

Μιγαδική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2013

Περιεχόμενα

1	Μιγαδικοί αριθμοί	1
1.1	Οι μιγαδικοί αριθμοί	1
1.1.1	Το σώμα των μιγαδικών αριθμών	1
1.1.2	Γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών-Μιγαδικό επίπεδο-Επίπεδο Gauss	3
1.1.3	Παράσταση μιγαδικού αριθμού με πολικές συντεταγμένες	4
1.1.4	Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.	4
1.1.5	Οι ν -οστες ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού	5
1.1.6	Έυρεση των ν -οστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$	5
1.1.7	Η τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$	5
2	Συνεκτικότητα	7
2.1	Συνεκτικά σύνολα	7
2.1.1	Συνεκτική συνιστώσα	9
2.1.2	Συμπαγές επίπεδο των μιγαδικών αριθμών	13
2.1.3	Ολόμορφες συναρτήσεις	13
2.1.4	Οι διαφορικοί τελεστές $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	17
3	Σύγκλιση σειρών	21
3.1	Σειρές	21
3.1.1	Η γεωμετρική σειρά	23
3.1.2	Σειρές μιγαδικών αριθμών	25
3.1.3	Δυναμοσειρές	26
3.1.4	Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση	34
3.1.5	Παράσταση του $\log(1+z)$, $ z < 1$ με δυναμοσειρά	41
4	Ολοκληρώματα	43
4.1	Καμπύλες στο $\mathbb{C}$ - Επικαμπύλια ολοκληρώματα	43
4.1.1	Καμπύλες	45
4.1.2	Δείκτης στροφής καμπύλης	50

4.1.3	Τοπικό θεώρημα του Cauchy	52
4.2	Θεμελιώδεις ιδιότητες ολόμορφων συναρτήσεων	61
4.2.1	Αρχή μοναδικότητας ή Αρχή αναλυτικής συνέχειας	61
4.3	Σημεία ανωμαλίας	68
4.3.1	Πόλοι	72
5	Αρχή του ορίσματος	75
5.1	Εισαγωγή	75
5.1.1	Ανοιχτές απεικονίσεις	77
5.1.2	Σύγκλιση	79
5.1.3	Ανάπτυγμα Laurent	80
6	Ολοκληρωτικά υπόλοιπα	83
6.1	Εισαγωγή	83
6.1.1	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	90

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματική ρίζα, γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μεγαλύτερο ή ίσο με μηδέν. Ας δεχτούμε διαισθητικά ότι υπάρχει ένας μη πραγματικός αριθμός (φανταστικός) i που να είναι λύση αυτής της εξίσωσης. Τότε $i^2 = -1$. Με την αποδοχή ενός τέτοιου αριθμού μπορούμε να θεωρούμε παραστάσεις της μορφής $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Επεκτείνοντας το λογισμό των πραγματικών αριθμών σε αυτές τις παραστάσεις μπορούμε να κάνουμε πράξεις όπως :

$$(i) \quad (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(ii) \quad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

1.1.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Αν K σώμα, $p(x)$ ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω του K , τότε υπάρχει μια επέκταση του K , $K(\vartheta)$, ώστε στο αλγεβρικό σώμα $K(\vartheta)$ το στοιχείο ϑ θα είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)$, $\pi(\vartheta)=0$.

Ορισμός 1.1.1. (Hamilton)

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$ και είναι $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Έτσι, μιγαδικός αριθμός z είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, δηλαδή $z = (a, b)$ με $a, b \in \mathbb{R}$

Στο $\mathbb{C}$ ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ως εξής :

Πρόσθεση : $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Πολλαπλασιασμός : $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$.

Επίσης, θέτουμε $0 = (0, 0)$ και $1 = (1, 0)$.

Θεώρημα 1.1.2. Το σύστημα $\langle \mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ είναι ένα αλγεβρικό σώμα.

Απόδειξη:

$z \cdot 1 = z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έστω $z = (a, b)$. Τότε $z \cdot 1 = (a, b)(1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = z$.

■

Υπαρξη πολλαπλασιαστικού αντίστροφου

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0, z = (a, b) \neq (0, 0), a^2 + b^2 \neq 0$. Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ και έχουμε $wz = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) (a, b) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ba}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0 \right) = (1, 0) = 1$

Πρόταση 1.1.3. Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(a) = (a, 0)$ είναι ομομορφισμός και 1-1, άρα είναι αλγεβρική εμφύτευση.

Απόδειξη:

$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Πράγματι, $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

$\varphi(a)\varphi(b) = (a, 0)(b, 0) = (ab - 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (ab, 0) = \varphi(ab)$.

Έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathbb{R}$ με το $\varphi(\mathbb{R})$, δηλαδή $\mathbb{R} \equiv \varphi(\mathbb{R})$ και κάθε πραγματικό αριθμό με την εικόνα του, δηλαδή $a \equiv \varphi(a), a \equiv (a, 0)$. Με αυτήν την έννοια έχουμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και κάθε πραγματικός αριθμός είναι μιγαδικός.

■

Ορισμός 1.1.4. Θέτουμε $i = (0, 1)$.

Πρόταση 1.1.5. Ο αριθμός i είναι ρίζα του πολυωνύμου $z^2 + 1 = 0$.

Απόδειξη:

Πρέπει να δείξουμε ότι $i^2 = -1$. Πράγματι, έχουμε ότι $i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$.

■

Πρόταση 1.1.6. Αν $z = (a, b)$ είναι ο μιγαδικός αριθμός, τότε $z = a + bi$.

Απόδειξη:

$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$. Επίσης, $(b, 0)(0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (0, b)$. Άρα $z = (a, b) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$.

1.1.2 Γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών-Μιγαδικό επίπεδο-Επίπεδο Gauss

Εφόσον κάθε μιγαδικός αριθμός z είναι διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών $z = (a, b)$ μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο του επιπέδου.

Ορισμός 1.1.7. Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$

Ο πραγματικός αριθμός a καλείται πραγματικό μέρος του z και συμβολίζεται με $Re(z)$. $Re(z) = a$.

Ο πραγματικός αριθμός b καλείται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $Im(z)$, $Im(z) = b$.

Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός z είναι $z = Re(z) + iIm(z)$.

Ο συζυγής του z είναι ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z} = a - bi = Re(z) - iIm(z)$.

Το μέτρο ή η απόλυτη τιμή του z είναι : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$.

Πρόταση 1.1.8. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$. Τότε:

- (i) $\bar{\bar{z}} = z$.
- (ii) $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
- (iii) $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (iv) $|z| = |\bar{z}|$.
- (v) $z\bar{z} = |z|^2$.
- (vi) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Πρόταση 1.1.9. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) $Re(z + w) = Re(z) + Re(w)$.
- (ii) $Im(z + w) = Im(z) + Im(w)$.
- (iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- (iv) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
- (v) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$.

Πρόταση 1.1.10. Αν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν :

- (i) $|Re(z)| \leq |z|$.
- (ii) $|Im(z)| \leq |z|$.

$$(iii) \quad |zw| = |z||w|.$$

$$(iv) \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

Απόδειξη:

Ενδεικτικά θα αποδείξουμε το τελευταίο. Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Αν $z + w = 0$ η ανισότητα είναι προφανής. Έστω ότι $z + w \neq 0$. Θέτουμε $v = \frac{|z+w|}{z+w}$. Τότε $|v| = 1$. Επίσης, $|z + w| = v(z + w) = vz + vw$. Έπεται ότι $vz + vw$ είναι πραγματικός αριθμός και επομένως $vz + vw = \operatorname{Re}(vz + vw) = \operatorname{Re}(vz) + \operatorname{Re}(vw)$. Άρα $|v + w| = \operatorname{Re}(vz) + \operatorname{Re}(vw) \leq |vz| + |vw| = |v||z| + |v||w| = |z| + |w|$. Έτσι, $|z + w| \leq |z| + |w|$. ■

1.1.3 Παράσταση μιγαδικού αριθμού με πολικές συντεταγμένες

Αν γνωρίζουμε τη γωνία θ και το r τότε γνωρίζουμε το μιγαδικό αριθμό $z = r \cos \theta + i \sin \theta$. Ο πραγματικός αριθμός r καλείται πολική ακτίνα και είναι το μέτρο του z , $r = |z|$. Η γωνία θ είναι ένα όρισμα του z . Έχουμε, λοιπόν, ότι

$$(1.1) \quad z = r \cos \theta + i \sin \theta.$$

Θεώρημα 1.1.11. (ταυτότητα του Euler) Ισχύει ότι $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Έτσι η παράσταση του μιγαδικού αριθμού z με πολικές συντεταγμένες γίνεται $z = re^{i\theta}$.

1.1.4 Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

Έστω μιγαδικοί αριθμοί z, w με $(z, w \neq 0)$ και $z = re^{i\theta}$ και $w = \rho e^{i\varphi}$. Τότε $zw = r\rho e^{i\theta + i\varphi}$. Έτσι, το γινόμενο zw προκύπτει από μια ομοιοθεσία και ακόλουθα μια στροφή.

Πόρισμα 1.1.12. (τύπος de Moivre)

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Απόδειξη:

Από την ταυτότητα του Euler, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. ■

Παράδειγμα 1.1.13. (i) $w^3 = 1 \Rightarrow w^3 - 1 = (w - 1)(w^2 + w + 1)$.

(ii) $w^7 = 1 \Rightarrow w^7 - 1 = (w - 1)(w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1)$.

Σημείωση 1.1.14. Ισχύει ότι $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη:

Έχουμε $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

($\Leftarrow$) $\theta = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{K} \Rightarrow \cos \theta = 1$ και $\sin \theta = 0$, οπότε $e^{i\theta} = 1$.

($\Rightarrow$) $e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \cos \theta = 1$ και $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 2\kappa\pi$.

■

1.1.5 Οι n -οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού

Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ οι n -οστές ρίζες του z είναι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί w που επαληθεύουν την εξίσωση $w^n = z$.

1.1.6 Έυρεση των n -οστών ριζών ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$.

Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Θέλουμε να βρούμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς w με την ιδιότητα $w^n = z, n \in \mathbb{N}$ σταθερός αριθμός (1). Ο z παρίσταται ως εξής: $z = re^{i\theta}$.

Έστω $w = \rho e^{i\varphi}$ μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί την εξίσωση (1). Τότε $w^n = z, \rho^n e^{i(n\varphi)} = re^{i\theta}$. Έπεται $\rho^n = r$ οπότε $\rho = r^{\frac{1}{n}}$. Έπεται $e^{i(n\varphi)} = e^{i\theta}$ ή $e^{i(n\varphi - \theta)} = 1$, ισοδύναμα $n\varphi - \theta = 2\kappa\pi$, κ ακαίρεος, άρα $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\kappa\pi}{n}$.

συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης (1) δίνονται από την $w_\kappa = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\kappa\pi}{n})}, \kappa \in \mathbb{K}$. θεωρούμε $\kappa = l_n + v, 0 \leq v \leq n-1$. Τότε $e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\kappa\pi}{n})} = e^{i2l_n\pi} = 1$.

Έπεται ότι όλες ανά δύο διαφορετικές λύσεις της (1) δίνονται από :

$$w_\kappa = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\kappa\pi}{n})}, \kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Όταν $z = 1$ έχουμε τις n -οστές ρίζες της μονάδας που δίνονται από την $w_\kappa = e^{\frac{2\kappa\pi}{n}i}, \kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Επιπλέον, έχουμε ότι $e^{i\theta} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

Παρατήρηση

Το σύνολο των n -οστών ριζών της μονάδας με πράξη τον πολλαπλασιασμό είναι μια Αβελιανή ομάδα, μάλιστα κυκλική.

1.1.7 Η τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$

Εφόσον $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ είναι εφοδιασμένο με μια μετρική, την Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^2$. Αυτή η μετρική είναι η εξής: $\varrho : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} : \varrho(z, w) = \|z - w\| = |z - w|$. Η μετρική ϱ

παράγει μια τοπολογία στο $\mathbb{C}$ που είναι ακριβώς η Ευκλείδεια τοπολογία του $\mathbb{R}^2$ και θα τη θεωρήσουμε γνωστή. Σημειώνουμε, επίσης, ότι $z_n \rightarrow z \Leftrightarrow |z_n - z| \rightarrow 0$.

Θεώρημα 1.1.15. (συμβιβαστικότητα της αλγεβρικής δομής με την τοπολογική δομή του $\mathbb{C}$). Έστω z_n, w_n ακολουθίες στο $\mathbb{C}$ με $z_n \rightarrow z$ και $w_n \rightarrow w$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $z_n + w_n \rightarrow z + w$.

(ii) $z_n w_n \rightarrow zw$.

(iii) Αν $w_n \neq 0 \forall n$ και $w \neq 0$ τότε $\frac{z_n}{w_n} \rightarrow \frac{z}{w}$.

Σημείωση 1.1.16. Πολυώνυμο μιγαδικής μεταβλητής είναι μια συνάρτηση $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$ σταθεροί αριθμοί, $z \in \mathbb{C}$, $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$.

Πρόταση 1.1.17. Κάθε πολυώνυμο είναι συνεχής συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της.

Ορισμός 1.1.18. Μια μιγαδική συνάρτηση f είναι ρητή αν είναι της μορφής $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{(q)}$ όπου p, q είναι πολυώνυμα και $\mathbb{Z}_{(q)}$ είναι το σύνολο των ριζών του q .

Πρόταση 1.1.19. Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(z) = \bar{z}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη :

Για $z, w \in \mathbb{C}$ έχουμε $|\varphi(z) - \varphi(w)| = |\bar{z} - \bar{w}| = |\overline{(z - w)}| = |z - w|$ δηλαδή η φ είναι ισομετρία και άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

■

Κεφάλαιο 2

Συνεκτικότητα

2.1 Συνεκτικά σύνολα

Ορισμός 2.1.1. Έστω (X, ϱ) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Το E καλείται συνεκτικό σύνολο αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $A, B \subseteq X$ τέτοια ώστε :

- (i) $E \subseteq A \cup B$.
- (ii) $E \cap A \neq \emptyset, E \cap B \neq \emptyset$.
- (iii) $E \cap A \cap B = \emptyset$.

Ο χώρος X είναι συνεκτικός αν το σύνολο X είναι συνεκτικό. Ισοδύναμα, ο χώρος X είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε :

- (i) $X = A \cup B$.
- (ii) $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$.
- (iii) $A \cap B = \emptyset$.

Πρόταση 2.1.2. Έστω (X, ϱ) μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) Το E είναι συνεκτικό.
- (ii) Ο μετρικός χώρος $(E, \varrho|_E)$ είναι συνεκτικός.

Απόδειξη:

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα ανοικτά σύνολα στο μετρικό χώρο $(E, \varrho|_E)$ είναι ακριβώς τα σύνολα της μορφής $E \cap A$, όπου A ανοιχτό στον X .



Θεώρημα 2.1.3. Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μια συνάρτηση συνεχής και επί. Τότε αν ο X είναι συνεκτικός και ο Y είναι επίσης συνεκτικός.

Θεώρημα 2.1.4. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό $\Leftrightarrow E$ είναι διάστημα οποιασδήποτε μορφής (πεπερασμένο ή άπειρο) όπως παραδείγματος χάριν τα ακόλουθα : (a, b) , $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$.

Πρόταση 2.1.5. Έστω X μετρικός χώρος. Ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν τα μόνα ανοιχτά-κλειστά υπόσύνολα του X είναι ακριβώς το X και το $\emptyset$.

Απόδειξη :

($\Rightarrow$)

Υποθέτουμε ότι ο X είναι συνεκτικός. Έστω ότι υπάρχει $A \subseteq X$ ανοιχτό-κλειστό με $A \neq \emptyset$. Τότε το $B = X - A$ είναι ανοιχτό καθώς το A είναι κλειστό και έχουμε $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ γιατί $X - B = A \neq X$. Επομένως, ο X δεν είναι συνεκτικός, άτοπο.

($\Leftarrow$)

Ας υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν ανοιχτά σύνολα $A, B \subseteq X$ ώστε $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$. Από τις (1) και (3) έπεται ότι $A = X - B$ είναι κλειστό καθώς το B είναι ανοιχτό, δηλαδή το A είναι κλειστό. Έχουμε όμως ότι $A \neq X$ διότι $B \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$. Έτσι, παίρνουμε το άτοπο.

■

Λήμμα 2.1.6. Έστω X μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

(i) Ο X δεν είναι συνεκτικός.

(ii) Υπάρχει συνάρτηση $\varphi : X \rightarrow \{0, 1\}$ συνεχής επί. Το $\{0, 1\}$ έχει τη διακριτή τοπολογία.

