n(C_1(\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{d}, \delta) \leq \gamma + 80 C_1 b_n(\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{d}, \delta), \tag{4.2.58}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης αν παρατηρήσουμε ότι $\gamma \leq b_n(\gamma,\delta)$. □

Πρόταση 4.2.7. *Για κάθε φυσικό k υπάρχει σταθερά $D_k > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε φυσικό n και για κάθε $0 < \delta < 1/d$ και $0 < \gamma \leq 1$,*

$$a_n(\gamma,\delta) \leq D_k a_n(\delta + \gamma^{2k}(\log n)^{2k-1}, \delta)^{\frac{1}{2k}}. \tag{4.2.59}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $k = 1$. Έστω $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\|A\| \leq 1$ και $\|Ae_i\| \leq \tau$ για κάθε $1 \leq i \leq n$, όπου $0 < \tau \leq 1$. Τότε, $\|A^*A\| \leq 1$ και $|\langle A^*Ae_i, e_j\rangle| \leq \tau^2$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Από τις υποθέσεις αυτές έπεται ότι

$$\begin{aligned} a_n(\tau^2, \delta) &\geq \left(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A^* A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \right)^{1/d} = \left(\int_\Omega \|AR_{\sigma(\omega)}\|^{2d} d\mu(\omega) \right)^{1/d} \\ &\geq \left(\int_\Omega \|AR_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \right)^{2/d}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$a_n(\tau^2, \delta) \geq b_n(\tau, \delta)^2 \tag{4.2.60}$$

για κάθε $\tau \in (0, 1)$. Από τη σχέση (4.2.60) και την Πρόταση 4.2.6 έπεται ότι

$$\begin{aligned} a_n(\gamma, \delta) &\leq D_0 b_n(\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{\log n}, \delta) \leq \sqrt{2} D_0 b_n((\sqrt{\delta} + \gamma\sqrt{\log n})/\sqrt{2}, \delta) \\ &\leq \sqrt{2} D_0 a_n(\delta + \gamma^2 \log n, \delta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $D_1 = \sqrt{2} D_0$, έχουμε τελικά

$$a_n(\gamma, \delta) \leq D_1 a_n(\delta + \gamma^2 \log n, \delta)^{1/2}. \tag{4.2.61}$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο για $k > 1$. Για παράδειγμα, θέτοντας $d = \log n$ και χρησιμοποιώντας την $a_n(\gamma, \delta) \leq B a_n(B^{-1}\gamma, \delta)$ (η οποία ισχύει για κάθε $B \geq 1$) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} a_n(\gamma, \delta) &\leq D_1^{3/2} a_n(\delta + (\delta + \gamma^2 d)^2 d, \delta)^{1/4} \leq D_1^{3/2} a_n(\delta + 2\delta^2 d + 2\gamma^4 d^3, \delta)^{1/4} \\ &\leq D_1^{3/2} a_n(3\delta + 2\gamma^4 d^3, \delta)^{1/4} \leq 3^{1/4} D_1^{3/2} a_n(\delta + \gamma^4 d^3, \delta)^{1/4}, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο για $k = 2$. □

Πρόταση 4.2.8. *Υπάρχει σταθερά $B > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε φυσικό n και για κάθε $0 < \delta, \lambda < 1$ και $0 < \gamma \leq 1$ και $0 < \kappa < \frac{1}{2}$,*

$$a_n(\gamma, \delta) \leq B\Big(\delta^\lambda + \kappa^{-\lambda} a_n(\gamma, \kappa) \Big). \tag{4.2.62}$$

Απόδειξη. Έστω $n, \kappa, \delta, \lambda, \gamma$ όπως στην υπόθεση και έστω $A : \ell_2^n \to \ell_2^n$ αυτοσυζυγής τελεστής με $\|A\| \leq 1$. Υποθέτουμε ότι $|a_{ij}| = |\langle Ae_i, e_j\rangle| \leq \gamma$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$. Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό και δαοδικασία απόδειξης όπως στο Θεώρημα 4.2.4, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) &\leq \int_\Omega \mathrm{tr}\Big(R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)} \Big)^d d\mu(\omega) \\ &\leq e^d \int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}||^d d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Επίσης, βλέπουμε ότι

$$\int_{\Omega} \mathrm{tr}\Big(R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\Big)^d d\mu(\omega) = \sum_{h=1}^{d} c_h \delta^h \tag{4.2.63}$$

για κατάλληλους συντελεστές c_h. Αν θέσουμε $\delta = \kappa x^2$, έχουμε ότι

$$\Big|\sum_{h=1}^{d} c_h \delta^h\Big| = \Big|\sum_{h=1}^{d} c_h \kappa^h x^{2h}\Big| \leq e^d a_n(\gamma, \kappa x^2)^d \leq e^d a_n(\gamma, \kappa)^d \tag{4.2.64}$$

για κάθε $-1 \leq x \leq 1$. Επίσης,

$$|c_h \kappa^h| \leq e^{3d} a_n(\gamma, \kappa)^d \tag{4.2.65}$$

για κάθε $1 \leq h \leq d$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|c_h| \leq e^{3d} a_n(\gamma, 1)^d \leq e^{3d}$ για κάθε $h = 1, \ldots, d$, η οποία προκύπτει από το προηγούμενο φράγμα για τον $|c_h|\kappa^h$ αν πάρουμε $\kappa = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{h=1}^{d} c_h \delta^h\Big| &\leq \sum_{h=1}^{[\lambda d]} |c_h| + \sum_{h=[\lambda d]+1}^{d} |c_h| \delta^h \\
&\leq e^{3d} a_n(\gamma, \kappa)^d \sum_{h=1}^{[\lambda d]} \kappa^{-h} + \delta^{\lambda d} d e^{3d} \\
&\leq 2e^{3d} a_n(\gamma, \kappa)^d \kappa^{-\lambda d} + \delta^{\lambda d} e^{4d},
\end{aligned}$$

άρα, από τον ορισμό του $a_n(\gamma, \delta)$, από την (4.2.63) και από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι

$$\begin{aligned}
a_n(\gamma, \delta) &= \sup_A \left(\int_{\Omega} \|R_{\sigma(\omega)} A R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega) \right)^{1/d} \\
&\leq \Big|\sum_{h=1}^{d} c_h \delta^h\Big|^{1/d} \\
&\leq \Big(2e^{3d} a_n(\gamma, \kappa)^d \kappa^{-\lambda d} + \delta^{\lambda d} e^{4d}\Big)^{1/d} \\
&\leq B\Big(\kappa^{-\lambda} a_n(\gamma, \kappa)^d + \delta^{\lambda}\Big)
\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $B \geq 1$. Στη γενικότερη περίπτωση, όπου ο A δεν είναι απαραίτητα αυτοσυζυγής, βλέπουμε με τον συνήθη τρόπο ότι το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τη σταθερά B με τη σταθερά $2B$. □

Πρόταση 4.2.9. *Υπάρχει σταθερά $C_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: Έστω $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής νόρμας 1 τέτοιος ώστε $\|Te_i\| \le \varrho$ για κάθε $1 \le i \le n$, όπου $\frac{1}{n} \le \varrho \le 1$. Για κάθε $1 \le h \le n$ ορίζουμε*

$$P_h = \left\{ h^{-\frac{1}{2}} \sum_{i \in A} Te_i : |A| \le h \right\}. \tag{4.2.66}$$

Τότε, η εντροπία $N_2(P_h, t)$ (δηλαδή ο ελάχιστος αριθμός μπαλών ακτίνας t που χρειάζονται για να καλύψουν το P_h) ικανοποιεί τις

$$\log N_2(P_h, t) \le C_0 h \log n \tag{4.2.67}$$

αν $0 \le t \le \varrho$, και

$$\log N_2(P_h, t) \le C_0 \varrho^2 h t^{-2} \log n \tag{4.2.68}$$

αν $\varrho \le t \le \varrho\sqrt{h}$.

Απόδειξη. Στην τετριμμένη περίπτωση $0 \le t \le \varrho$ εκτιμούμε την εντροπία από τον πληθάριθμο $\binom{n}{h} \le \left(\frac{en}{h}\right)^h$ του P_h. Αν $\varrho \le t \le \varrho\sqrt{h}$, υποθέτουμε για απλότητα ότι $t = 2^{\frac{j}{2}}\varrho$ για κάποιον φυσικό j και θεωρούμε j ανεξάρτητα αντίγραφα $\{\varepsilon_i^l\}_{i=1}^n$, $\le l \le j$ μιας ακολουθίας $\{\varepsilon_i^0\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών. Τότε, για κάθε $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ με $|A| \le h$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A} Te_i &= \sum_{i\in A} \varepsilon_i^1 Te_i + \sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\varepsilon_i^2 Te_i + \cdots \\ &\quad + \sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^{j-1})\varepsilon_i^j Te_i + \sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^j)Te_i.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}J &= \int \left\| h^{-1/2}\sum_{i\in A} Te_i - h^{-1/2}\sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^j)Te_i \right\| d\varepsilon^1 \cdots d\varepsilon^j \\ &\le h^{-1/2}\sum_{l=1}^j \int \left\| \sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^{l-1})\varepsilon_i^l Te_i \right\| d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^l \\ &\le h^{-1/2}\sum_{l=1}^j \int \left(\int \left\| \sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^{l-1})\varepsilon_i^l Te_i \right\|^2 d\varepsilon^l \right)^{1/2} d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}.\end{aligned}$$