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq X$ ανοιχτά ώστε $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ και $A \cap B = \emptyset$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : X \rightarrow \{0, 1\}$ ώστε

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in A \\ 1 & \text{αν } x \in B \end{cases}$$

Η φ είναι καλά ορισμένη διότι $X = A \cup B$ και $A \cap B = \emptyset$. Εφόσον $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ η φ είναι επί. Η φ είναι συνεχής γιατί $\varphi^{-1}(\{0\}) = A$ και $\varphi^{-1}(\{1\}) = B$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω ότι υπάρχει $\varphi : X \rightarrow \{0, 1\}$ συνεχής και επί. Τότε το σύνολο $A = \varphi^{-1}(\{0\})$ είναι ανοιχτό-κλειστό διότι $\{0\}$ είναι ανοιχτό-κλειστό στο $\{0, 1\}$. Επίσης, $A \neq \emptyset$ καθώς η φ είναι επί, $A \neq X$ καθώς η φ είναι επί. Έτσι, το A είναι ανοιχτό-κλειστό και $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ που σημαίνει ότι ο X δεν είναι συνεκτικός.

Θεώρημα 2.1.7. Έστω X μετρικός χώρος και $(A_i)_i$ οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X , ώστε $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Τότε η ένωση $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη :

Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι συνεκτικό. Τότε από το λήμμα 2.1.6 έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση $\varphi : A \rightarrow \{0, 1\}$ συνεχής επί. Επιλέγουμε $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A$. Έστω ότι $\varphi(x_0) = 0$. Εφόσον η φ είναι επί υπάρχει $x_1 \in A$ ώστε $\varphi(x_1) = 1$. Υπάρχει $i_1 \in I$ ώστε $x_1 \in A_{i_1}$. Έχουμε, επίσης, ότι $x_0 \in A_{i_1}$. Επομένως, $\varphi|_{A_{i_1}} : A_{i_1} \rightarrow \{0, 1\}$. Επίσης, $\varphi|_{A_{i_1}}$ είναι συνεχής. Άρα από το λήμμα 2.1.6 το A_{i_1} δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

Πρόταση 2.1.8. Έστω X μετρικός χώρος και ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συνεκτικών υποσυνόλων του X , ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Τότε το σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη:

Θέτουμε $E_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$, $n = 1, 2, \dots$ και θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι για κάθε n , το E_n είναι συνεκτικό.

Για $n = 1$ έχουμε ότι το $E_1 = A_1$ είναι συνεκτικό.

Επαγωγικό βήμα : Υποθέτουμε για κάποιο n ότι το E_n είναι συνεκτικό. Έχουμε $E_{n+1} = E_n \cup A_{n+1}$ και $E_n \cap A_{n+1} \supseteq A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ και εφόσον E_n συνεκτικό (από επαγωγική υπόθεση) και A_{n+1} συνεκτικό από υπόθεση, έπεται ότι η ένωση $A_n \cup A_{n+1}$ είναι σύνολο συνεκτικό, δηλαδή E_{n+1} είναι συνεκτικό.

Έχουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq A_1 \neq \emptyset$. Άρα η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι σύνολο συνεκτικό, δηλαδή το A είναι συνεκτικό.

2.1.1 Συνεκτική συνιστώσα

Ορισμός 2.1.9. Έστω X μετρικός χώρος και $E \subseteq X$. Το E είναι συνεκτική συνιστώσα του X αν το E είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X , δηλαδή

- (i) Το E είναι συνεκτικό και
- (ii) Αν $E \subseteq E_1 \subseteq X$ και E_1 είναι συνεκτικό τότε $E = E_1$

Μια συνεκτική συνιστώσα του X είναι κλειστό σύνολο αν E είναι συνεκτική συνιστώσα του X , τότε $E \subseteq \bar{E}$ και $\bar{E}$ είναι συνεκτικό, άρα $E = \bar{E}$ που σημαίνει ότι το E είναι κλειστό.

Σημείωση 2.1.10. (i) Έστω $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{Z}$ είναι όλα τα μονοσύνολα.

- (ii) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του U είναι ανοικτά σύνολα.
- (iii) Έστω X συνεκτικός μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $f[X]$ είναι διάστημα. Αν η f παίρνει μόνο ακέραιες τιμές τότε η f είναι σταθερή.
- (iv) Αν E_1, E_2 είναι δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου X τότε $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Πρόταση 2.1.11. Έστω X μετρικός χώρος. Τότε

$$X = \bigcup \{E \subseteq X \mid E \text{ συνεκτική συνιστώσα του } X\}$$

.

Απόδειξη:

Έστω $x \in X$. Θέτουμε

$$E_x = \bigcup \{E \subseteq X \mid E \text{ συνεκτική συνιστώσα του } X\}$$

Το E_x είναι συνεκτική συνιστώσα του χώρου X ($x \in E_x$ γι αυτό το E_x καλείται συνεκτική συνιστώσα του σημείου x). Το E_x είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X . Έστω $E_x \subseteq E_1 \subseteq X$ και E_1 συνεκτικό. Τότε $x \in E_1$ και άρα $E_1 \in X$, άρα $E_1 \subseteq E_x$. Συνεπώς, $E_x = E_1$.

■

Πόρισμα 2.1.12. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό μη κενό. Τότε είτε υπάρχουν $N \in \mathbb{N}$ και ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \dots, I_N$ μη κενά και ξένα ανά δύο ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i$ ή υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ από ανοικτά μη κενά και ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα ώστε $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

Απόδειξη :

Από την πρόταση 2.1.11 έχουμε ότι

$$U = \bigcup \{I \subseteq U \mid I \text{ συνεκτική συνιστώσα του } U\}$$

. Κάθε $I \in U$ είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα το I είναι ανοικτό διάστημα. Επίσης, τα στοιχεία του U είναι μη κενά και ξένα ανά δύο. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι διαχωρίσιμος η οικογένεια U είναι αριθμήσιμη. Έτσι, είτε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $U = \{I_1, \dots, I_N\}$ ή $U = \{I_n \mid n = 1, 2, \dots\}$. Στην πρώτη περίπτωση, $U = \bigcup_{i=1}^N I_i$ και στη δεύτερη $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

■

Πρόταση 2.1.13. Έστω X συνεκτικός μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $f|_{B(x, \varepsilon)}$ είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη :

Έστω $a \in F[X]$. Θέτουμε $A = \{x \in X | f(x) = a\}$. Το A είναι ανοικτό.

Έστω $x \in A$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $F|_{B(x,\varepsilon)}$ είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $t \in B(x,\varepsilon)$ το $f(t) = f(x) = a$ και άρα $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Έτσι, το A είναι ανοικτό.

Το A είναι κλειστό.

Αρκεί να δείξουμε ότι $X - A$ είναι ανοικτό. Έστω $y \in X - A$. Τότε $f(y) \neq a$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $F|_{B(y,\varepsilon)}$ σταθερή, οπότε για κάθε $z \in B(y,\varepsilon)$, $f(z) = f(y) \neq a$, δηλαδή $z \in B(y,\varepsilon) \Rightarrow f(z) \neq a \Rightarrow z \notin A \Rightarrow z \in X - A$ και επομένως $B(y,\varepsilon) \subseteq X - A$. Άρα το $X - A$ είναι ανοικτό.

Όστε το A είναι ανοικτό και κλειστό και καθώς ο X είναι συνεκτικός, $A = Q$ ή $A = \emptyset$ γιατί από τον ορισμό του υπάρχει xA (υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = a$ διότι $a \in f[X]$).

Συνεπώς $A = X$. Επομένως η f είναι σταθερή.

■

Ορισμός 2.1.14. (i) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z, w συμβολίζεται με $[z, w]$ και είναι το σύνολο $[z, w] = \{(1-t)z + tw | t \in [0, 1]\}$. Αν $z = w$ τότε έχουμε ότι $[z, w] = \{z\}$.

(ii) Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$. Η πολυγωνική γραμμή που ορίζει μια n -άδα $(z_1, \dots, z_n)$ συμβολίζεται με $P(z_1, \dots, z_n)$ και είναι το σύνολο $P(z_1, \dots, z_n) = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$

Πρόταση 2.1.15. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα του μιγαδικού επιπέδου είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη :

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Η συνάρτηση $\varphi : [0, 1] \rightarrow [z, w]; \varphi(t) = (1-t)z + tw$ είναι συνεχής και επί. Επομένως, εφόσον το διάστημα $[0, 1]$ είναι συνεκτικό, $\varphi([0, 1]) = [z, w]$ είναι συνεκτικό.

■

Πόρισμα 2.1.16. Κάθε πολυγωνική γραμμή στο μιγαδικό επίπεδο είναι σύνολο συνεκτικό.

Απόδειξη :

Έστω $z_1, \dots, z_n$ σημεία του $\mathbb{C}$. Έχουμε ότι $p(z_1, \dots, z_n) = [z_1, z_2] \cup [z_{n-1}, z_n]$. Επίσης έχουμε $[z_{i-1}, z_{i+1}] = \{z_i\}$ για $i = 1, 2, \dots, n-1$. Άρα από το πόρισμα 2.1.12, η ένωση $p(z_1, \dots, z_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} [z_i, z_{i+1}]$ είναι σύνολο συνεκτικό.

■

Ορισμός 2.1.17. Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$. Το E είναι πολυγωνικά συνεκτικό αν για κάθε $z, w \in E$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή $p(z, w)$ με άκρα z, w ώστε $P(z, w) \subseteq E$.

Ορισμός 2.1.18. Ένα υποσύνολο E του $\mathbb{C}$ λέγεται κυρτό αν για κάθε $z, w \in E$ το ευθύγραμμο τμήμα $[z, w]$ περιέχεται στο E .

Ορισμός 2.1.19. Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Ο ανοικτός δίσκος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι ο

$$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

Ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι ο

$$\bar{\Delta}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

Ο αντίστοιχος κύκλος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι ο

$$C(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Σημείωση 2.1.20. Κάθε κλειστός καθώς και κάθε ανοικτός δίσκος του $\mathbb{C}$ είναι κυρτό σύνολο.

Πρόταση 2.1.21. Έστω $E \subseteq \mathbb{C}$ πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο. Τότε το E είναι συνεκτικό.

Απόδειξη:

Έστω $z_0 \in E$. Για κάθε $z \in E$ επιλέγουμε πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0 και z ώστε $p(z_0, z) \subseteq E$. Τότε, $\bigcup_{z \in E} p(z_0, z) = E$. Για κάθε $z \in E$ το σύνολο $p(z_0, z)$ είναι συνεκτικό σύνολο και επίσης $z_0 \in \bigcup_{z \in E} p(z_0, z)$. Άρα, το σύνολο $\bigcup_{z \in E} p(z_0, z) = E$ είναι συνεκτικό σύνολο. ■

Πόρισμα 2.1.22. Κάθε κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικό σύνολο και ειδικά το $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικό. Κάθε ανοικτός καθώς και κάθε κλειστός δίσκος είναι σύνολα συνεκτικά.

Σημείωση 2.1.23. Κάθε κύκλος είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη :

Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Έχουμε : $C(a, r) = \{a + re^{it} | t \in [0, 2\pi]\}$. Η συνάρτηση $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow C(a, r)$ με $\gamma(t) = a + re^{it}$ είναι συνεχής επί, άρα $\gamma([0, 2\pi]) = C(a, r)$ είναι συνεκτικό σύνολο. ■

Θεώρημα 2.1.24. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα :

(i) Το Ω είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

(ii) Το Ω είναι συνεκτικό.

Απόδειξη :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έχει αποδειχθεί.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $z_0 \in \Omega$ σταθερό. Θέτουμε

$$A = \{z \in \Omega : \exists \text{ πολυγωνική γραμμή } p(z_0, z) \text{ με άκρα } z_0, z \text{ έτσι ώστε } p(z_0, z) \subseteq \Omega\}$$

(i) Το A στο μετρικό χώρο Ω είναι ανοικτό.

Έστω $z \in A \subseteq \Omega$. Εφόσον το Ω είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Υπάρχει πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0, z ώστε $p(z_0, z) \subseteq \Omega$. Για κάθε $w \in \Delta(z, \varepsilon)$ έχουμε ότι $[z, w] \subseteq \Delta(z, \varepsilon)$ (γιατί το $\Delta(z, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο). Επομένως η πολυγωνική γραμμή $p(z_0, z) \cup [z, w]$ περιέχεται στον Ω και άρα $w \in A$. Συνεπώς $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq A$. Έτσι, το A είναι ανοικτό.

(ii) Το A στο μετρικό χώρο Ω είναι κλειστό. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\Omega - A$ είναι ανοικτό σύνολο στο μετρικό χώρο Ω . Έστω $z \in \Omega - A$. Εφόσον το Ω είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$.

Ισχυρισμός : $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega - A$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \Delta(z, \varepsilon)$ τέτοιο ώστε $w \notin \Omega - A$. Τότε $w \in A$. Από τον ορισμό του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή με άκρα z_0, z ώστε $p(z_0, z) \subseteq \Omega$. Εφόσον το $\Delta(z, \varepsilon)$ είναι κυρτό σύνολο, το ευθύγραμμο τμήμα $[z, w] \subseteq \Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Επομένως η πολυγωνική γραμμή $p(z_0, z) \cup [z, w] \subseteq \Omega$ και άρα $z \in A$, άτοπο. Επομένως, $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq \Omega - A$. Έτσι, $\Omega - A$ είναι ανοικτό στο μετρικό χώρο Ω . Δηλαδή έχουμε ότι A είναι ανοικτό-κλειστό στο μετρικό χώρο Ω . Εφόσον το Ω είναι συνεκτικό είτε $A = \Omega$ είτε $A = \emptyset$. Όμως, $A \neq \emptyset$ διότι $z_0 \in A$. Άρα $A = \Omega$.

■

Ορισμός 2.1.25. Ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό καλείται τόπος.

2.1.2 Συμπαγές επίπεδο των μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε ένα στοιχείο $\infty \notin \mathbb{C}$ και θέτουμε $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Μια ακολουθία $\{z_n\}$ στο $\mathbb{C}$ συγχλίνει στο ∞ , δηλαδή $z_n \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν $|z_n| \rightarrow \infty$.

2.1.3 Ολόμορφες συναρτήσεις

Ορισμός 2.1.26. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και $f : A \rightarrow \mathbb{C}$.

(i) Το πραγματικό μέρος της f συμβολίζεται με $Re f$ και είναι η συνάρτηση

$$Re f : A \rightarrow \mathbb{R} : (Re f)(z) = Re(f(z)).$$

(ii) Το φανταστικό μέρος της f συμβολίζεται με Imf και είναι η συνάρτηση

$$Imf : A \rightarrow \mathbb{R} : (Imf)(z) = Im(f(z)).$$

Είναι σαφές ότι $f = Ref + iImf$

(iii) Η συζυγής συνάρτηση της f είναι η $\bar{f} = Ref - iImf$.

Ορισμός 2.1.27. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ και $a \in \Omega$. Υπάρχει η μιγαδική παράγωγος της f στο a αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Ισοδύναμα, αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

. Η μιγαδική παράγωγος της f στο a όταν υπάρχει συμβολίζεται με $f'(a)$. Είναι, λοιπόν,

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Θεώρημα 2.1.28. (Συνθήκες Cauchy) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $a = x_0 + iy_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, έστω $u = Ref$ και $v = Imf$, $f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(a)$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a), \frac{\partial u}{\partial y}(a), \frac{\partial v}{\partial x}(a), \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

και ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες που καλούνται συνθήκες Cauchy-Riemann :

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

Απόδειξη :

Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \left(\frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \right). \end{aligned}$$

. Επομένως, υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h}$$

και

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a), \frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

και

$$(2.1) \quad f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(a + ih) - f(a)}{ih} = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \left(\frac{v(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} - \frac{iu(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} \right) \end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a), \frac{\partial v}{\partial y}(a)$$

και

$$(2.2) \quad f'(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

Άρα $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ και $\frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a)$

■

Πόρισμα 2.1.29. Με τις υποθέσεις του θεωρήματος $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial X}(a) = -i \frac{\partial u}{\partial Y}(a)$ και $f'(a) = \frac{\partial v}{\partial Y}(a) + i \frac{\partial u}{\partial X}(a)$

Πόρισμα 2.1.30. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ και $a \in \Omega$ ώστε να υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(a)$.

(i) Αν $f[\Omega] \subseteq \mathbb{R}$, τότε $f'(a) = 0$.

(ii) Αν $f[\Omega] \subseteq i\mathbb{R}$ τότε $f'(a) = 0$.

Απόδειξη :

Άμεση συνέπεια των τύπων του Θεωρήματος 2.1.28

■

Ορισμός 2.1.31. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και μιγαδική συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Η f καλείται ολόμορφη στο Ω αν υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Θεώρημα 2.1.32. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Έστω επίσης $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο Ω $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες *Cauchy-Riemann* σε κάθε σημείο του Ω , δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) \forall z \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z) \forall z \in \Omega.$$

Ορισμός 2.1.33. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό. Συμβολίζουμε με $H(\Omega)$ το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Ω .

Θεώρημα 2.1.34. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε η f είναι σταθερή στο Ω .

Λήμμα 2.1.35. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και συνάρτηση $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$ και $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \forall x, y \in \Omega$. Τότε η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο Ω .

Απόδειξη λήμματος:

Έστω $\varepsilon > 0$ ώστε το τετράγωνο $V = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ να περιέχεται στο Ω . Για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi_y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi_y(x) = \varphi(x, y)$. Τότε έχουμε $\varphi'_y(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Επομένως $\varphi_y(x) = \varphi_y(x_0) \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Δηλαδή

$$(2.3) \quad \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y) \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon].$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\varphi_{x_0} : [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi_{x_0}(y) = \varphi(x_0, y)$. Τότε $\varphi'_{x_0}(y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y) = 0 \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Επομένως $\varphi_{x_0}(y) = \varphi_{x_0}(y_0) \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Δηλαδή

$$(2.4) \quad \varphi(x_0, y) = \varphi(x_0, y_0) \forall y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon].$$

Από τις 5.1.1, 5.1.2 έπεται ότι για κάθε $(x, y) \in V$, $\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y) = \varphi(x_0, y_0)$. Έτσι, η φ είναι σταθερή στο V . Από την Πρόταση έπεται ότι η συνάρτηση φ είναι σταθερή στο Ω .

■

Απόδειξη θεωρήματος :

Έχουμε

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z).$$

και

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Για κάθε $z \in \Omega$ $f'(z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0$. Από το Λήμμα 2.1.35 έπεται ότι $u(z) = c_1 \forall z \in \Omega$ και $v(z) = c_2$. Άρα $f(z) = u(z) + iv(z) = c_1 + ic_2, \forall z \in \Omega$. ■

Πρόταση 2.1.36. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a \in \Omega, r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$ και έστω $f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}(z), \frac{\partial u}{\partial y}(z), \frac{\partial v}{\partial x}(z), \frac{\partial v}{\partial y}(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και είναι συνεχής. Τότε αν στο a ικανοποιούνται οι συνθήκες *Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a), \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a),$$

υπάρχει η μιγαδική παράγωγος $f'(a)$.

Θεώρημα 2.1.37. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ στο Ω και ικανοποιούνται οι συνθήκες *Cauchy-Riemann* σε κάθε σημείο του Ω . Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω .

Σημείωση 2.1.38. Ισχύει και το αντίστροφο.

2.1.4 Οι διαφορικοί τελεστές $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Θέτουμε

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ και}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Θεώρημα 2.1.39. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f = u + iv$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι στο Ω , $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ και είναι συνεχείς. Τότε η f έχει μιγαδική παράγωγο ακριβώς στα σημεία $z \in \Omega$ στα οποία ισχύει :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0.$$

Η μιγαδική παράγωγος στα σημεία αυτά δίνεται από τη σχέση

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Παράδειγμα 2.1.40. (i) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z} = x - iy$ για $z = x + iy$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$. Επομένως, η f δεν έχει πουθενά μιγαδική παράγωγο.

(ii) Έστω $f(z) = x^2 + y^2$ για $z = x + iy$. Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = z = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Πρόταση 2.1.41. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ και $a \in \Omega$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

- (i) Υπάρχει η παράγωγος $f'(a)$.
- (ii) Υπάρχει συνάρτηση $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής στο a ώστε $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a), z \in \Omega$. Σε αυτήν την περίπτωση, $f'(a) = \varphi(a)$.

Απόδειξη :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{αν } z \neq a \\ f'(a) & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε, $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a)$ για κάθε $z \in \Omega$. Η φ είναι συνεχής στο a :

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a) = \varphi(a),$$

άρα η φ είναι συνεχής στο a . (ii) $\Rightarrow$ (i)

Έχουμε $f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a), z \in \Omega$. Επομένως, $\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \varphi(z)$ για $z \in \Omega$ με $z \neq a$. Εφόσον η φ είναι συνεχής στο a υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z)$$

με

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a)$$

δηλαδή υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \varphi(a)$$

που σημαίνει ότι υπάρχει η $f'(a)$ και $f'(a) = \varphi(a)$.

■

Θεώρημα 2.1.42. (Παραγωγή αντίστροφης συνάρτησης) Έστω $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά σύνολα, $f : \Omega \rightarrow G$ συνεχής και ολόμορφη συνάρτηση $g : G \rightarrow \mathbb{C}$, ώστε

- (i) $g'(w) \neq 0$ για κάθε $w \in G$
- (ii) $G(f(z)) = z$ για κάθε $z \in \Omega$.

Τότε η συνάρτηση f είναι ολόμορφη και $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ για κάθε $z \in \Omega$.

Απόδειξη :

Έστω $a \in \Omega$, τότε $f(z) \in G$. Από την Πρόταση 2.1.41 υπάρχει συνάρτηση $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής στο a ώστε

$$(2.5) \quad g(w) - g(f(a)) = \varphi(w)(w - f(a)).$$

Από τη σχέση 2.5 έπεται ότι για $z \in \Omega$, $g(f(z)) - g(f(a)) = \varphi(f(z))(f(z) - f(a))$, δηλαδή

$$(2.6) \quad z - a = (\varphi \circ f)(z)(f(z) - f(a)) \forall z \in \Omega.$$

Από τη σχέση 2.6 και την υπόθεση έχουμε ότι $(\varphi \circ f)(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ και άρα $f(z) - f(a) = \frac{1}{(\varphi \circ f)(z)}(z - a) \forall z \in \Omega$.

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $f(a)$ και η f στο a , άρα η $\varphi \circ f$ είναι συνεχής στο a και επομένως η $\frac{1}{\varphi \circ f}$ είναι συνεχής στο a . Άρα από την Πρόταση 2.1.41 έχουμε ότι υπάρχει η $f'(a)$ και $f'(a) = \frac{1}{(\varphi \circ f)(a)} = \frac{1}{\varphi(f(a))} = \frac{1}{g'(f(a))}$. Όστε $f'(a) = \frac{1}{g'(f(a))}$. Συνεπώς η f είναι ολόμορφη και $f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$ για κάθε $a \in \Omega$. ■

Παρατηρήσεις 2.1.43. (i) Κάθε πολυώνυμο $p(z)$, $z \in \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση.

(ii) Κάθε ρητή συνάρτηση $Re(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $z \in \mathbb{C}$ - το σύνολο των ριζών του $q(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση $(p(z), q(z))$ πολυώνυμα).

(iii) Οι συνηθισμένοι κανόνες για την πραγματική παραγώγιση ισχύουν και για τη μιγαδική παραγώγιση, μάλιστα μπορούν να αποδειχθούν εύκολα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.1.41.

Ορισμός 2.1.44. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ανοικτό σύνολο. Μια πραγματική συνάρτηση $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται αρμονική αν έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση του Laplace :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Πρόταση 2.1.45. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$. Τότε οι συναρτήσεις u, v είναι αρμονικές συναρτήσεις στο Ω .

Απόδειξη :

Όπως θα δούμε η f έχει μιγαδικές παραγώγους κάθε τάξης. Έτσι, οι συναρτήσεις u, v έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους. Από τις συνθήκες των Cauchy-Riemann έχουμε :

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(ii) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Από τη σχέση (i) έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$ (από θεώρημα Schwarz),

$$\text{δηλαδή } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Από τη σχέση (ii) έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)$.

Από τις τελευταίες σχέσεις έπεται ότι $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

■

Σημείωση 2.1.46. Στους απλά συνεκτικούς τόπους ισχύει και το αντίστροφο.

Κεφάλαιο 3

Σύγκλιση σειρών

3.1 Σειρές

Ορισμός 3.1.1. Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε $s_n = a_1 + \dots + a_n, n = 1, 2, \dots$. Η ακολουθία $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ καλείται σειρά των a_n και συμβολίζεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Επίσης, η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ καλείται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, δηλαδή

αν υπάρχει $s \in \mathbb{C}$ ώστε $s_n \rightarrow s$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων δε συγκλίνει.

Σημείωση 3.1.2. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \infty$.

Πρόταση 3.1.3. Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n)$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$.

Σε αυτήν την περίπτωση αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re} a$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im} a$.

Παράδειγμα 3.1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}$ δε συγκλίνει.

Απόδειξη :

Έχουμε $Re \frac{1}{n+i} = \frac{n}{n^2+1}$, $Im \frac{1}{n+i} = -\frac{1}{n^2+1}$. Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = +\infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+i}$ αποκλίνει. ■

Πρόταση 3.1.5. Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη :

Έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|Re(a_n)| \leq |a_n|$, $|Im(a_n)| \leq |a_n|$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |Re(a_n)| < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |Im(a_n)| < \infty$. Επομένως, οι σειρές $\sum Re(a_n)$ και $\sum Im(a_n)$ συγκλίνουν. Από την Πρόταση 3.1.3 έπεται ότι η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει. ■

Ορισμός 3.1.6. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών.

- (i) Ένας πραγματικός αριθμός s καλείται σημείο συσσώρευσης της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - s| < \varepsilon\}$ είναι άπειρο δηλαδή στο διάστημα $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ ανήκουν άπειροι όποι της ακολουθίας (a_n) .

Παράδειγμα 3.1.7. Έστω $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$. Τα σημεία συσσώρευσης της a_n είναι τα $-1, 1$.

- (ii) Το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n) αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη. Το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης της (a_n) αν η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη.

Ορισμός 3.1.8. Έστω $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$A = \{s \in \mathbb{R} : s \text{ είναι σημείο συσσώρευσης της } (a_n)\}.$$

Τότε το $A \neq \emptyset$ από Bolzano-Weierstrass. Το *limes superior* της (a_n) είναι εξορισμού

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \max A$$

ή

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \max A$$

Σημείωση 3.1.9. Αν μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_n$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Παρατηρήσεις 3.1.10. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

(i)

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$$

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ στο διάστημα $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ανήκουν άπειροι όροι της ακολουθίας, ενώ στο διάστημα $(a + \varepsilon, +\infty)$ ανήκουν μόνο πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας.

3.1.1 Η γεωμετρική σειρά

Ορισμός 3.1.11. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$ καλείται γεωμετρική σειρά με λόγο z .

Πρόταση 3.1.12. (i) Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, τότε η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγ-

κλίνει απολύτως και $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$. Επομένως $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

(ii) Αν $|z| \geq 1$ τότε η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει.

Απόδειξη :

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $s_n = \sum_{i=0}^n |z|^i$ τότε $s_n = 1 + |z| + |z|^2 + \dots + |z|^n = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$

καθώς το $|z| < 1$, $|z|^{n+1} \rightarrow 0$ και άρα $s_n \rightarrow \frac{1}{1-|z|}$. Έτσι, $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$. Άρα η

σειρά συγκλίνει απολύτως. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|}$.

- (ii) Αν $|z| \geq 1$ τότε $|z^n| = |z|^n \geq 1 \forall n$, άρα $z^n \nrightarrow 0$, επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ δε συγχλίνει.

■

Πρόταση 3.1.13. Έστω σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

- (i) Αν $a < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγχλίνει απολύτως.
(ii) Αν $a > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
(iii) Αν $a = 1$, τότε και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατές.

Απόδειξη :

- (i) Επιλέγουμε $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a < \beta < 1$. Από την Παρατήρηση υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι όποι της ακολουθίας $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ με την ιδιότητα $|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \beta$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \beta$. Έπεται ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $|a_N| \leq \beta^N$, $|a_{N+1}| \leq \beta^{N+1}, \dots, |a_{N+\kappa}| \leq \beta^{N+\kappa}$. Άρα $\sum_{i=0}^{\kappa} |a_{N+i}| < \sum_{i=0}^{\kappa} \beta^{N+i} = \beta^N \sum_{i=0}^{\kappa} \beta^i < \beta^N \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i$. Έτσι, $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{N+i}| < \infty$. Συνεπώς $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum_{i=0}^{\infty} |a_{N+i}| < \infty$.
(ii) Εφόσον $a > 1$ η σχέση $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ ισχύει για άπειρα n , οπότε $|a_n| > 1$ για άπειρα n και άρα δεν μπορεί $a_n \rightarrow 0$, δηλαδή $a_n \nrightarrow 0$. Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

■

Πρόταση 3.1.14. (Κριτήριο λόγου) Έστω η σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ώστε $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a \in \mathbb{R}$$

Τότε

(i) αν $a < 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) αν $a > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(iii) αν $a = 1$ και οι δύο περιπτώσεις είναι δυνατές.

Παράδειγμα 3.1.15. (i) $H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ $a_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$.

(ii) $H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ενώ $a_n = \frac{1}{n^2}$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \rightarrow 1$.

3.1.2 Σειρές μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 3.1.16. Έστω σύνολο $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots$ και $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Γ . Θέτουμε $s_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z), z \in \Gamma$. Η ακολουθία συναρτήσεων $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}, z \in \Gamma$ καλείται σειρά των f_n και συμβολίζεται με $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ ή $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Επίσης, η ακολουθία συναρτήσεων $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}, z \in \Gamma$ καλείται ακολουθία μερικών αθροισμάτων των $f_n(z), z \in \Gamma$.

Ορισμός 3.1.17. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma, \Gamma \subseteq \mathbb{C}$ μια σειρά μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Γ και συνάρτηση $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$.

(i) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ συγκλίνει στη συνάρτηση $f(z), z \in \Gamma$ αν $s_n(z) \rightarrow f(z)$ για κάθε $z \in \Gamma$ (όπου $(s_n(z))_{n=0}^{\infty}$ είναι η αντίστοιχη ακολουθία μερικών αθροισμάτων). Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z), z \in \Gamma$ ή $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ κατά σημείο.

(ii) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του Γ προς τη συνάρτηση $f(z), z \in \Gamma$ ν $s_n(z) \rightarrow f(z)$ ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$ ή $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα επί του Γ .

Θεώρημα 3.1.18. Έστω $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$ μια σειρά μιγαδικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το Γ . Τα εξής είναι ισοδύναμα :

- (i) Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.
- (ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $m \geq n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{\kappa=n}^m f_{\kappa}(z) \right| < \varepsilon, \forall z \in \Gamma$.

Πόρισμα 3.1.19. (*M-κριτήριο του Weierstrass*). Έστω σύνολο $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ και σειρά μιγαδικών συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \Gamma$. Έστω επίσης ακολουθία $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε τα εξής :

- (i) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$.
- (ii) $|f_n(z)| \leq M_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και για κάθε $z \in \Gamma$. Τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.

Απόδειξη :

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ συγκλίνει από το κριτήριο του Cauchy, έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}, m \geq n > n_0 \Rightarrow \sum_{\kappa=n}^m M_{\kappa} < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη συνθήκη του Πορίσματος 3.1.19 παίρνουμε $m \geq n > n_0$ για $z \in \Gamma \Rightarrow \left| \sum_{\kappa=n}^m f_{\kappa}(z) \right| \leq \sum_{\kappa=n}^m |f_{\kappa}(z)| \leq \sum_{\kappa=n}^m M_{\kappa} < \varepsilon$. Όστε $m \geq n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{\kappa=n}^m f_{\kappa}(z) \right| < \varepsilon$ για κάθε $z \in \Gamma$. Άρα από το Θεώρημα 3.1.18 η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \Gamma$.

■

3.1.3 Δυναμοσειρές

Ορισμός 3.1.20. Έστω $a, a_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots$ Για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f_n(z) = a_n(z - a)^n, n = 0, 1, 2, \dots$ Η σειρά συναρτήσεων

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), z \in \mathbb{C}$ καλείται *δυναμοσειρά με κέντρο το a* και συμβολίζεται με

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Λήμμα 3.1.21. (Λήμμα του Abel). Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με $a_n \in \mathbb{C}$ για $n = 0, 1, 2, \dots$. Έστω, επίσης, $z_0 \in \mathbb{C}, z_0 \neq 0$ ώστε η ακολουθία $(|a_n z_0^n|)$ να είναι φραγμένη, δηλαδή να υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n z_0^n| \leq M$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) Για κάθε $z \in \Delta(0, |z_0|)$, δηλαδή $|z| < |z_0|$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Για κάθε $0 < r < |z_0|$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\bar{\Delta}(0, r)$.

Απόδειξη :

(i) Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < |z_0|$. Για κάθε $n = 0, 1, \dots$ έχουμε $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$. Είναι : $\left| \frac{z}{z_0} \right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$. Επομένως, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n < +\infty$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Έστω $0 < r < |z_0|$. Τότε για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ και $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = |a_n z_0^n| \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n \Rightarrow |a_n z^n| \leq M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$. Εφόσον $\frac{r}{|z_0|} < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n < +\infty$. Από το M-κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

■

Ορισμός 3.1.22. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι :

$$R = \sup \{ r \geq 0 : (|a_n| r^n)_{n=0}^{\infty} \text{ είναι φραγμένη} \}.$$

Είναι προφανές ότι $0 \leq R \leq +\infty$.