Αν εφαρμόσουμε στην τελευταία σχέση το γενικευμένο κανόνα του παραλληλογράμμου, παίρνουμε

$$J \le h^{-1/2}\sum_{l=1}^j \int \left(\sum_{i\in A} \left\|(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^{l-1})Te_i\right\|^2 \right)^{1/2} d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}$$

$$= \quad h^{-1/2}\sum_{l=1}^{j}\int\left(\sum_{i\in A}|1-\varepsilon_i^1|^2\cdots|1-\varepsilon_i^{l-1}|^2\|Te_i\|^2\right)^{1/2}d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}.$$

Επιπλέον, επειδή $\|Te_i\|\leq\varrho$, έπεται ότι

$$J\leq\varrho h^{-1/2}\sum_{l=1}^{j}\int\left(\sum_{i\in A}|1-\varepsilon_i^1|^2\cdots|1-\varepsilon_i^{l-1}|^2\right)^{1/2}d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}. \tag{4.2.69}$$

Τώρα, για κάποιο σταθερό $1\leq l\leq j$ και μια σταθερή ακολουθία $\{\varepsilon_i^k\}_{i\leq n,k\leq l}$ θέτουμε

$$A^l(\varepsilon)=\{i\in A:\varepsilon_i^1=\cdots=\varepsilon_i^l=-1\} \tag{4.2.70}$$

και γράφουμε την προηγούμενη ανισότητα στη μορφή

$$J\leq\varrho h^{-1/2}\sum_{l=1}^{j}2^{l-1}\int|A^{l-1}(\varepsilon)|^{1/2}d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}. \tag{4.2.71}$$

Αφού

$$S:=\int|A^{l-1}(\varepsilon)|^{1/2}d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}=2^{-l+1}\int\sum_{i\in A}(1-\varepsilon_i^1)\cdots(1-\varepsilon_i^{l-1})d\varepsilon^1\cdots d\varepsilon^{l-1}, \tag{4.2.72}$$

η (4.2.69) γίνεται

$$J\leq\varrho\sum_{l=1}^{j}2^{\frac{l-1}{2}}\leq C_1t \tag{4.2.73}$$

για κάποια σταθερά $C_1>0$ ανεξάρτητη του t. Έπεται επίσης ότι υπάρχει ακολουθία προσήμων $\varepsilon=\{\varepsilon_i^l\}_{i\leq n,l\leq j}$ ώστε

$$|A^j(\varepsilon)|\leq 2^{-j+1}h\leq 2h\varrho^2t^{-2} \tag{4.2.74}$$

και

$$\left\|h^{-1/2}\sum_{i\in A}Te_i-h^{-1/2}2^j\sum_{i\in A^j(\varepsilon)}Te_i\right\|\leq C_1t. \tag{4.2.75}$$

Συνεπώς,

$$\left\|h^{-1/2}\sum_{i\in A}Te_i-\sqrt{2}t\varrho^{-1}(2h\varrho^2t^{-2})^{-1/2}\sum_{i\in A^j(\varepsilon)}Te_i\right\|\leq C_1t, \tag{4.2.76}$$

το οποίο δείχνει ότι

$$N_2(P_h, C_2 t) \leq N_2(P_{2h\varrho^2 t^{-2}}, \varrho) \tag{4.2.77}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $C_2 > 0$. Αν εκτιμήσουμε τον αριθμό εντροπίας στο δεξιό μέλος της (4.2.77) μέσω του πληθαρίθμου του $P_{2h\varrho^2 t^{-2}}$, όπως κάναμε για την $N_2(P_h, t)$, έχουμε ότι

(4.2.78)

$$N_2(P_{2h\varrho^2 t^{-2}}, \varrho) \leq \binom{n}{2h\varrho^2 t^{-2}} \leq \left(\frac{en}{2h\varrho^2 t^{-2}}\right)^{2h\varrho^2 t^{-2}} = \left(\frac{ent^2}{2h\varrho^2}\right)^{2h\varrho^2 t^{-2}} \leq \left(\frac{en}{2}\right)^{2h\varrho^2 t^{-2}}$$

διότι $t \leq \varrho h^{-1/2}$. □

Θα χρειαστούμε ένα ακόμα Λήμμα από το [6]:

Λήμμα 4.2.10. *Έστω $\mathcal{E}$ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n_+$ και έστω $B = \sup_{x\in\mathcal{E}} \|x\|_2$. Θεωρούμε $\delta \in (0,1)$ και μια ακολουθία $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητων 0-1 τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή δ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ). Για κάθε $q \geq 1$ και για κάθε $1 \leq m \leq n$,*

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{x\in\mathcal{E}, |A|\leq m}\left(\sum_{i\in A}\xi_i(\omega)x_i\right)\right\|_{L^q(\Omega)} &\leq C\left(\delta m + \frac{q}{\log(1/\delta)}\right)^{1/2} B \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\log(1/\delta)}}\int_0^B \sqrt{\log N_2(\mathcal{E}, t)}\, dt.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $k \leq n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^k \xi_i(\omega)\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C\delta k + C\frac{q}{\log(1+q/\delta k)}. \tag{4.2.79}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο q είναι ακέραιος και ότι $q > 2\delta k$ (αλλιώς η ανισότητα ισχύει τετριμμένα). Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^k \xi_i\right\|_q^q &= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^k \xi_i(\omega)\right)^q d\mu(\omega) \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}\delta^j(1-\delta)^{k-j} j^q \\ &\leq C\sum_{j=1}^k \left(\frac{\delta k}{j}\right)^j j^q.\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$q^q \int_0^\infty \left(\frac{\delta k}{tq}\right)^{tq} t^q dt \leq \left(C \frac{q}{\log(1+q/\delta k)}\right)^q. \tag{4.2.80}$$

Με ένα επιχείρημα διαδοχικής προσέγγισης, χρησιμοποιώντας όλο και λεπτότερα δίκτυα για το $\mathcal{E}$, βλέπουμε ότι κάθε $x \in \mathcal{E}$ γράφεται στη μορφή

$$x = \sum_{2^k \leq B} 2^k y(k), \tag{4.2.81}$$

όπου τα $y(k)$ ανήκουν σε κάποιο $\mathcal{F}_k \subset B_2^n$ με πληθάριθμο που ικανοποιεί την

$$\log |\mathcal{F}_k| \leq C \log N(\mathcal{E}, 2^{k-2}). \tag{4.2.82}$$

Συνεπώς,

$$\left\| \sup_{x\in\mathcal{E}, |A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i(\omega) x_i \right) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \sum_{2^k \leq B} 2^k \left\| \sup_{x\in\mathcal{F}_k, |A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i(\omega) |y_i| \right) \right\|_{L^q(\Omega)}. \tag{4.2.83}$$

Σταθεροποιούμε $\mathcal{F} := \mathcal{F}_k$ και θέτουμε $p = q + \log|\mathcal{F}|$. Ορίζουμε

$$\varrho_1 = \sqrt{\delta/m} \quad \text{και} \quad \varrho_2 = \sqrt{\log(1/\delta)}/\sqrt{p}. \tag{4.2.84}$$

Για κάθε A με $|A| \leq m$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in A} \xi_i(\omega)|y_i| &\leq \sum_{i\in A, |y_i|\geq \varrho_2} |y_i| + \sum_{i\in A, |y_i|\leq \varrho_1} |y_i| + \sum_{i\in A, \varrho_1<|y_1|<\varrho_2} \xi_i(\omega)|y_i| \\
&\leq \frac{1}{\varrho_2} + m\varrho_1 + \sum_{i\in A, \varrho_1<|y_i|<\varrho_2} \xi_i(\omega)|y_i| \sup_{y\in\mathcal{F}, |A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i(\omega)|y_i| \right) \\
&\leq \frac{1}{\varrho_2} + m\varrho_1 + \sup_{y\in\mathcal{F}} \left(\sum_{\varrho_1<|y_1|<\varrho_2} \xi_i(\omega)|y_i| \right).
\end{aligned}$$

Αν $\varrho_1 \geq \varrho_2$ τότε ο τρίτος όρος παραλείπεται. Συνεπώς,

$$\left\| \sup_{x\in\mathcal{F}, |A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i(\omega)|y_i| \right) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \frac{1}{\varrho_2} + m\varrho_1 + \sup_{y\in B_2^n} \left\| \sum_{\varrho_1<|y_1|<\varrho_2} \xi_i(\omega)|y_i| \right\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.2.85}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.2.79) και - στο τέλος - τον ορισμό του ϱ_2, γράφουμε

$$\sup_{y\in B_2^n} \left\| \sum_{\varrho_1<|y_1|<\varrho_2} \xi_i(\omega)|y_i| \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k=2^s, \varrho_2^{-2}<k<\varrho_1^{-2}} \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i(\omega) \right\|_p$$