Πρόταση 3.1.23. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης R . Τότε ισχύουν τα εξής :

- (i) Για κάθε $z \in \Delta(0, R)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.
- (ii) Για κάθε $0 < r < R$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\bar{\Delta}(0, r)$.
- (iii) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < R$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

Σημείωση 3.1.24. Οι συνθήκες (i), (iii) χαρακτηρίζουν την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Απόδειξη :

- (i) Έστω $z \in \Delta(0, r)$, δηλαδή $|z| < R$. Επομένως, υπάρχει $r \in \mathbb{R}$ ώστε $|z| < r$ και η ακολουθία $(|a_n z^n|)_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το λήμμα του Abel.
- (ii) Έστω $0 < r < R$. Τότε υπάρχει r_1 ώστε $r < r_1$ και η ακολουθία $(|a_n| r_1^n)_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από το λήμμα του Abel έπεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \bar{\Delta}(0, r)$.
- (iii) Αν $|z| > R$ τότε η ακολουθία $(|a_n z^n|)_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο 0 και επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

■

Θεώρημα 3.1.25. (Cauchy-Hadamard). Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ όπου $a_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots$. Θέτουμε

$$s = \overline{\lim}(a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι: $R = \frac{1}{s}$ (όπου $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Απόδειξη :

(i) Έστω $z \in \Delta(0, R)$, δηλαδή $|z| < R$, οπότε $|z| < \frac{1}{s}$ και άρα $|z|s < 1$. Έχουμε

$$\overline{\lim} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} |z| \right) = |z| \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = |z|s < 1.$$

Συνεπώς από το κριτήριο ρίζας έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως.

(ii) Έστω $z \notin \bar{\Delta}(0, R)$. Τότε έχουμε

$$\overline{\lim} |a_n z^n| = |z|s.$$

Εφόσον $|z| > R = \frac{1}{s}$, $|z|s < 1$ δηλαδή

$$\overline{\lim} |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Άρα, πάλι από το κριτήριο της ρίζας έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει.

■

Παρατηρήσεις 3.1.26. (i) Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ όπου $a, c_n \in \mathbb{C}, n = 0, 1, \dots$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς αυτής είναι ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ και άρα $R = \frac{1}{\overline{\lim} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$.

(ii) Για κάθε $0 < r < R$ στον κλειστό δίσκο $\bar{\Delta}(a, r)$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n |z-a|^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

(iii) Για $z \notin \bar{\Delta}(a, r)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα 3.1.27. (i) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Έχουμε $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$ οπότε $|c_n|^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ και άρα $\overline{\lim} |c_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{e}$.

(ii) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{n^2}$. Έχουμε $c_m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m^2}$ αν $m = n^2$ και 0 αλλιώς. Έπεται ότι $\overline{\lim} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Πόρισμα 3.1.28. Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ώστε $a_n \neq 0$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in \tilde{\mathbb{R}}.$$

Τότε η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς είναι

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Απόδειξη :

Έπεται από το Θεώρημα 3.1.25 και από το γεγονός ότι αν $a_n \neq 0$ για κάθε n και υπάρχει το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) \in \tilde{\mathbb{R}},$$

τότε υπάρχει και το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

και είναι ίσο με

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

■

Παράδειγμα 3.1.29. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ είναι $R = +\infty$.

Απόδειξη :

Έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$ για κάθε n οπότε $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = n + 1 \rightarrow +\infty$.

■

Θεώρημα 3.1.30. (παραγωγή δυναμοσειρών). Έστω δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, n \in \Delta(0, R)$ όπου $0 < R \leq +\infty$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta(0, R)$ και μάλιστα

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}, z \in \Delta(0, R).$$

Απόδειξη :

(i) Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ είναι επίσης R . Για $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n$ συγκλίνει. Άρα οι δύο τελευταίες δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης R' . Από το Θεώρημα 3.1.25 έχουμε $\frac{1}{R'} = \overline{\lim} (n c_n)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim} \left(n^{\frac{1}{n}} |c_n|^{\frac{1}{n}} \right) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}} \overline{\lim} |c_n|^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{R}.$$

Άρα $R = R'$.

(ii) Έστω $z_0 \in \Delta(0, R)$ σταθερό. Επιλέγουμε $|z_0| < r < R$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ θέτουμε

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} & \text{αν } z \neq z_0 \\ n z_0^{n-1} & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

. Από τον ορισμό έπεται ότι $z^n - z_0^n = (z - z_0) \varphi_n(z)$ για κάθε z, n . (1)

Επίσης, για κάθε $z \neq z_0$, έχουμε $\varphi_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}$ για κάθε z, n . (2)

Από τη σχέση (2) έπεται ότι $\varphi_n(z)$ είναι πολυώνυμο για κάθε n . Για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ και για κάθε n έχουμε : $|\varphi_n(z)| \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2} |z_0| + \dots + |z| |z_0|^{n-2} + |z_0|^{n-1} \leq n r^{n-1}$. Επομένως, $|c_n \varphi_n(z)| = |c_n| |\varphi_n(z)| \leq n |c_n| r^{n-1}, \forall n, \forall z \in \bar{\Delta}(0, r)$ δηλαδή

$$|c_n \varphi_n(z)| \leq n |c_n| r^{n-1}, \forall n, \forall z \in \bar{\Delta}(0, r) \text{ και επίσης } \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n| r^{n-1} < +\infty.$$

Από το Μ-κριτήριο του Weierstrass έχουμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z)$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $z \in \bar{\Delta}(0, r)$. Κάθε $c_n \varphi_n(z)$ είναι πολυώνυμο, άρα είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα η συνάρτηση $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z), z \in \Delta(0, r)$ είναι

συνεχής. Ειδικά είναι συνεχής στο z_0 . Επομένως

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}.$$

Όμως, για $z \in \Delta(0, r)$ με $z \neq z_0$ έχουμε :

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^n - z_0^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0) \varphi_n(z), z \in \Delta(0, r), z \neq z_0.$$

Ωστε

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(z) = g(z), z \in \Delta(0, r), z \neq z_0.$$

Άρα υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}$$

δηλαδή υπάρχει η $f'(z_0)$ και είναι ίση με $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}$.

■

Πόρισμα 3.1.31. Έστω δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in \Delta(a, R)$, όπου $0 < R \leq +\infty$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τότε ισχύουν τα εξής :

(i) Η f είναι απεριορίστα παραγωγίσιμη.

(ii) $f^{(\kappa)}(z) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\kappa+1)c_n(z-a)^{n-\kappa} z \in \Delta(a, R)$ και $\kappa = 0, 1, \dots$

(iii) $c_{\kappa} = \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}, \kappa = 0, 1, \dots$

Απόδειξη :

(i), (ii)

Προκύπτουν με επαναληπτική εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.30.

(iii) Για $z = a$ και για $\kappa = 0, 1, \dots$ παίρνουμε από τον τύπο (ii) ότι $f^{(\kappa)}(a) = \kappa(\kappa-1)\dots(\kappa-\kappa+1)c_{\kappa} = \kappa!c_{\kappa}$ και άρα $c_{\kappa} = \frac{f^{(\kappa)}(a)}{\kappa!}$.

■

Πόρισμα 3.1.32. Έστω $0 < r < R \leq +\infty, a \in \mathbb{C}$ και $f : \Delta(a, R) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$. Τότε $a_n = c_n$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$

Απόδειξη :

Από το Πόρισμα 3.1.31 έχουμε ότι $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, \dots$ και $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n = 0, 1, \dots$. Άρα $a_n = c_n$ για κάθε $n = 0, 1, \dots$

■

Ορισμός 3.1.33. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Η συνάρτηση f καλείται αναλυτική στο Ω ή τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω αν για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$ ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r).$$

Σημείωση 3.1.34. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Η f είναι αναλυτική στο $\Omega \Rightarrow$ η f είναι απεριορίστα παραγωγίσιμη στο $\Omega \Rightarrow$ η f είναι ολόμορφη στο Ω .

Πρόταση 3.1.35. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

- (i) Η f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω .
- (ii) Για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$ ισχύει:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$$

Απόδειξη :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Είναι προφανές.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $a \in \Omega$ και $\varepsilon > 0$ με $\Delta(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Για κάθε $0 < r < \varepsilon$ έχουμε $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Delta(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$.

Άρα για κάθε $0 < r < \varepsilon$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{r,n}(z-a)^n$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Από το Πόρισμα

3.1.31 έχουμε ότι $c_{r,n} = c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, για κάθε $0 < r < \varepsilon$, για κάθε $n = 0, 1, \dots$

Επομένως, έχουμε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ για κάθε $z \in \Delta(0, r)$ για κάθε r με $0 < r < \varepsilon$.

$\Rightarrow z \in \Delta(a, \varepsilon) \Rightarrow |z-a| < \varepsilon \Rightarrow$ υπάρχει $r > 0$ με $(|z-a| < r < \varepsilon \Leftrightarrow$ υπάρχει $r > 0$ με $r < \varepsilon$ και $z \in \Delta(a, r)$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ για κάθε $r \in \Delta(a, \varepsilon)$.



3.1.4 Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης την $R = +\infty$. Έτσι, αυτή η δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{C}$. Καλούμε αυτή τη συνάρτηση εκθετική (exponential) συνάρτηση, δηλαδή η εκθετική συνάρτηση είναι η :

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

Πρόταση 3.1.36. (i) Η συνάρτηση $\exp(z)$ είναι ολόμορφη.

(ii) $\exp(0) = 1$.

(iii) $\exp'(z) = \exp(z)$.

Απόδειξη :

(iii)

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(z).$$



Θέτουμε, επίσης, $e^z = \exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Η e^z είναι η μοναδική ολόμορφη επέκταση στο $\mathbb{C}$ της γνωστής συνάρτησης e^x , $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.1.37. $e^{z+w} = e^z e^w$, για $z, w \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :

Έστω $a \in \mathbb{C}$ σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = e^z e^{a-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Η f είναι ολόμορφη και $f'(z) = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η συνάρτηση f είναι σταθερή, δηλαδή $f(z) = f(z)$ ή $e^z e^{a-z} = f(a) = e^a$ για κάθε $z, a \in \mathbb{C}$. Παίρνουμε $a = z + w$ και τότε $e^z e^w = e^{z+w}$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.



Πόρισμα 3.1.38. Ισχύει ότι $e^z \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ και άρα $e^z \neq 0$.

Πρόταση 3.1.39. $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}, z \in \mathbb{C}$. ■

Απόδειξη :

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\kappa!}$$

Επομένως,

$$\overline{(e^z)} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\kappa!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\kappa!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^{\kappa}}{\kappa!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z})^n}{n!} = e^{\bar{z}}$$

Πρόταση 3.1.40. $|e^z| = e^{Re(z)}, z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $|e^z|^2 = e^z e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2Re(z)} = \left(e^{Re(z)}\right)^2$. Όσπε $|e^z|^2 = \left(e^{Re(z)}\right)^2$ και άρα $|e^z| = e^{Re(z)}, z \in \mathbb{C}$. ■

Πόρισμα 3.1.41. $|e^{it}| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη :

$|e^{it}| = e^{Re(it)} = e^0 = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. ■

Παρατηρήσεις 3.1.42. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης το $+\infty$.

Έχουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής είναι $R = \frac{1}{s}$ όπου

$$s = \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}}$$

και άρα

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} ((2n)!)^{\frac{1}{2n}}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = +\infty$$

Επομένως,

$$R = \overline{\lim}((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((2n)!)^{\frac{1}{2n}} = +\infty$$

Ορισμός 3.1.43. Η συνάρτηση συνημίτονο ορίζεται ως εξής :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$$

Σημείωση 3.1.44. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$.

Ορισμός 3.1.45. Η συνάρτηση ημίτονο ορίζεται ως εξής :

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$$

Σημείωση 3.1.46. Οι συναρτήσεις $\cos z, \sin z$ είναι οι μοναδικές ολόμορφες επεκτάσεις των γνωστών συναρτήσεων $\cos x, \sin x, x \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα.

Πρόταση 3.1.47. (i) $(\sin z)' = \cos z$.

(ii) $(\cos z)' = -\sin z$.

(iii) $\sin(-z) = -\sin z$.

(iv) $\cos(-z) = \cos z$.

Πρόταση 3.1.48. (i) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, z, w \in \mathbb{C}$.

(ii) $\sin(z-w) = \sin z \cos w - \cos z \sin w, z, w \in \mathbb{C}$

(iii) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, z, w \in \mathbb{C}$.

(iv) $\cos(z-w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w, z, w \in \mathbb{C}$

Απόδειξη :

Έστω $a \in \mathbb{C}$ σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \sin z \cos(a-z) + \cos z \sin(a-z), z \in \mathbb{C}$. Έχουμε $f'(z) = \cos z \cos(a-z) + \sin z \sin(a-z) - \sin z \sin(a-z) - \cos z \cos(a-z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η f είναι σταθερή, επομένως $f(z) = f(a)$. Είναι $f(a) = \sin a$, άρα $\sin a = f(z), z \in \mathbb{C}$ δηλαδή $\sin a = \sin z \cos(a-z) + \cos z \sin(a-z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, για κάθε $a \in \mathbb{C}$. Θέτουμε $a = z + w$ και παίρνουμε $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$, για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$.

■

Θεώρημα 3.1.49. (Euler) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη :

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$. Επειδή για κάθε $z \in \mathbb{C}$ η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει απο-

λύτως και άρα μπορούμε να γράψουμε $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έ-

πεται, $e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z$. Όστε $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

■

Πόρισμα 3.1.50. (i) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη :

Από την ταυτότητα του Euler έχουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, (1), $e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin(-z)$ δηλαδή $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, (2). Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη παίρνουμε $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$, δηλαδή $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Αφαιρώντας τη (2) από την (1) παίρνουμε $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$ και άρα $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

■

Σημείωση 3.1.51. Οι συναρτήσεις $\cos z, \sin z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$

Πρόταση 3.1.52. Ισχύει ότι $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi$, κ ακέραιος.

Απόδειξη :

($\Leftarrow$)

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Έστω ότι $z = 2\kappa\pi$, κ ακέραιος. Τότε από την ταυτότητα του Euler, $e^{2\kappa\pi} = \cos(2\kappa\pi) + i \sin(2\kappa\pi) = 1$. ($\Rightarrow$)

Έστω $e^z = 1$, $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $|e^z| = 1$. Όπως γνωρίζουμε, $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} = e^x$, οπότε $e^x = 1$ και άρα $x = 0$. Συνεπώς, $e^{iy} = 1$, οπότε από την ταυτότητα του Euler $E^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$, $y \in \mathbb{R}$ και άρα $2\kappa\pi$, κ ακέραιος. Όστε $z = x + iy = 2\kappa\pi$, κ ακέραιος.

■

Πόρισμα 3.1.53. Η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$.

Απόδειξη :

$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$, αφού $e^{2\pi i} = 1$.



Πρόταση 3.1.54. (i) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa$ ακέραιος.

(ii) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \kappa\pi, \kappa$ ακέραιος.

Ορισμός 3.1.55. (i) $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa$ ακέραιος.

(ii) $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z = \kappa\pi, \kappa$ ακέραιος.

Σημείωση 3.1.56. Οι συναρτήσεις $\tan z, \cot z$ είναι μερόμορφες στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.1.57. (i) Το υπερβολικό συνημίτονο εξορισμού είναι το :

$$\cos hz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Το υπερβολικό ημίτονο εξορισμού είναι το :

$$\sin hz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, z \in \mathbb{C}.$$

Πρόταση 3.1.58. (i) $\cos hz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}.$

(ii) $\sin hz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}.$

Παρατηρήσεις 3.1.59. Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1) : \varphi(t) = e^{it}$ είναι συνεχής και επί.

Απόδειξη:

Ότι η φ παίρνει τιμές στο $C(0, 1)$ είναι γνωστό αφού $|e^{it}| = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επίσης, είναι προφανές ότι η φ είναι συνεχής. Από την ταυτότητα $\varphi(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, t \in \mathbb{R}$ έπεται ότι η φ είναι επί.



Πρόταση 3.1.60. Η συνάρτηση $e^z, z \in \mathbb{C}$ είναι επί του $\mathbb{C} - \{0\}$.

Απόδειξη :

Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Τότε $\frac{w}{|w|} \in C(0, 1)$ άρα υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{w}{|w|} = e^{it}$, δηλαδή $w = |w|e^{it}, (1)$. Είναι $|w| > 0$ και άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $|w| = e^x, (2)$. Από τις (1), (2), έπεται ότι : $w = e^x e^{it} = e^{x+it}$, δηλαδή $w = e^z$ όπου $z = x + it$.



Ορισμός 3.1.61. Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Ένας πραγματικός αριθμός t είναι ένα όρισμα του z αν $z = |z|e^{it}$.

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει τουλάχιστον ένα όρισμα.

Πρόταση 3.1.62. Έστω $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ και $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι όρισμα του z . Ένας πραγματικός αριθμός $t \Leftrightarrow t = t_0 + 2\kappa\pi$, κ ακέραιος.

Απόδειξη :

($\Leftarrow$)

$t = t_0 + 2\kappa\pi$, κ ακέραιος. Τότε $|z|e^{it} = |z|e^{i(t_0+2\kappa\pi)} = |z|e^{it_0}e^{2\kappa\pi i} = |z|e^{it_0} = z$.