$$\begin{aligned} &\leq C\delta\varrho_1^{-1} + Cp \sum_{k=2^s, k>\varrho_2^{-2}} \left(\sqrt{k}\log(2+p/\delta k)\right)^{-1} \\ &\simeq \delta\varrho_1^{-1} + p\varrho_2 \int_1^\infty t^{-3/2}\left(\log(2+\log(1/\delta)/\delta t)\right)^{-1} dt \\ &\simeq \delta\varrho_1^{-1} + p\varrho_2(\log(1/\delta))^{-1}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{x\in\mathcal{F}, |A|\leq m} \left(\sum_{i\in A} \xi_i(\omega)|y_i| \right) \right\|_{L^q(\Omega)} &\leq m\varrho_1 + C\delta\varrho_1^{-1} + p\varrho_2(\log(1/\delta))^{-1} + \varrho_2^{-1} \\ &< C\sqrt{\delta m} + C(\log(1/\delta))^{-1/2}(q+\log|\mathcal{F}|)^{1/2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (4.2.83) και προσθέτοντας πάνω από όλα τα $2^k \leq B$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.2.11. *Υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε φυσικό $n > 1$ και για κάθε $0 < \delta < \frac{1}{e}$ και $\frac{1}{n} \leq \varrho < 1$,*

$$b_n(\varrho,\delta) \leq C_1\left[\delta^{1/2}(\log n)^{1/2} + (\varrho\log(1/\varrho))^{1/2}(\log n)^{1/4}\right]. \tag{4.2.86}$$

Απόδειξη. Έστω n, δ, ϱ όπως παραπάνω και έστω $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leq 1$, τέτοιος ώστε $\|Te_i\| \leq \varrho$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων 0-1 μεταβλητών $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, μ) και σταθεροποιούμε h με $1 \leq h \leq n$. Για κάθε $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ με $|A| \leq h$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ ορίζουμε

$$F_A(\omega) = h^{-\frac{1}{2}} \sum_{i\in A} \xi_i(\omega) Te_i. \tag{4.2.87}$$

Τότε,

$$\|F_A(\omega)\|^2 = h^{-1}\left[\sum_{i\in A}\xi_i(\omega)\varrho^2 + \sum_{i,j\in A, i\neq j} \xi_i(\omega)\xi_j(\omega)\langle Te_i, Te_j\rangle\right]. \tag{4.2.88}$$

Αφού $|A| \leq h$ και $\xi_i(\omega) \leq 1$, έπεται ότι

$$\|F_A(\omega)\|^2 \leq \varrho^2 + h^{-1}\sum_{i\in A}\xi_i(\omega)\langle Te_i, \sum_{j\in A, j\neq i}\xi_j(\omega)Te_j\rangle. \tag{4.2.89}$$

Ορίζουμε

$$K_h(\omega) = \max_{|A|\leq h} \|F_A(\omega)\|. \tag{4.2.90}$$

Θέτουμε $d = \log n$ και θεωρούμε ένα ανεξάρτητο αντίγραφο (Ω', Σ', μ') του (Ω, Σ, μ). Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.5 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^{2d} d\mu(\omega)\Big)^{\frac{1}{d}} &\leq \varrho^2 + \Big(\int_\Omega \max_{|A|\leq h} \Big|h^{-1}\sum_{i\in A}\xi_i(\omega)\langle Te_i, \sum_{j\in A, j\neq i}\xi_j(\omega)Te_j\rangle\Big|^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \\ &\leq \varrho^2 + 20\Big(\int_\Omega\int_{\Omega'} \max_{|A|\leq h, |A'|\leq h} |\langle F_A(\omega), F_{A'}(\omega')\rangle|^d \, d\mu'(\omega')d\mu(\omega)\Big)^{1/d}.\end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε $\omega' \in \Omega'$ και θεωρούμε το υποσύνολο

$$E_{h,\omega'} = \Big\{ \Big\{ |\langle Te_i, F_{A'}(\omega')\rangle| \Big\}_{i=1}^n : |A'| \leq h \Big\} \tag{4.2.91}$$

του ℓ_2^n. Ορίζουμε

$$B_{h,\omega'} = \max_{|A'|\leq h} \left(\sum_{i=1}^n |\langle Te_i, F_{A'}(\omega')\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{4.2.92}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} B_{h,\omega'} &= \max_{|A'|\leq h}\max_{\|a\|\leq 1}\left[\sum_{i=1}^n a_i\langle Te_i, F_{A'}(\omega')\rangle\right] \leq \|T\| \max_{|A'|\leq h}\|F_{A'}(\omega')\| \\ &\leq K_h(\omega'). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.10 βλέπουμε ότι υπάρχει αριθμητική σταθερά $B_1 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $\omega' \in \Omega$,

$$\Big(\int_\Omega \max_{|A|\leq h, |A'|\leq h} |\langle F_A(\omega), F_{A'}(\omega')\rangle|^d \, d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \tag{4.2.93}$$

$$\begin{aligned} &\leq h^{-1/2}\left[B_1\left(\delta h + \frac{d}{\log(1/\delta)}\right)^{1/2} B_{h,\omega'} + \log(1/\delta)^{-1/2}\int_0^{B_{h,\omega'}} \sqrt{\log N_2(E_{h,\omega',t})}dt\right] \\ &\leq B_1\delta^{1/2}K_h(\omega') + h\log(1/\delta)^{-1/2}\left[B_1 d^{1/2}K_h(\omega') + \int_0^{B_{h,\omega'}} \sqrt{\log N_2(E_{h,\omega',t})}dt\right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για την απόσταση δύο συνόλων A και A' με πληθάριθμο $\leq h$ ισχύει

$$d_{A,A'} = \left(\sum_{i=1}^n |\langle Te_i, F_A(\omega) - F_{A'}(\omega')\rangle|^2\right)^{1/2} \leq \|F_A(\omega) - F_{A'}(\omega')\|. \tag{4.2.94}$$

Άρα,

$$N_2(E_{h,\omega'}, t) \leq N_2(P_h, t) \tag{4.2.95}$$

για κάθε $\omega' \in \Omega'$ και $0 < t < \infty$, όπου

$$P_h = \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i \in A} Te_i : |A| \leq h \right\}. \tag{4.2.96}$$

Όμως,

$$B_{P_h} = \max_{|A| \leq h} h^{-1/2} \left\| \sum_{i \in A} Te_i \right\| \leq \varrho h^{1/2} \wedge 1, \tag{4.2.97}$$

οπότε, ολοκληρώνοντας ως προς μ', παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^d d\mu(\omega) \Big)^{2/d} &\leq \varrho^2 + B_1 \delta^{1/2} \Big(\int_{\Omega'} K_h(\omega')^d d\mu(\omega') \Big)^{1/d} \\ &\quad + h \log(1/\delta)^{-1/2} \times \Bigg[B_1 d^{1/2} \Big(\int_{\Omega'} K_h(\omega')^d d\mu(\omega') \Big)^{1/d} \\ &\quad + \int_0^{\varrho h^{1/2} \wedge 1} \sqrt{\log N_2(P_h, t)} dt \Bigg].\end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $B_2 > 0$ ώστε

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^d d\mu(\omega) \Big)^{1/d} &\leq B_2 \Bigg[\varrho + \delta^{1/2} + \Big(\frac{d}{h \log(1/\delta)} \Big)^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \Big(h \log(\frac{1}{\delta}) \Big)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\varrho h^{1/2} \wedge 1} \sqrt{\log N_2(P_h, t)} dt \right\}^{1/2} \Bigg].\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.9: έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\varrho h^{1/2} \wedge 1} \sqrt{\log N_2(P_h, t)} dt &\leq (C_0 h \log n)^{1/2} \varrho (1 + \log(1/\varrho)) \\ &\leq 2(C_0 h \log n)^{1/2} \varrho \log(1/\varrho).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^{2d} d\mu(\omega) \Big)^{1/d} &\leq B_2 \Bigg[\varrho + \delta^{1/2} + \Big(\frac{d}{h \log(1/\delta)} \Big)^{1/2} \\ &\quad + \left\{ \Big(h \log(1/\delta) \Big)^{-1/2} 2(C_0 h \log n)^{1/2} \varrho \log(1/\varrho) \right\}^{1/2} \Bigg].\end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει απόλυτη σταθερά $B_3 > 0$ ώστε

$$\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \leq B_3\left[\varrho + \delta^{1/2} + \left(\frac{d}{h}\right)^{1/2} + d^{1/4}\Big(\varrho\log(1/\varrho)\Big)^{1/2}\right]. \tag{4.2.98}$$

Αν $h \geq \sqrt{d}/\varrho$ τότε $(d/h)^{1/2} \leq d^{1/4}\varrho^{1/2}$, άρα

$$\varrho + (d/h)^{1/2} \leq 2d^{1/4}\Big(\varrho\log(1/\varrho)\Big)^{1/2}. \tag{4.2.99}$$

Αν πάλι $h < \sqrt{d}/\varrho$, τότε

$$\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \leq \varrho h^{1/2} < d^{1/4}\varrho^{1/2}. \tag{4.2.100}$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι, για μια απόλυτη σταθερά $B_4 > 0$ ισχύει

$$\Big(\int_\Omega K_h(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \leq B_4\left[\delta^{1/2} + d^{1/4}\Big(\varrho\log(1/\varrho)\Big)^{1/2}\right] \tag{4.2.101}$$