($\Rightarrow$)

Έστω $t \in \mathbb{R}$ ώστε $z = |z|e^{it}$. Έχουμε επίσης $z = |z|e^{it_0}$. Έπεται ότι $e^{it} = e^{it_0}$ και άρα $e^{i(t-t_0)} = 1$, οπότε $t = t_0 + 2\kappa\pi$, κ ακέραιος. ■

Ορισμός 3.1.63. Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$. Ένας μιγαδικός αριθμός z είναι εξορισμού ένας λογάριθμος του w αν $w = e^z$. Από προηγούμενη πρόταση έπεται ότι κάθε $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ έχει τουλάχιστον ένα λογάριθμο.

Πρόταση 3.1.64. Έστω $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ και $t \in \mathbb{R}$ είναι όρισμα του w . Τότε ένας μιγαδικός αριθμός z είναι λογάριθμος του $w \Leftrightarrow z = \log|w| + it + 2\kappa\pi i$, κ ακέραιος.

Απόδειξη :

Είναι $e^z = e^{\log|w|+it+2\kappa\pi i} = e^{\log|w|}e^{it}e^{2\kappa\pi i} = |w|e^{it} = |w|\frac{w}{|w|} = w$. Αντίστροφα, έστω $z \in \mathbb{C}$ με $e^z = w$. Εφόσον t είναι ένα όρισμα του w , $w = |w|e^{it}$. Άρα $e^z = |w|e^{it} = e^{\log|w|}e^{it} = e^{\log|w|+it}$. Όστε $e^z = e^{\log|w|+it}$ και άρα $e^{z-(\log|w|+it)} = 1$, οπότε $z = \log|w| + it + 2\kappa\pi i$ για κ ακέραιο. ■

Ορισμός 3.1.65. Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος. Μια συνεχής συνάρτηση $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται κλάδος του λογαρίθμου στο G αν

$$\exp(h(z)) = z, \forall z \in G$$

δηλαδή $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in G$.

Πρόταση 3.1.66. Έστω $G \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ κλάδος του λογαρίθμου. Τότε ισχύουν τα εξής :

- (i) h είναι ολόμορφη συνάρτηση.
- (ii) $h'(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in G$.
- (iii) Μια συνάρτηση $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ είναι κλάδος λογαρίθμου στο $G \Leftrightarrow g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$, κ σταθερός ακέραιος.

Απόδειξη :

Υποθέτουμε τα εξής : $h : G \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C$, h συνεχής και $\exp(h(z)) = z$ για κάθε $z \in G$. Επίσης $\exp'(w) = \exp(w) \neq 0$ για κάθε $w \in C$. Από το θεώρημα παραγώγισης έχουμε ότι η h είναι ολόμορφη και $h'(z) = \frac{1}{\exp'(h(z))} = \frac{1}{\exp(h(z))} = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in G$.

(iii)($\Leftarrow$)

Αν $g : G \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$, τότε η g είναι συνεχής και για κάθε $z \in G$, έχουμε ότι $e^{g(z)} = e^{h(z)+2\kappa\pi i} = e^{h(z)}e^{2\kappa\pi i} = e^{h(z)} = z$ και άρα η g είναι κλάδος του λογαρίθμου στο G . ($\Rightarrow$)

Έστω $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ κλάδος λογαρίθμου στο G . Τότε η g είναι συνεχής και $e^{g(z)} = z$ για κάθε $z \in G$. Έχουμε, επίσης, $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in G$. Επομένως $e^{g(z)-h(z)} = 1$ για κάθε $z \in G$. Άρα για κάθε $z \in G$ υπάρχει $\kappa_z \in \mathbb{Z}$ ώστε $g(z) - h(z) = 2\kappa_z\pi i$ για κάθε $z \in G$, οπότε $g(z) = h(z) + 2\kappa_z\pi i$ για κάθε $z \in G$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z} : \varphi(z) = \frac{g(z)-h(z)}{2\pi i}$. Η φ είναι συνεχής και καθώς G είναι τόπος και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Η φ είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ ώστε $\varphi(z) = \kappa$ για κάθε $z \in G$. Έπεται ότι $g(z) = h(z) + 2\kappa\pi i$ για κάθε $z \in G$.

■

Σε όλα τα επόμενα περιοριζόμαστε στον εξής τόπο : $D = \mathbb{C} - \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$

Λήμμα 3.1.67. Για κάθε $z \in C(0, 1) - \{1\}$ υπάρχει ακριβώς μία γωνία $\theta(z) \in (-\pi, \pi)$ τέτοια ώστε $z = e^{i\theta(z)}$.

Σημείωση 3.1.68. Η συνάρτηση $C(0, 1) - \{1\} \ni z \rightarrow \theta(z) \in (-\pi, \pi)$ είναι συνεχής.

Ορισμός 3.1.69. Για κάθε $z \in D$ έχουμε προφανώς $\frac{z}{|z|} \in C(0, 1) - \{1\}$ και επομένως

υπάρχει ακριβώς μια γωνία $\theta\left(\frac{z}{|z|}\right) \in (-\pi, \pi)$ ώστε $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta\left(\frac{z}{|z|}\right)}$.

Η συνάρτηση $\Theta_1 : D \rightarrow (-\pi, \pi) : \theta_1(z) = \theta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ είναι συνεχής και $z = |z|e^{i\theta_1(z)}$. Η Θ_1 καλείται κύριος κλάδος του ορίσματος.

Πρόταση 3.1.70. Η συνάρτηση $l : D \rightarrow \mathbb{C}, l(z) = \log|z| + \theta_1(z)$ είναι ένας κλάδος του λογαρίθμου στο D .

Απόδειξη :

Προφανώς η l είναι συνεχής. Έχουμε για κάθε $z \in D$ ότι $e^{l(z)} = e^{\log|z|+i\theta_1(z)} = e^{\log|z|}e^{i\theta_1(z)} = |z|e^{i\theta_1(z)} = z$. Άρα η l είναι κλάδος του λογαρίθμου στο D .

■

Ορισμός 3.1.71. Θέτουμε $\arg(z) = \theta_1(z)$, $z \in D$. Η συνάρτηση $\arg : D \rightarrow (-\pi, \pi)$ καλείται κύριος κλάδος του ορίσματος. Επίσης, θέτουμε $\log(z) = l(z)$, $z \in D$. Η συνάρτηση $\log : D \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται κύριος κλάδος του λογαρίθμου. Είναι φανερό ότι $\log = \log|z| + i\arg(z)$ για κάθε $z \in D$.

Παρατηρήσεις 3.1.72. Κάθε κλάδος του λογαρίθμου είναι της μορφής $\log_{\kappa}(z) = \log(z) + 2\kappa\pi i$, κ ακέραιος. Ο κλάδος $\log_{\kappa}(z)$ του λογαρίθμου καλείται κλάδος τάξης κ .

3.1.5 Παράσταση του $\log(1+z)$, $|z| < 1$ με δυναμοσειρά

Για $|z| < 1$ έχουμε $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \Delta(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$:

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με 1. Η συνάρτηση

f της δυναμοσειράς είναι ολόμορφη και $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $z \in (0,1)$. Δηλαδή $f'(z) = \frac{1}{1+z}$, $z \in \Delta(0,1)$. Επίσης, $\log'(1+z) = \frac{1}{1+z}$, $z \in \Delta(0,1)$. Ειδικά για $z = 0$, $\log(1) = f(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$ και άρα $\log(z+1) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$, $z \in \Delta(0,1)$.

Ωστε

$$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, |z| < 1$$

Ορισμός 3.1.73. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Για κάθε $z \in D$ ο κύριος κλάδος της δύναμης $\{z^\lambda\}$ είναι $z^\lambda = e^{\lambda \log z}$. Ο κλάδος τάξης $\kappa \in \mathbb{Z}$ της δύναμης $\{z^\lambda\}$ είναι $z_\kappa^\lambda = e^{\lambda \log z_\kappa}$.

Πρόταση 3.1.74. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $z \in D$ ισχύουν τα εξής :

- (i) $z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z$, n φορές.
- (ii) $z^{-n} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z}$, n φορές.

Απόδειξη :

Για $n \in \mathbb{N}$ και $z \in D$, $z^n = e^{n \log z} = (e^{\log z})^n = z^n = z \cdot \dots \cdot z$, n φορές.

■

Πρόταση 3.1.75. Έστω $z \in D$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (i) Αν λ είναι ρητός και $\lambda = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ και $(p,q) = 1$ τότε η δύναμη $\{z^\lambda\}$ έχει ακριβώς q κλάδους.
- (ii) Αν λ είναι άρρητος τότε η δύναμη $\{z^\lambda\}$ έχει άπειρους αριθμήσιμους το πλήθος κλάδους.

Παράδειγμα 3.1.76. $i^i = e^{i \log i}$

$\log i = \log|i| + i \arg i = i \frac{\pi}{2}$. Επομένως, $i^i = e^{i \left(\frac{i\pi}{2} \right)} = e^{-\frac{\pi}{2}}$. Έχουμε $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \Rightarrow e^\pi$ υπερβατικός.

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώματα

4.1 Καμπύλες στο $\mathbb{C}$ - Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Ορισμός 4.1.1. Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$.

- (i) Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη στο t_0 αν οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι διαφορίσιμες στο t_0 . Τότε η παράγωγος της φ στο t_0 είναι $\varphi'(t_0) = (Re\varphi)'(t_0) + i(Im\varphi)'(t_0)$.
 $\varphi'(t_0) = Re\varphi'(t_0) + iIm\varphi'(t_0)$.
- (ii) Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη στο $[a, b]$ αν οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι διαφορίσιμες στο $[a, b]$. Τότε η παράγωγος της φ στο $[a, b]$ είναι $\varphi'(t) = (Re\varphi)'(t) + i(Im\varphi)'(t), t \in [a, b]$, δηλαδή $\varphi'(t) = Re\varphi'(t) + iIm\varphi'(t), t \in [a, b], \varphi' = (Re\varphi)' + i(Im\varphi)'$.

Ορισμός 4.1.2. Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

- (i) Η φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a, b]$ αν υπάρχει η $\varphi'(t), t \in [a, b]$ και είναι συνεχής.
- (ii) Η φ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη στο $[a, b]$ αν υπάρχει διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη για $i = 1, \dots, n$.

Πρόταση 4.1.3. (Κανόνας της αλυσίδας). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $f \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι διαφορίσιμη και $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Ορισμός 4.1.4. Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Ισοδύναμα, οι συναρτήσεις $Re\varphi$ και $Im\varphi$ είναι συνεχείς. Τα ολοκληρώματα κατά Riemann της φ στο διάστημα $[a, b]$ είναι

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b Re(\varphi)(t)dt + i \int_a^b Im(\varphi)(t)dt.$$

Πρόταση 4.1.5. Έστω $\varphi_1, \varphi_2; [a, b] \subset \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε :

$$\int_a^b [\lambda \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(t)] dt = \lambda \int_a^b \varphi_1(t) dt + \mu \int_a^b \varphi_2(t) dt.$$

Θεώρημα 4.1.6. (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού- Μιγαδική μορφή). Έστω συνεχής συνάρτηση $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Τότε η συνάρτηση Φ είναι διαφορίσιμη και $\Phi'(x) = \varphi(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Θεώρημα 4.1.7. (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού- Μιγαδική μορφή). Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε

$$\int_a^b \varphi'(t) dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Πρόταση 4.1.8. Έστω $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Απόδειξη :

Αν $\int_a^b \varphi(t) dt = 0$, το συμπέρασμα είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι $\int_a^b \varphi(t) dt \neq 0$. Τότε

θέτουμε $\lambda = \frac{\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|}{\int_a^b \varphi(t) dt}$. Παρατηρούμε ότι $|\lambda| = 1$, (1). Από τον ορισμό έχουμε

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \lambda \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \lambda \varphi(t) dt, (2),$$

Καθώς $\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right|$ είναι πραγματικός αριθμός πρέπει $\int_a^b \lambda \varphi(t) dt$ να είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\int_a^b \lambda \varphi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda \varphi(t)) dt$, (3). Από τις (2), (3) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda \varphi(t)) dt, (4).$$

Όμως για κάθε $t \in [a, b]$ έχουμε ότι $\operatorname{Re}(\lambda\varphi(t)) \leq |\lambda\varphi(t)| = |\lambda||\varphi(t)|$ που μέσω της (1) γίνεται $|\varphi(t)|$, (5). Από τις (4), (5) έπεται ότι

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

■

Ορισμός 4.1.9. Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη. Τότε η κύμανση της φ είναι

$$v(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

Σημείωση 4.1.10. (i) Για κάθε διαμέριση $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ θέτουμε $v(\varphi, P) = \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$ που είναι η μερική κύμανση της φ ως προς την P .
Ισχύει πάντα ότι $v(\varphi, P) \leq v(\varphi)$.

(ii) $v(\varphi) = \sup \{v(\varphi, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq +\infty$. Δεν είναι όλες οι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.

Παράδειγμα 4.1.11. Έστω $f(t) = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Τότε έχουμε: $v(f) = \int_0^{2\pi} |\cos t| dt = 4$.

Ορισμός 4.1.12. Έστω συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη και διαμέριση του $[a, b]$ $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ ώστε $\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ είναι C^1 συνάρτηση για

$i = 1, \dots, n$. Τότε η κύμανση της φ είναι $v(\varphi) = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'(t)| dt$.

4.1.1 Καμπύλες

Ορισμός 4.1.13. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται καμπύλη.

Ορισμός 4.1.14. Μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη αν η συνάρτηση γ είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη.

Σε όλα τα επόμενα οι καμπύλες θα είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες.

Ορισμός 4.1.15. Έστω καμπύλη γ . Τότε το μήκος της γ είναι :

$$\mu(\gamma) = v(\gamma).$$

$\mu \in \mu(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$, αν η γ είναι C^1 , (1) και $\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)| dt$, αν γ κατά τμήματα C^1 , (2).

Ορισμός 4.1.16. Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε η αντίθετη της καμπύλης γ είναι η καμπύλη

$$-\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : (-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t).$$

Πρόταση 4.1.17. Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε $\mu(-\gamma) = \mu(\gamma)$.

Απόδειξη :

Υποθέτουμε ότι η γ είναι C^1 καμπύλη, οπότε και η $-\gamma$ είναι C^1 καμπύλη. Τότε εξορισμού έχουμε

$$\mu(-\gamma) = \int_a^b |(-\gamma)'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(a + b - t)| dt.$$

Θέτουμε $a + b - t = x$, $dt = -dx$, $t = a \Rightarrow x = b$, $t = b \Rightarrow x = a$. Επομένως,

$$\mu(-\gamma) = - \int_b^a |\gamma'(x)| dx = \int_a^b |\gamma'(x)| dx = \mu(\gamma).$$

Ορισμός 4.1.18. Έστω καμπύλη $\gamma A[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Θέτουμε $\gamma^* = \gamma([a, b])$. Είναι προφανές ότι $(\gamma^*) = \gamma^*$.

Παραδείγματα 4.1.19. (i) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$. Το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z και πέρας w είναι η καμπύλη $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma(t) = (1 - t)z + tw$. Το μήκος της γ είναι

$$\mu(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |w - z| dt = |w - z|.$$

Την καμπύλη γ τη συμβολίζουμε με $[z, w] \equiv \gamma$.

(ii) Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ Ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο το a και ακτίνα r είναι η καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} : \gamma(t) = a + re^{it}$. Έχουμε $\mu(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$.

Ορισμός 4.1.20. Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ και έστω διαμέριση του $[a, b]$ $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ ώστε $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ είναι καμπύλη για $i = 1, 2, \dots, n$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος της γ είναι εξορισμού

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Όταν η καμπύλη γ είναι C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Πρόταση 4.1.21. Έστω καμπύλη γ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma^{ast} \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Απόδειξη :

Υποθέτουμε ότι η γ είναι C^1 καμπύλη. Έχουμε

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_a^b (f(-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t))dt = - \int_a^b f(\gamma(a+b-t))(-\gamma'(a+b-t))dt$$

Θέτουμε

$$(i) \quad a+b-t = x,$$

$$(ii) \quad dt = -dx,$$

$$(iii) \quad t = a \Rightarrow x = b,$$

$$(iv) \quad t = b \Rightarrow x = a$$

$$\text{και έχουμε } \int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)dx = - \int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)dx = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

■

Πρόταση 4.1.22. Έστω καμπύλη γ και συνεχής συνάρτηση $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε $\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq M\mu(\gamma)$.

Απόδειξη :

Έστω διαμέριση $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ είναι C^1 καμπύ-

$$\begin{aligned} \text{λη για } i = 1, \dots, n. \quad \text{Τότε, } \int_{\gamma} f(z)dz &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \quad \text{Έπεται, } \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} M|\gamma'(t)|dt = \\ &= M \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|dt = M\mu(\gamma). \quad \text{Δηλαδή } \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq M\mu(\gamma). \end{aligned}$$

■

Ορισμός 4.1.23. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Η συνάρτηση F καλείται παράγουσα της f στο Ω αν $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Πρόταση 4.1.24. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε η F είναι παράγουσα της f . Τότε για κάθε καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega : \int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα ολοκλήρωσης και όχι από το "δρόμο".