για κάθε $1 \leq h \leq n$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, θα εκτιμήσουμε το $b(\varrho,\delta)$. Έστω $\{a_i\}_{i=1}^n$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και έστω π μια μετάθεση του συνόλου $\{1,2,\dots,n\}$ τέτοια ώστε

$$a_{\pi(1)} \geq a_{\pi(2)} \geq \cdots \geq a_{\pi(n)}. \tag{4.2.102}$$

Τότε, για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n a_i\xi_i(\omega)Te_i\right\| &\leq \sum_{j=1}^{n-1}(a_{\pi(j)} - a_{\pi(j+1)})\left\|\sum_{i=1}^j \xi_{\pi(i)}(\omega)Te_{\pi(i)}\right\| \\
&\quad + a_{\pi(n)}\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i(\omega)Te_i\right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n-1}(a_{\pi(j)} - a_{\pi(j+1)})j^{1/2}K_j(\omega) + a_{\pi(n)}n^{1/2}K_n(\omega) \\
&\leq \max_{1\leq j\leq n} K_j(\omega)\sum_{i=1}^n a_{\pi(i)}\Big(i^{1/2} - (i-1)^{1/2}\Big) \\
&\leq d^{1/2}\|a\|_2 \max_{1\leq j\leq n} K_j(\omega).
\end{aligned}$$

Αν η ακολουθία $\{a_i\}_{i=1}^n$ είναι τυχούσα, τότε παίρνουμε το ίδιο άνω φράγμα, μόνο που το δεξιό μέλος διπλασιάζεται. Επομένως,

$$\|TR_{\sigma_\omega}\| \leq 2d^{1/2} \max_{1\leq j\leq n} K_j(\omega) \tag{4.2.103}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned} b(\varrho,\delta) &\leq d^{1/2}\Big(\int_\Omega \max_{1\leq j\leq n} K_j(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \\ &\leq 2d^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^n \int_\Omega K_j(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \\ &\leq 2d^{1/2}n^{1/d} \max_{1\leq j\leq n} \Big(\int_\Omega K_j(\omega)^d d\mu(\omega)\Big)^{1/d} \\ &\leq 6B_4 d^{1/2}\left[\delta^{1/2} + d^{1/4}\Big(\varrho\log(1/\varrho)\Big)^{1/2}\right]. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3. Έστω $\nu > 0$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.2.7 με $\gamma = d^{-1-\nu}$, $\delta = d^{-10}$ και $k = [5/\nu]$. Τότε, για κάποια σταθερά $D_k > 0$ έχουμε ότι

$$a_n(d^{-1-\nu}, d^{-10}) \leq D_k a_n(d^{-10} + d^{-1-2k\nu}, d^{-10})^{\frac{1}{2k}} \leq D_k a_n(2d^{-10}, d^{-10})^{\frac{1}{2k}}. \tag{4.2.104}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.2.6 με $\gamma = d^{-1-\nu}$ και $\delta = d^{-10}$ παίρνουμε

$$a_n(2d^{-10}, d^{-10}) \leq D_0 b_n(d^{-5} + 2d^{-19/2}, d^{-10}) \leq D_0 b_n(2d^{-5}, d^{-10}), \tag{4.2.105}$$

αν υποθέσουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο. Επιπλέον, από την Πρόταση 4.2.11 έπεται ότι αν θέσουμε $\varrho = 2d^{-5}$ και $\delta = d^{-10}$, $d = \log n$ τότε

$$b_n(2d^{-5}, d^{-10}) \leq C_1\Big[\delta^{-9/2} + \big(2d^{-10}\log(d^{10}/2)\big)^{1/2} d^{1/4}\Big] \leq C_1 d^{-4}, \tag{4.2.106}$$

υποθέτοντας πάλι ότι το n είναι αρκετά μεγάλο. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n(d^{-1-\nu}, d^{-10}) &\leq D_k a_n(2d^{-10}, d^{-10})^{1/2k} \\ &\leq D_k\Big(D_0 b_n(2d^{-5}, d^{-10})\Big)^{1/2k} \\ &\leq D_k\Big(D_0 C_1 d^{-4}\Big)^{1/2k} \\ &\leq D_k\Big(D_0 C_1\Big)^{1/2k} d^{-2/k}. \end{aligned}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.2.8 με $\gamma = d^{-1-\nu}$, $\delta = d^{-10}$ και $\lambda = \frac{1}{10k}$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n(d^{-1-\nu}, d^{-10}) &\leq B\Big(\delta^{\frac{1}{10k}} + k^{-\frac{1}{10k}} a_n(d^{-1-\nu}, k)\Big) \\ &\leq B\Big(\delta^{\frac{1}{10k}} + k^{-\frac{1}{10k}} D_k \Big(D_0 C_1\Big)^{\frac{1}{2k}} d^{-\frac{2}{k}}\Big) \end{aligned}$$