Απόδειξη :

Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Έστω διαμέριμη $P = \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε η $\gamma|_{t_{i-1}, t_i}$ είναι C^1 καμπύλη. Τότε $\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$. Έχουμε για κάθε $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $f(\gamma(t))\gamma'(t) = (F \circ \gamma)'(t)$ από τον κανόνα της αλυσίδας. Συνεπώς, $\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (F \circ \gamma)'(t)dt = \sum_{i=1}^n [(F \circ \gamma)(t_i) - (F \circ \gamma)(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n [f(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))] = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + \dots + F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

■

Ορισμός 4.1.25. Μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Πόρισμα 4.1.26. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση η οποία έχει παράγουσα στο Ω . Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ , με $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Απόδειξη :

Έστω $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ παράγουσα της f και κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Τότε από την Πρόταση 4.1.24 $\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$.

■

Παρατηρήσεις 4.1.27. Αν $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής τότε η φ έχει παράγουσα στο $[a, b]$, δηλαδή υπάρχει $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη ώστε $\Phi'(x) = \varphi(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$, $x \in [a, b]$.

Παράδειγμα 4.1.28. Έστω $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \frac{1}{z}$. Έστω ακόμα $r > 0$ και $C(0, r) \equiv \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = re^{it}$. Η γ είναι κλειστή καμπύλη. Έχουμε $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$. Όστε $\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i$ ή $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$. Άρα η συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στον τόπο $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$.

Θεώρημα 4.1.29. Έστω $\varphi, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις. Θέτουμε $\Omega = \mathbb{C} - g([a, b])$ που είναι ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t) - z} dz$. Τότε η συνάρτηση f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω και άρα είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη και

$$f^{(\kappa)}(z) = \kappa! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z)^{\kappa+1}} dt, \kappa = 0, 1, \dots$$

Απόδειξη :

Η φ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\varphi(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [a, b]$. Έστω $z_0 \in \Omega$ και $r > 0$ ώστε $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$. Για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και $t \in [a, b]$ έχουμε $|z - z_0| < r$ και $|g(t) - z_0| \geq r$ και άρα $\frac{|z - z_0|}{|g(t) - z_0|} < 1$, δηλαδή $\left| \frac{z - z_0}{g(t) - z_0} \right| < 1$. Συνεπώς για κάθε

$z \in \Delta(z_0, r)$ και $t \in [a, b]$ η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{g(t) - z_0} \right)^n$ συγκλίνει. Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{g(t) - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{g(t) - z_0}} = \frac{g(t) - z_0}{g(t) - z} \text{ για κάθε } z \in \Delta(z_0, r) \text{ και για κάθε } t \in [a, b].$$

Έπεται, $\frac{1}{g(t) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(g(t) - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n, (1)$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και για κάθε $t \in [a, b]$.

Έστω $z \in \Delta(z_0, r)$ σταθερά. Για κάθε $t \in [a, b]$ έχουμε

$$\left| \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| = \frac{|\varphi(t)|}{|g(t) - z_0|^{n+1}} |z - z_0|^n \leq \frac{M}{r^{n+1}} |z - z_0|^n = \frac{M}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n (2)$$

για $n = 0, 1, \dots$. Έχουμε ακόμα ότι $\frac{|z - z_0|}{r} < 1$ και επομένως η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n <$

$$\infty, \text{ οπότε } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n < \infty, (3).$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και το M-κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{g(t) - z_0^{n+1}} (z -$

$z_0)^n, (4)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in [a, b]$. Από τις (1), (4) έπεται ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1}} (z -$

$z_0)^n = \frac{\varphi(t)}{g(t) - z}$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in [a, b]$. Συνεπώς, $\int_a^b \frac{\varphi(t)}{g(t) - z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1}} dt \right] (z -$

$z_0)^n$, δηλαδή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1}} dt \right) (z - z_0)^n$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ ή $f(z) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, n \in \Delta(z_0, r)$ όπου $c_n = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0) dt}, n = 0, 1, \dots$. Έτσι, η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στον $\Delta(z_0, r)$. Όπως είναι γνωστό, οι συντελεστές $c_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$, οπότε

$$(4.1) \quad f^n(z_0) = n! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z_0)^{n+1} dt}, n = 0, 1, \dots$$

Εφόσον το z_0 είναι αυθαίρετο σημείο του Ω η σχέση 5.1.1 ισχύει για κάθε $z \in \Omega$ που σημαίνει ότι $f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{\varphi(t)}{(g(t) - z)^{n+1} dt}$ για $n = 0, 1, \dots$

■

4.1.2 Δείκτης στροφής καμπύλης

Ένα σημείο κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης Γ από τη θέση w_1 στη θέση w_2 θα διαγράψει $\frac{\theta}{2\pi}$ μέρος της μιας στροφής, δηλαδή θα διαγράψει $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ μέρος της μιας στροφής. Έχουμε

$$(i) \quad w_1 = e^{i\theta_1}$$

$$(ii) \quad w_2 = e^{i\theta_2}$$

και επομένως

$$(i) \quad \log w_1 = i\theta_1$$

$$(ii) \quad \log w_2 = i\theta_2,$$

άρα

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{i} (\log w_2 - \log w_1)$$

οπότε

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} (\log w_2 - \log w_1).$$

Έπεται ότι

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz.$$

Όστε το μέρος της μιας στροφής γύρω από το μηδέν που θα διαγράψει ένα σημείο κινούμενο κατά μήκος της Γ καμπύλης από τη θέση w_1 στη θέση w_2 δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz.$$

Ορισμός 4.1.30. Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ και $z \neq \gamma^*$. Ο δείκτης στροφής της καμπύλης γ ως προς z εξορισμού είναι

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma 1\zeta - z d\zeta.$$

Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $\delta_\gamma : \mathbb{C} - \gamma^* \rightarrow \mathbb{C} : \delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$. Η συνάρτηση δ_γ καλείται δείκτης της καμπύλης γ .

Θεώρημα 4.1.31. Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν τα εξής :

- (i) Ο δ_γ είναι ακέραιος για κάθε $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$.
- (ii) Η συνάρτηση δ_γ είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \gamma$.
- (iii) Η δ_γ μηδενίζεται στη μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \gamma$.

Απόδειξη :

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη γ είναι C^1 καμπύλη. Η συνάρτηση δ_γ είναι συνεχής :

$$\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt.$$

Άρα από το τελευταίο θεώρημα η δ_γ είναι συνεχής.

- (i) Έστω $z \in \mathbb{C} - \gamma^*$ σταθερό. Έχουμε $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \varphi(x) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt}$. Η συνάρτηση φ είναι διαφορίσιμη και $\varphi'(x) = e^{\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt} \cdot \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έτσι έχουμε $\varphi'(x) \varphi(x) \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z}, x \in [a, b]$. Έπεται ότι $\varphi'(x)[\gamma(x) - z] - \varphi(x)\gamma'(x) = 0, x \in [a, b]$ ή $\varphi'(x)[\gamma(x) - z] - \varphi(x)[\gamma(x) - z]' = 0$. Συνεπώς $\left(\frac{\varphi(x)}{\gamma(x) - z} \right)' = \frac{\varphi'(x)[\gamma(x) - z] - \varphi(x)[\gamma(x) - z]'}{[\gamma(x) - z]^2}$. Άρα η συνάρτηση $\frac{\varphi(x)}{\gamma(x) - z}, x \in [a, b]$ είναι σταθερή. Επομένως $\frac{\varphi(x)}{\gamma(x) - z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z}$ για κάθε $z \in [a, b]$. Είναι σαφές ότι $\varphi(a) = e^0 = 1$, οπότε $\varphi(x) = \frac{\gamma(x) - z}{\gamma(a) - z}$ για κάθε $x \in [a, b]$ και ειδικά για $x = b$ έχουμε $\varphi(b) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1$ διότι $\gamma(a) = \gamma(b)$ λόγω κλειστής καμπύλης. Όστε $\varphi(b) = 1$ δηλαδή $e^{\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt} = 1$ και άρα $\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = 2\kappa\pi i$ για κάποιο $z \in \mathbb{Z}$. Όστε $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} 2\kappa\pi i = \kappa$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$. Άρα $\delta_\gamma(z) = \kappa, \kappa \in \mathbb{Z}$.

- (ii) Έστω $C \subseteq \mathbb{C} - \gamma^*$ συνεκτική συνιστώσα. Εφόσον η συνάρτηση δ_γ είναι συνεχής το σύνολο $\delta_\gamma[C]$ είναι συνεκτικό και $\delta_\gamma[C] \subseteq \mathbb{C}$ επομένως $\delta_\gamma[C] = \{\kappa\}$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$ δηλαδή $\delta_\gamma(z) = \kappa$ για κάθε $\kappa \in C$.
- (iii) Το σύνολο $\gamma^* = \gamma([a, b])$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ άρα είναι φραγμένο, επομένως υπάρχει $r > 0$ ώστε $\gamma^* \subseteq \bar{\Delta}(0, r)$. Για $z \notin \bar{\Delta}(0, r)$ και για $\zeta \in \gamma^*$ έχουμε $|\zeta - z| \geq |z| - |\zeta| > |z| - r > 0$ επομένως $\frac{1}{|\zeta - z|} < \frac{1}{|z| - r}$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*$. Άρα $\left| \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{|z| - r} \mu(\gamma)$, οπότε $|\delta_\gamma(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z| - r} \mu(\gamma)$. Ωστε $|\delta_\gamma(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|z| - r} \mu(\gamma)$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, r)$ και άρα

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\Delta_\gamma(z)| = 0,$$

οπότε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \delta_\gamma(z) = 0.$$

Έτσι $\delta_\gamma(0)$ για κάθε $z \notin \bar{\Delta}(0, r)$, οπότε $\delta_\gamma(z)$ για κάθε σημείο z της μη φραγμένης συνεκτικής συνιστώσας του $\mathbb{C} - \gamma^*$.

■

Παρατηρήσεις 4.1.32. (i) Αν $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε $f(x) = x$.

(ii) Αν $f : \bar{\Delta}(0, 1) \rightarrow \bar{\Delta}(0, 1)$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει $z \in \bar{\Delta}(0, 1)$ ώστε $f(z) = z$.

(iii) Έστω γ κλειστή καμπύλη. Τότε ισχύουν τα εξής :

$$(a') \int_\gamma z^n dz = 0, n = 0, 1, \dots$$

$$(\beta') \text{ Υποθέτουμε ότι } 0 \notin \gamma^*. \text{ Τότε } \int_\gamma \frac{1}{z^n} dz = 0, n = 2, 3, \dots$$

$$(\gamma') \text{ Υποθέτουμε ότι } 0 \notin \gamma^*. \text{ Τότε } \int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \delta_\gamma(0).$$

4.1.3 Τοπικό θεώρημα του Cauchy

Συμβολισμός Έστω τρία σημεία a, b, c στο επίπεδο. Συμβολίζουμε με $T = T(a, b, c)$ το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία a, b, c . Επίσης, συμβολίζουμε με $\partial T(a, b, c)$ την περίμετρο του τριγώνου, μια κλειστή καμπύλη προσανατολισμένη με τη θετική φορά.

Λήμμα 4.1.33. (*Cauchy-Goursat*) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a, b, c \in \Omega$ ώστε το τρίγωνο $T = T(a, b, c)$ να περιέχεται στο Ω . Τότε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Απόδειξη :

Έστω a_1, b_1, c_1 τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $[bc], [ca], [ab]$ αντίστοιχα και θεωρούμε τα τέσσερα τρίγωνα που σχηματίζονται T_1, T_2, T_3, T_4 . Τότε έχουμε $\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_3} f(z)dz + \int_{\partial T_4} f(z)dz$. Έστω T^1 εκείνο από τα τέσσερα τρίγωνα που το ολοκλήρωμα $\int_{\partial T^1} f(z)dz$ έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Τότε $\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^1} f(z)dz \right|$. Επίσης, $\mu(\partial T^1) = \frac{1}{2}\mu(\partial T)$ και η διάμετρος $\delta(T^1) = \frac{1}{2}\delta(T)$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα και κατασκευάζουμε με αυτόν τον τρόπο επαγωγικά μια ακολουθία τριγώνων $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ με τις ιδιότητες

- (i) $T \supset T^1 \supset T^2 \supset \dots \supset T^n \supset T^{n+1} \supset \dots$
- (ii) $\left| \int_{\partial T^n} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^{n-1}} f(z)dz \right|$ για $n = 1, 2, \dots$
- (iii) $\mu(\partial T^n) = \frac{1}{2^n}\mu(\partial T)$ για $n = 1, 2, \dots$
- (iv) $\text{diam}(T^n) = \frac{1}{2^n}\text{diam}(T)$.

Κάθε τρίγωνο T^n είναι κλειστό σύνολο. Έτσι, από τις ιδιότητες (i), (iv) καθώς ο μετρικός χώρος $\mathbb{C}$ είναι πλήρης, έπεται ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n = \{z_0\}$, $z_0 \in \Omega$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(z_0)$ και $\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) \rightarrow 0$ καθώς $z \rightarrow z_0$. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ με $\Delta(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ ώστε $z \in \Delta(z_0, \delta), z \neq z_0 \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$, οπότε $z \in \Delta(z_0, \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|$, (1). Επιλέγουμε n ώστε $\text{diam}(T^n) < \delta$. Τότε $T^n \subseteq \Delta(z_0, \delta)$. Έστω $w \in T^n$. Έχουμε $z_0 \in T^n$. Επομένως $|w - z_0| \leq \text{diam}(T^n) < \delta$ δηλαδή $w \in T^n \Rightarrow |w - z_0| < \delta$ άρα $T^n \subseteq \Delta(z_0, \delta)$. Συνεπώς, από την (1) έπεται ότι

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon|z - z_0|, \forall z \in T^n,$$

άρα $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon \text{diam}(T^n)$ για κάθε $z \in \partial T^n$, (2). Από τη (2) έπεται ότι

$$\int_{\partial T^n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \leq \varepsilon \text{diam}(T^n) \mu(\partial T^n), (3).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (iii), (iv) η (3) δίνει :

$$\left| \int_{\partial T^n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| \leq \varepsilon \frac{1}{4^n} \text{diam}(T) \mu(\partial T).$$

Όμως $\int_{\partial T} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz = \int_{\partial T^n} f(z) dz$. Άρα $\int_{\partial T} f(z) dz \leq \varepsilon \frac{1}{4^n} \text{diam}(T) \mu(\partial T)$.

Οι συναρτήσεις $f(z_0)$, $f'(z_0)(z - z_0)$ έχουν παράγους και επειδή μιλάμε για κλειστή καμπύλη τα ολοκληρώματα μηδενίζονται.

Από την ιδιότητα (ii) παίρνουμε

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z) dz \right|.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται :

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \varepsilon \frac{1}{4^n} \text{diam}(T) \mu(\partial T) = \varepsilon \text{diam}(T) \mu(\partial T).$$

Όστε $\left| \int \partial T f(z) dz \right| \leq \varepsilon \text{diam}(t) \mu(\partial T)$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα $\left| \int \partial T f(z) dz \right| = 0$ οπότε $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$

■

Σημείωση 4.1.34. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in \Omega$ και συνεχής συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, ώστε $f|_{\Omega - \{z_0\}}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση. Έστω ακόμα ένα τρίγωνο T με $T \subseteq \Omega$. Τότε $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

Απόδειξη :

(i) Πρώτη περίπτωση $z_0 \notin T$.

Τότε το συμπέρασμα έπεται από την απόδειξη του Λήμματος Cauchy-Goursat 4.1.33. Χρειάστηκε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του T .

(ii) Δεύτερη περίπτωση το z_0 να είναι κορυφή του T και έστω ότι $z_0 = a$.

Εφόσον το T είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in T$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε σημεία x, y στα εσωτερικά των πλευρών $[a, b]$ και $[c, a]$ ώστε $|x - y| + |a - y| + |x - a| < \frac{\varepsilon}{M}$. Ακολουθώντας θεωρούμε τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3 . Τότε

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{\partial T_1} f(z) dz + \int_{\partial T_2} f(z) dz + \int_{\partial T_3} f(z) dz = 0 + 0 + \int_{\partial T_3} f(z) dz$$

από την πρώτη περίπτωση. Άρα $\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_3} f(z)dz$. Έπεται ότι $\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial T_3} f(z)dz \right| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Όποτε

$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Άρα

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

- (iii) Τρίτη περίπτωση το z_0 είναι εσωτερικό σημείο μιας πλευράς του τριγώνου, έστω της πλευράς $[c, a]$.
Τότε, θεωρούμε τα τρίγωνα T_1, T_2 και έχουμε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz = 0,$$

από τη δεύτερη περίπτωση.

- (iv) Τέταρτη περίπτωση το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του T .
Τότε, θεωρούμε τα τρίγωνα T_1, T_2, T_3 και έχουμε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_3} f(z)dz = 0,$$

από τη δεύτερη περίπτωση. Άρα $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

■

Θεώρημα 4.1.35. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό και συνεχής συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$, Τότε η f έχει παράγουσα στο Ω , δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$.