για κάθε $0 < \delta < 1$. Επομένως, για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε

$$a_n(d^{-1-\nu}, \delta) \leq C\delta^{\frac{1}{10k}} \tag{4.2.107}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\frac{1}{10k} \leq \frac{\nu}{C}$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.2.1 με $d^{-1-\nu}$, $\delta = d^{-10}$ και $\varepsilon = C\delta^{\frac{1}{10k}}$. Αφού

$$a_n(d^{-1-\nu}, \delta) \leq C\delta^{\frac{1}{10k}}, \tag{4.2.108}$$

έχουμε

$$\Big(\int_\Omega \|R_{\sigma(\omega)} T R_{\sigma(\omega)}\|^d d\mu(\omega)\Big)^{\frac{1}{d}} \leq C\delta^{\frac{1}{10k}}, \tag{4.2.109}$$

άρα το Θεώρημα 4.2.1 μας δίνει διαμέριση $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ με την ιδιότητα

$$\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\| \leq 3C\delta^{\frac{1}{10k}} \tag{4.2.110}$$

για κάθε j. Επομένως, αν θέσουμε $C' = 3C$ και θυμηθούμε ότι $\frac{1}{10k} \leq \frac{\nu}{C}$ έπεται ότι

$$\|R_{\sigma_j} T R_{\sigma_j}\| \leq C'\delta^{\frac{\nu}{C}}. \tag{4.2.111}$$

□

Βιβλιογραφία

[1] J. Anderson, *Extensions, restrictions and representations of states on C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1979), 303–329.

[2] J. Anderson, *Extreme points in sets of positive linear maps on $B(H)$*, J. Funct. Analysis **31** (1979), 195–217.

[3] K. Berman, H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *Matrix norm inequalities and the relative Dixmier property*, Integral Equations and Operator Theory **11** (1988), 28–48.

[4] V. I. Bogachev, *Gaussian measures*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS (1998).

[5] B. Bollobás, *Combinatorics*, Cambridge University Press (1986).

[6] J. Bourgain, *Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem*, Acta Math. **162** (1989), 227–245.

[7] J. Bourgain and L. Tzafriri, *Restricted invertibility of matrices and applications*, Analysis at Urbana II, London Math. Soc. Lect. Note Series **138** (1989), 61–107.

[8] J. Bourgain and L. Tzafriri, *Invertibility of "large" submatrices and applications to the geometry of Banach spaces and Harmonic Analysis*, Israel J. Math. **57** (1987), 137–224.

[9] J. Bourgain and L. Tzafriri, *On a problem of Kadison and Singer*, J. Reine Angew. Math. **420** (1991), 1–43.

[10] P. G. Casazza and D. Edidin, Equivalents of the Kadison–Singer problem.

[11] P. G. Casazza, O. Christensen, A. Lindner and R. Vershynin, *Frames and the Feichtinger conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 1025–1033.

[12] P. G. Casazza, M. Fickus, J. C. Tremain and E. Weber, *The Kadison–Singer problem in Mathematics and Engineering*, Proceedings of GPOTS 2005.

[13] P. G. Casazza and J. C. Tremain, *The Kadison–Singer problem in Mathematics and Engineering*, PNAS **103** (2006), 2032–2039.

[14] P. G. Casazza and R. Vershynin, *Kadison–Singer meets Bourgain–Tzafriri*, Unpublished.

[15] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge University Press (1995).

[16] P. A. M. Dirac, *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London (1947).

[17] J. Dixmier,*C^*-algebras*, Elsevier, North-Holland, 1982.

[18] J. Dixmier, *Applications dans les anneaux d'opèrateurs*, Compositio Math. **10** (1952), 1–55.

[19] D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press (2007).

[20] H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *The relative Dixmier property in discrete crossed products*, J. Funct. Analysis **69** (1986), 121–140.

[21] H. Halpern, V. Kaftal and G. Weiss, *Matrix pavings and Laurent operators*, J. Operator Theory **16** (1986), 121–140.

[22] R. Kadison and I. Singer, *Extensions of pure states*, Amer. J. Math. **81** (1959), 383–400.

[23] K. Kunen, *Set Theory*, Elsevier, North-Holland, 1974.

[24] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes*, Springer–Verlag (1991).

[25] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag (1977).

[26] B. Tanbay, *Pure state extensions and compressibility of the ℓ_1–algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 707–713.

[27] D. Slepian, *The one-sided barrier problem for Gaussian noise*, Bell. System Tech. J. **41** (1962), 463–501.

[28] N. Weaver, *The Kadison–Singer problem in discrepancy theory*, Discrete Math. **278** (2004), 227–239.