Απόδειξη :

Επιλέγουμε $z_0 \in \Omega$ σταθερό σημείο και ορίζουμε τη συνάρτηση $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : F(z) = \int_{[z_0, z]} f(z)dz$. Τότε η F είναι ολόμορφη και $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Έστω $w \in \Omega$.

Θεωρούμε το τρίγωνο $T = T(z_0, z, w)$. Επειδή το Ω είναι κυρτό το T περιέχεται στο Ω και άρα $\int_{\partial T} f(\zeta) d\zeta = 0$. Είναι

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \int_{[z_0, z]} f(z) dz + \int_{[z, w]} f(z) dz + \int_{[w, z_0]} f(z) dz.$$

Έπεται $\int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, w]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[w, z_0]} f(\zeta) d\zeta$ ή $F(z) - F(w) = \int_{[w, z]} f(\zeta) d\zeta$. Οπότε για $z \in \Omega$ με $z \neq w$, $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w} \int_{[w, z]} f(\zeta) d\zeta$ Άρα $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w) = \frac{1}{z-w} \int_{[w, z]} f(\zeta) d\zeta - f(w) = \frac{1}{z-w} \int_{[w, z]} [f(\zeta) - f(w)] d\zeta$.

Θεώρημα 4.1.36. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Τότε η f έχει παράγουσα στο Ω .

Απόδειξη :

Επιλέγουμε $z_0 \in \Omega$ σταθερό και θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta$.

Έστω $w \in \Omega$. Αποδείξαμε ότι $\frac{F(z)-F(w)}{z-w} - f(w) = \frac{1}{z-w} \int_{[w, z]} f(\zeta) - f(w) d\zeta$, (1) για κάθε $z \in \Omega$ με $z \neq w$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο w υπάρχει $\delta > 0$ με $\Delta(w, \delta) \subseteq \Omega$ ώστε $z \in \Delta(w, \delta) \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Για $z \in \Delta(w, \delta) \Rightarrow [w, z] \subseteq \Delta(w, \delta)$. Επομένως, $z \in \Delta(w, \delta), \zeta \in [w, z] \Rightarrow |f(\zeta) - f(w)| < \varepsilon$. Έστω $z \in \Delta(w, \delta)$. Τότε, $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ για κάθε $\zeta \in [w, z]$. Συνεπώς

$$\left| \int_{[w, z]} f(\zeta) - f(w) d\zeta \right| \leq \varepsilon |z - w|.$$

Επομένως από την (1) έπεται ότι για $z \in \Delta(w, \delta), z \neq w$, $\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) \right| = \frac{1}{|z - w|} \left| \int_{[w, z]} f(\zeta) - f(w) d\zeta \right| \leq \frac{1}{|z - w|} \varepsilon = \varepsilon$. Όστε για κάθε $z \in \Delta(w, \delta), z \neq w$, $\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) \right| \leq \varepsilon$. Άρα υπάρχει η παράγωγος $F'(w)$ και ισχύει $F'(w) = f(w)$.

■

Πόρισμα 4.1.37. (Τοπικό θεώρημα του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση ώστε $f|_{\Omega - \{a\}}$ είναι ολόμορφη. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$ το $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Απόδειξη :

Από το Λήμμα Cauchy-Goursat 4.1.33 έχουμε ότι $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Συνεπώς, από το προηγούμενο θεώρημα, η f έχει παράγουσα στο Ω και ισχύει ότι $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$.

■

Θεώρημα 4.1.38. (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και κυρτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και γ κλειστή καμπύλη που περιέχεται στο Ω , δηλαδή $\gamma^* \subseteq \Omega$. Τότε $z \in \Omega - \gamma^*$, $\delta_{\gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

Απόδειξη :

Έστω $z \in \Omega - \gamma^*$ σταθερό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \text{αν } \zeta \neq z \\ f'(\zeta) & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

Προφανώς, η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{z\}$ άρα και συνεχής στο $\Omega - \{z\}$. Επίσης, καθώς

$$g(z) = f'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta)$$

η g είναι συνεχής και στο z . Από το τοπικό θεώρημα του Cauchy έχουμε $\int_{\gamma} g(\zeta)d\zeta = 0$ ή $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0$. Επομένως $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \delta_{\gamma}(z)f(z)$. Άρα $\delta_{\gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

■

Πόρισμα 4.1.39. Έστω $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega, r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Τότε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

για κάθε $z \in \Delta(a, r)$.

Απόδειξη:

Εφόσον το σύνολο $\bar{\Delta}(a, r)$ είναι συμπαγές, το $\mathbb{C} - \Omega$ είναι κλειστό και $\bar{\Delta}(a, r) \cap (\mathbb{C} - \Omega) = \emptyset$, $\text{dist}(\bar{\Delta}(a, r), \mathbb{C} - \Omega) > 0$. Έστω $\delta = \text{dist}(\bar{\Delta}(a, r), \mathbb{C} - \Omega) > 0$. Θέτουμε $R = r + \frac{\delta}{2}$. Τότε $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Delta(a, R) \subseteq \Omega$. Εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την

f περιορισμένη στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a, R)$ και για την καμπύλη $C(a, r) \equiv \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Delta(a, r) : \gamma(t) = a + re^{it}$ και παίρνουμε για κάθε $z \in \Delta(a, r)$, $\delta_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

■

Θεώρημα 4.1.40. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα εξής :

- (i) Η f είναι τοπικά παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω , δηλαδή είναι αναλυτική στο Ω και άρα είναι απερίορστα παραγωγίσιμη.
- (ii) Αν $a \in \Omega$, $r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$ τότε

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}, \forall z \in \Delta(a, r), \forall n = 0, 1, \dots$$

όπου $C(a, r) \equiv \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$.

Απόδειξη :

Έστω $a \in \Omega$, $r > 0$ ώστε $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$. Από το Πρόσμμα 4.1.39 έχουμε ότι $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$, όπου $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Έπεται ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt, \forall z \in \Delta(a, r).$$

Συνεπώς, από προηγούμενο βασικό θεώρημα, η f είναι παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο δίσκο $\Delta(a, r)$. Επίσης, από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^{n+1}} dt, \forall n = 0, 1, \dots$$

Είναι $\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^{n+1}} dt = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ Άρα $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$.

■

Πρόσμμα 4.1.41. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε :

- (i) Η f είναι απερίορστα παραγωγίσιμη και ειδικά
- (ii) Η f' είναι ολόμορφη.

Πόρισμα 4.1.42. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f_{\Omega-\{a\}}$ είναι ολόμορφη. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω .

Απόδειξη :

Έστω $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι στο ανοικτό και κυρτό σύνολο ισχύει :

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0,$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Delta(a, r)$. Από γνωστό θεώρημα υπάρχει $F : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Από το Πόρισμα 4.1.41 η F' είναι επίσης ολόμορφη στον $\Delta(a, r)$, δηλαδή η f είναι ολόμορφη στον $\Delta(a, r)$. ■

Πόρισμα 4.1.43. (Θεώρημα Morera). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f συνεχής, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ ισχύει :

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω .

Απόδειξη :

Έστω $a \in \Omega$ και $R > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Έχουμε ότι

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

για κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Delta(a, r)$ και καθώς το $\Delta(a, r)$ είναι ανοικτό και κυρτό από προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $F : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Η F' είναι ολόμορφη στο $\Delta(a, r)$ άρα και η f είναι ολόμορφη στο $\Delta(a, r)$ για κάθε $a \in \Omega$ και για κάθε $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. ■

Θεώρημα 4.1.44. (Εκτιμήσεις του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega$, $r > 0$ με $\bar{\Delta}(a, r) \subseteq \Omega$ και $M(a, r) < \infty$ ώστε $|f(\zeta)| \leq M(a, r)$ για κάθε $\zeta \in \bar{\Delta}(a, r)$. Τότε

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq n! \frac{M(a, r)}{r^n}$$

για κάθε $n = 0, 1, \dots$.

Απόδειξη :

Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$ παραμέτρηση του $C(a, r)$, $\gamma \equiv C(a, r)$. Όπως γνωρίζουμε $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$, $n = 0, 1, \dots$. Για κάθε $\zeta \in \gamma^*$, $\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^{n+1}} = \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M(a, r)}{r^{n+1}}$. Έστω $\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M(a, r)}{r^{n+1}}$ για κάθε $\zeta \in \gamma^*$, $n = 0, 1, \dots$. Συνεπώς, για κάθε $n = 0, 1, \dots$ έχουμε $|f^{(n)}(a)| = \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M(a, r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{nM(a, r)}{r^n}$. Δηλαδή $|f'(a)| \leq \frac{M(a, r)}{r}$.

■

Ορισμός 4.1.45. Μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται *ακέραια συνάρτηση*.

Θεώρημα 4.1.46. (Liouville). Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

Απόδειξη :

Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση ώστε να υπάρχει $M < \infty$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Έστω $z \in \mathbb{C}$ αυθαίρετο σταθερό και για κάθε $r > 0$ θεωρούμε τον $\Delta(z, r)$. Από την εκτίμηση του Cauchy για την $f'(z)$ εφαρμοσμένη στο δίσκο $\Delta(z, r)$ έχουμε $|f'(z)| \leq \frac{M}{r}$ για κάθε $r > 0$ άρα

$$|f'(z)| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r} = 0.$$

Έτσι, $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα η f είναι σταθερή.

■

Πόρισμα 4.1.47. (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας). Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές έχει μια μιγαδική ρίζα.

Απόδειξη :

Έστω πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$, $j \leq n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty.$$

Πράγματι, έχουμε για $z \neq 0$: $p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z} \right)$, $p(z) \rightarrow \infty$, $a_n = \infty$ καθώς $z \rightarrow \infty$. Ας υποθέσουμε ότι $p(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ και είναι ακέραια. Επίσης,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0.$$

Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$ ώστε $|z| \geq R \Rightarrow |f(z)| < 1$. Η $f|_{\bar{\Delta}(0,R)}$ είναι φραγμένη διότι η $|f|$ είναι συνεχής και $\bar{\Delta}(0, R)$ είναι συμπαγής. Δηλαδή υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}(0, R)$. Έπεται ότι $|f(z)| \leq M + 1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, δηλαδή η f είναι φραγμένη. Από το θεώρημα του Liouville έπεται ότι η f είναι σταθερή. Είναι $p(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c}$ οπότε το πολυώνυμο είναι σταθερό, άτοπο.

■

4.2 Θεμελιώδεις ιδιότητες ολόμορφων συναρτήσεων

4.2.1 Αρχή μοναδικότητας ή Αρχή αναλυτικής συνέχειας

Λήμμα 4.2.1. Έστω $a \in \mathbb{C}, r > 0$ και δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$ ώστε $f(a) = 0$ και $f \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \geq 1$ και μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $g : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = (z-a)^m g(z), z \in \Delta(a, r), g(a) \neq 0.$$

Απόδειξη :

(i) Υπαρξη :

Έχουμε $c_0 = f(a) = 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των $\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ είναι μη κενό γιατί η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Έστω m το ελάχιστο στοιχείο, $m = \min \{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\} \geq 1$. Τότε $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$ ή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^{n+m}, z \in \Delta(a, r)$. Έπεται ότι $f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^n, z \in \Delta(a, r)$. Θέτουμε $g : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-a)^n$. Τότε η g είναι ολόμορφη και $f(z) = (z-a)^m g(z), z \in \Delta(a, r)$. Επίσης, $g(a) = c_m \neq 0$.

(ii) Το μονοσήμαντο :

Ας υποθέσουμε ότι m είναι ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας και $g : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ώστε

$$f(z) = (z-a)^{m_1} g_1(z), z \in \Delta(a, r), g_1(a) \neq 0.$$

Από τις 4.2.1, ii έπεται ότι $(z - a)^{m_1} g_1(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$. Ας υποθέσουμε ότι $m_1 > m$. Τότε από την τελευταία σχέση παίρνουμε για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ με $z \neq a$, $g(z) = (z - a)^{m_1 - m} g_1(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ με $z \neq a$. Επομένως, καθώς η g είναι συνεχής,

$$g(a) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{m_1 - m} g_1(z) = 0,$$

δηλαδή $g(a) = 0$, άτοπο.

Ομοίως έχουμε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $m > m_1$. Άρα $m = m_1$. Εφόσον $m = m_1$, από τις 4.2.1, ii $(z - a)^m g_1(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και άρα $g_1(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ με $z \neq a$. Καθώς g και g_1 είναι συνεχείς έπεται ότι

$$g_1(a) = \lim_{z \rightarrow a} g_1(z) = \lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a)$$

και άρα $g_1(a) = g(a)$. Συνεπώς, $g_1(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$.

■

Συμβολισμός :

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Θέτουμε $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$.

Λήμμα 4.2.2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε, στο μετρικό χώρο Ω το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό σύνολο.

Υπενθύμιση :

(i) το $x \in X$ όπου X μετρικός χώρος είναι σημείο συσσώρευσης αν για κάθε

$$\varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A - \{x\} \neq \emptyset.$$

(ii) $Z(f)' \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$.

Λήμμα 4.2.3. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Τότε στο μετρικό χώρο Ω , το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό.

Απόδειξη :

Έχουμε $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ άρα $Z(f)$ είναι κλειστό σύνολο, επομένως $Z(f)' \subseteq Z(f)$.

(i) Το $Z(f)'$ είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Το $Z(f)'$ είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω $a \in Z(f)'$. Τότε $a \in Z(f)$. Επιλέγουμε $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$. Η f είναι

δυναμοσειρά στο $\Delta(a, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$, $z \in \Delta(a, r)$. Έχουμε $f(a) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $f \neq 0$ στο $\Delta(a, r)$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα, υπάρχουν ακέραιος $m \geq 1$ και ολόμορφη συνάρτηση $g : \Delta(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και $g(a) \neq 0$. Εφόσον η g είναι συνεχής και $g(a) \neq 0$ υπάρχει $0 < r_1 < r$ ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0, r_1)$. Έχουμε $f(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$ και $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r_1)$. Επομένως, $(Z(f) - \{a\}) \cap \Delta(a, r_1) = \emptyset$ οπότε το $a \notin Z(f)'$, άτοπο. Συνεπώς, $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Delta(a, r)$ και άρα $\Delta(a, r) \subseteq Z(f)'$. Έτσι, το $Z(f)'$ είναι ανοικτό. ■

Θεώρημα 4.2.4. (Αρχή της μοναδικότητας). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν το σύνολο ριζών $Z(f)$ της f έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο Ω , δηλαδή $Z(f)' \neq \emptyset$ στο μετρικό χώρο Ω , τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$.

Απόδειξη :

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι στο μετρικό χώρο Ω το σύνολο $Z(f)'$ είναι ανοικτό και κλειστό και εφόσον Ω είναι συνεκτικός μετρικός χώρος πρέπει $Z(f)' = \Omega$ ή $Z(f)' = \emptyset$. Από υπόθεση, $Z(f)' \neq \emptyset$. Άρα $Z(f)' = \Omega$. Επομένως, $Z(f) = \Omega$ διότι $Z(f)' \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$. Όμως $Z(f) = \Omega$ σημαίνει ότι $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. ■

Σημείωση 4.2.5. Εκτός του τόπου Ω μπορεί το σύνολο $Z(f)$ να έχει σημεία συσσώρευσης χωρίς να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Παράδειγμα 4.2.6. Έστω $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1$, $z \in \Omega$. Έχουμε για $z \neq 0$: $e^{\frac{1}{z}} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 2\kappa\pi i, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\kappa\pi i}, \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0$. Άρα $Z(f) = \left\{ \frac{1}{2\kappa\pi i} : \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \neq 0 \right\}$. Το $0 \in Z(f)'$. Η $f \neq 0$ διότι $0 \notin \Omega$.

Πόρισμα 4.2.7. (Αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Θέτουμε $A = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Αν το A έχει σημείο συσσώρευσης στο Ω τότε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Απόδειξη :

Εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος για τη συνάρτηση $h = f - g$. ■

Παράδειγμα 4.2.8. Έστω $f : \bar{\Delta}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στον $\Delta(0, 1)$. Τότε υπάρχει ακέραιος $n > 1$ ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+1}$.

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$. Τότε $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z) = \frac{z}{1+z}$, $z \in \Delta(0, 1)$. Τότε, $f\left(\frac{1}{n}\right) = h\left(\frac{1}{n}\right)$ για κάθε $n = 2, 3, \dots$

. Επομένως, το σύνολο $A = \{z \in \Delta(0, 1) : f(z) = h(z)\} \supseteq \left\{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\right\}$ και άρα $0 \in \Delta(0, 1)$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Από την αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων έχουμε $f(z) = h(z)$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ δηλαδή $f(z) = \frac{z}{1+z}$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$. Έπεται ότι

$$\mathbb{C} \ni f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{1+z} = \infty,$$

άτοπο. ■

Θεώρημα 4.2.9. (Αρχή μεγίστου). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $|f|$ δε λαμβάνει μέγιστη τιμή στο Ω .

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ για κάθε $z \in \Omega$. Επιλέγουμε $r > 0$ με $\Delta(z_0, r) \subseteq \Omega$ Η f είναι δυναμοσειρά στον $\Delta(z_0, r) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$,

για $z \in \Delta(z_0, r)$. Έχουμε $a_0 = f(z_0)$ και επομένως $a_0 \neq 0$, διότι αν $a_0 = 0$ τότε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0, n \geq 1\} \neq \emptyset$. Αν $A = \emptyset$ τότε $f(z) = a_0$ για κάθε $z \in \Delta(z_0, r)$ και από την αρχή της μοναδικότητας θα ήταν $f(z) = a_0$ για κάθε $z \in \Omega$ δηλαδή f σταθερή στο Ω , άτοπο. Έστω $K = \min A$. Τότε $f(z) = a_0 + a_K(z - z_0)^K + a_{K+1}(z - z_0)^{K+1} + \dots, z \in \Delta(z_0, r)$. Έπεται $f(z) = \left[1 + \frac{a_K}{a_0(z - z_0)^K} + \frac{a_{K+1}}{a_0} (z - z_0)^{K+1} + \dots\right] = a_0[1 + b_K(z - z_0)^K(1 + (z - z_0)g(z))], z \in \Delta(z_0, r)$, όπου $b_K = \frac{a_K}{a_0}$ και $g(z), z \in \Delta(z_0, r)$ συνεχής συνάρτηση. Όστε $f(z) = a_0(1 + b_K(z - z_0)^K(1 + (z - z_0)g(z))), z \in \Delta(z_0, r)$. Το σύνολο $\bar{\Delta}\left(z_0, \frac{r}{2}\right) \subseteq \Delta(z_0, r)$ είναι συμπαγές. Επομένως, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \bar{\Delta}\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$. Έχουμε $b_K = \varrho e^{i\theta}, \varrho > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Επιλέγουμε $9 < r_1 \leq \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2M}\right\}$. Επιλέγουμε το εξής σημείο του κύκλου $C(z_0, r_1) : z_1 =$

$z_0 + r_1 e^{i\left(\frac{2\pi - \theta}{K}\right)} \in \Delta(z_0, r)$. Τότε έχουμε

$$f(z_1) = a_0 \left[1 + \varrho e^{i\theta} r_1^K e^{i(2\pi - \theta)} (1 + (z_1 - z_0)g(z))\right] = a_0 [1 + \varrho r_1^K + \varrho r_1^K (z_1 - z_0)g(z_1)].$$

Έπεται $|f(z_1)| \geq |a_0| [1 + \varrho r_1^K - \varrho r_1^K |z_1 - z_0| |g(z_1)|] \geq |a_0| \left[1 + \varrho r_1^K - \varrho r_1^K \frac{1}{2M} M\right] = |a_0| \left[1 + \frac{\varrho r_1^K}{2}\right] > |a_0|$. Δηλαδή $|f(z_1)| > |a_0| = |f(z_0)|$ και έτσι $|f(z_0)| > |f(z_0)|$ που είναι άτοπο. ■

Πόρισμα 4.2.10. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη μη στεθερή συνάρτηση. Τότε, ούτε το πραγματικό μέρος της f , $Re f$ ούτε το φανταστικό μέρος της f , $Im f$ παίρνουν μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη :

Η συνάρτηση $Re f$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = e^{f(z)}$. Η g είναι ολόμορφη και μη στεθερή. Επομένως, η $|g|$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή. Όμως $|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{Re f(z)}$. Αν η $Re f(z)$, $z \in \Omega$ έπαιρνε μέγιστη τιμή στο $z \in \Omega$ τότε $Re f(z) \leq Re f(z_0)$ για κάθε $z \in \Omega$ και άρα $e^{f(z)} \leq e^{f(z_0)}$. Όμως $e^{Re f(z)} = |g(z)|$ και άρα $|g(z)| \leq |g(z_0)|$ για κάθε $z \in \Omega$, άτοπο.

■

Πόρισμα 4.2.11. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη μη σταθερή ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε $|f|$ δεν παίρνει ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Η g είναι ολόμορφη μη σταθερή άρα η $|g|$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή που σημαίνει ότι η $|f|$ δεν παίρνει ελάχιστη τιμή.

■

Σημείωση 4.2.12. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένος τόπος $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο Ω . Τότε

$$|f(z)| \leq \sup \{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial\Omega\}, \forall z \in \Omega.$$

Παράδειγμα 4.2.13. Έστω $f : \bar{\Delta}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο $\Delta(0, 1)$, μη σταθερή ώστε $|f(\zeta)| = 1$ για κάθε $\zeta \in C(0, 1)$. Τότε η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\Delta(0, 1)$. Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$ τότε από την αρχή του ελαχίστου έχουμε

$$|f(z)| > \inf \{|f(\zeta)| : \zeta \in (0, 1)\} = 1.$$

Επίσης, από την αρχή του μεγίστου $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \Delta(0, 1)$.

Σημείωση 4.2.14. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $a \in \Omega$ και $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $r > 0$ με $\Delta(a, r) \subseteq \Omega$ ώστε η $f|_{\Delta(a, r) - \{a\}}$ είναι φραγμένη. Τότε η f μπορεί να ορισθεί και στο a ώστε η νέα συνάρτηση να είναι ολόμορφη στο Ω .

Απόδειξη :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C} :$

$$g(z) = \begin{cases} (z - a)f(z) & \text{αν } z \neq a \\ 0 & \text{αν } z = a \end{cases}$$

. Προφανώς η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0 = g(a).$$

Έτσι, η g είναι συνεχής στο Ω και ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επομένως, κατά τα γνωστά η g είναι ολόμορφη στο Ω , ειδικά υπάρχει η παράγωγος $g'(a)$ δηλαδή υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)f(z)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} f(z).$$

Έτσι, υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b.$$

■

Παράδειγμα 4.2.15. Έστω $f(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1, z \in \mathbb{C} - \{0\}$ το οποίο είναι τόπος. Έχουμε $f(z) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 2\kappa\pi i, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2\kappa\pi i}, \kappa \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Δηλαδή, $0 \in Z(f)'$ αλλά η f δεν ορίζεται στο μηδέν.

Εφαρμογή :

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη επέκταση της συνάρτησης $f(x) = \log x, x > 0$ στο $\mathbb{C} - \{0\}$.

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f(x) = \log x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{z}$. Έχουμε τότε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, x > 0$ και επομένως το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} - \{0\} : f'(z) = g(z)\}$ έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Δηλαδή $f'(z) = \frac{1}{z}$, για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Επομένως η συνάρτηση $\frac{1}{z}$ όπου $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Άρα το ολοκλήρωμα αυτής σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subset \mathbb{C} - \{0\}$ πρέπει να είναι μηδέν. Όμως, $\int_{C(0,1)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$, άτοπο.

■

Πρόταση 4.2.16. (Τύπος μέσης τιμής του Cauchy) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_0 \in \Omega$. Αν $r > 0$ ώστε $\delta(z_0, r) \in \Omega$ τότε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Απόδειξη :

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Gauss έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

όπου $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Επομένως,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})rie^{it}}{re^{it}} dt.$$

Συνεπώς, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$.

■

Δεύτερη Απόδειξη για την Αρχή του μεγίστου :

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, για κάθε $z \in \Omega$. Εφόσον η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν έχουμε ότι $f(z_0) \neq 0$. Έστω $r > 0$ ώστε $\overline{\delta(z_0, r)} \subset \Omega$. Από τον τύπο μέσης τιμής του Gauss έχουμε

$$(4.2) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Από τη σχέση 4.2 έπεται ότι $1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} dt$ και επομένως $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} dt$,

συνεπώς $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}\right) dt = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$:

$g(t) = 1 - \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)}$. Τότε έχουμε $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$ και άρα είναι

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(t) dt + i \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(t) dt = 0$$

άρα $\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g(t) dt = 0$ και $\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} g(t) dt = 0$. Έχουμε $\operatorname{Re} g(t) = 1 - \operatorname{Re} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} \geq$

$1 - \left| \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} \right| \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επίσης, η $\operatorname{Re} g(t)$ είναι συνεχής. Επομένως

$\operatorname{Re} g(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$, δηλαδή $1 = \operatorname{Re} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} \leq \left| \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} \right| \leq 1$, για κάθε

$t \in [0, 2\pi]$. Άρα $\left| \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} \right| = \operatorname{Re} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} = 1$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Επομένως

$\operatorname{Im} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} = 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ και συνεπώς $\frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} = \operatorname{Re} \frac{f(z_0 + re^{it})}{f(z_0)} = 1$ για κάθε

$t \in [0, 2\pi]$. Έπεται, λοιπόν, ότι $f(z_0 + re^{it}) = f(z_0)$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Δηλαδή $f(\zeta) = f(z_0)$ για κάθε $\zeta \in C(z_0, r)$. Κάθε σημείο της $C(z_0, r)$ είναι και σημείο συσσώρευσης αυτής. Άρα το σύνολο $A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$ έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω . Από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας έπεται ότι $f(z) = f(z_0)$ για κάθε $z \in \Omega$. Όμως αυτό είναι άτοπο διότι η συνάρτηση f σύμφωνα με την υπόθεση είναι μη σταθερή.

■

Θεώρημα 4.2.17. (Ανοκτής Απεικόνισης) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μη σταθερή. Τότε η f είναι ανοικτή, δηλαδή για κάθε $G \subseteq \Omega$ ανοικτό, το $f[G]$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη :

Η απόδειξη του θεωρήματος θα δοθεί παρακάτω με βάση την αρχή του ορίσματος.



Πόρισμα 4.2.18. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μη σταθερή. Τότε

- (i) η $|f|$ δε λαμβάνει μέγιστη τιμή.
- (ii) Οι συναρτήσεις $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ δεν λαμβάνουν ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.
- (iii) Αν $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ τότε η συνάρτηση $|f|$ δε λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

Παρατηρήσεις 4.2.19. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένος τόπος και $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής ώστε ο περιορισμός $f|_{\Omega}$ να είναι ολόμορφη συνάρτηση. Τότε $|f(z)| \leq \sup \{|f(\zeta)| : \zeta \in \bar{\Omega} - \Omega\} = \max \{|f(\zeta)| : \zeta \in \bar{\Omega} - \Omega\}$. Αυτό προκύπτει από τη συμπαγεια του $\bar{\Omega} - \Omega$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή η ανισότητα αυτή είναι γνήσια.

4.3 Σημεία ανωμαλίας

Θεωρούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις :

- (i) $f(z) = \frac{1}{z}, z \neq 0$.
- (ii) $g(z) = \frac{4z^2-1}{2z-1}, z \neq \frac{1}{2}$.
- (iii) $h(z) = e^{\frac{1}{z}}, z \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι

$$(i) \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty.$$

Το μηδέν είναι πόλος της f .

$$(ii) \quad \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} g(z) = 2.$$

Το $\frac{1}{2}$ είναι επουσιώδης ανωμαλία της g .

$$(iii) \quad \lim_{z \rightarrow 0} h(z)$$

δεν υπάρχει. Το μηδέν είναι ουσιώδης ανωμαλία της h .

Ορισμός 4.3.1. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε το a καλείται σημείο ανωμαλίας της f .

Ορισμός 4.3.2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$.

(i) Το a καλείται *επουσιώδης ανωμαλία της f* αν η f δεν μπορεί να ορισθεί στο a ώστε η νέα συνάρτηση να είναι ολόμορφη στο Ω .

(ii) Το a καλείται *πόλος της f* αν

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

(iii) Το a καλείται *ουσιώδης ανωμαλία της f* αν δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

στο $\bar{\mathbb{C}}$.

Συμβολισμός :

Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$. Τότε συμβολίζουμε $S(a, 0, r) = S(a, r) - \{a\}$ δηλαδή $S(a, 0, r)$ είναι ο δακτύλιος με μικρή ακτίνα μηδέν και μεγάλη ακτίνα r .

Θεώρημα 4.3.3. (Riemann) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

(i) Το a είναι *επουσιώδης ανωμαλία της f* .

(ii) Η f είναι *τοπικά φραγμένη στο a* δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$, ώστε $f|_{S(a, 0, \varepsilon)}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.

Απόδειξη :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Προφανές.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{αν } z \neq a \\ 0 & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Η h είναι προφανώς ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επίσης, η h παραγωγίζεται στο a και $h'(a) = 0$.

Έχουμε για $z \in \Omega, z \neq a$, $\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \frac{h(z)}{z-a} = \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = (z-a)f(z)$. Έπεται ότι

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$$

διότι η f είναι τοπικά φραγμένη στο a . Άρα υπάρχει η παράγωγος $h'(a)$ και $h'(a) = 0$. Η h είναι επομένως παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο Ω . Έστω $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$. Τότε

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ για κάθε } z \in S(a, r). \text{ Είναι } c_0 = h(a) = 0, c_1 = h'(a) = 0. \text{ Επομένως}$$

$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^{n+2}$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : S(a, rr) \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-a)^n$. Η συνάρτηση g είναι ολόμορφη και $h(z) = (z-a)^2 g(z)$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Συνεπώς $g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2}$ για κάθε $z \in S(a, r) - \{a\}$, (1). Από τον ορισμό της συνάρτησης h έχουμε $f(z) = \frac{h'(z)}{(z-a)^2}$ για κάθε $z \in \Omega - \{a\}$, (2). Από τις (1), (2) έπεται ότι $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in S(a, 0, r)$. Επομένως, αν ορίσουμε $f(a) = g(a) = c_2$ τότε $f|_{S(a, r)} = g|_{S(a, r)}$ και η $g|_{S(a, r)}$ είναι ολόμορφη άρα η συνάρτηση f έχει επεκταθεί σε μια συνάρτηση ολόμορφη σε ολόκληρο το Ω .

■

Πόρισμα 4.3.4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη :
Αν υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

στο $\mathbb{C}$ τότε η f είναι τοπικά φραγμένη και άρα από το θεώρημα Riemann το a είναι επουσιώδης ανωμαλία. Το αντίστροφο είναι προφανές.

■

Θεώρημα 4.3.5. (Casorati-Weierstrass) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

- (i) Το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f .
- (ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ με $S(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$, το σύνολο $f[S(a, 0, \varepsilon)]$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, δηλαδή $\overline{f[S(a, 0, \varepsilon)]} = \mathbb{C}$

Απόδειξη :

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Είναι προφανές.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $S(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$ ώστε το $f[S(a, 0, \varepsilon)]$ δεν είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$. Τότε υπάρχουν $w \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ ώστε $S(w, r) \cap f[S(a, 0, \varepsilon)] = \emptyset$. Ορίζεται τότε η συνάρτηση $g : S(a, 0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ και είναι ολόμορφη. Έχουμε ότι για κάθε $z \in S(a, 0, \varepsilon)$ το $f(z) \notin S(w, r)$. Άρα $|f(z) - w| \geq r$. Επομένως $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{r}$

για κάθε $z \in S(a, 0, r)$. Συνεπώς από το θεώρημα Riemann το a είναι σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της g . Έτσι, υπάρχει το

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z) - w}$$

στο $\mathbb{C}$. Άρα υπάρχει το όριο

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

στο $\bar{\mathbb{C}}$. Επομένως το a δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f , άτοπο. Άρα το $f[S(a, 0, \varepsilon)]$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

■

Σημείωση 4.3.6. Ισχύει κάτι πολύ ισχυρότερο. Συγκεκριμένα

(i) **Μεγάλο θεώρημα του Picard**

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε το a είναι ουσιώδης ανωμαλία. Τότε $f[S(a, 0, \varepsilon)] = \mathbb{C}$ —το πολύ ένα σημείο.

(ii) **Μικρό θεώρημα του Picard**

Αν η $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ακέραια, μη σταθερή συνάρτηση, τότε $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ —το πολύ ένα σημείο.

Οι αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων απαιτούν πιο προχωρημένες γνώσεις και δε θα δοθούν.

Θεώρημα 4.3.7. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $a \in \Omega$. Θεωρούμε μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f(a) = 0$ και $f \neq 0$. Τότε υπάρχουν ένας μοναδικός $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ και μια μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = (z - a)^m h(z)$ για κάθε $z \in \Omega$ και $h(a) \neq 0$.

Απόδειξη :

Από την αρχή της αναλυτικής συνέχειας έπεται ότι η ρίζα a είναι μεμονωμένη, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Η $f|_{S(a, r)}$ είναι δυναμοσειρά, επομένως από το λήμμα 4.2.1 έπεται ότι υπάρχουν $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ και $g : S(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f(z) = (z - a)^m g(z)$ για κάθε $z \in S(a, r)$ και $g(a) \neq 0$. Έπεται ότι $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$h(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m} & \text{αν } z \neq a \\ g(a) & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε η h είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$ και $h|_{S(a, r)} = g$. Επομένως, η h είναι ολόμορφη στο Ω και $f(z) = (z - a)^m h(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, $h(a) = g(a) \neq 0$.

Η μοναδικότητα των m και h αποδεικνύεται όπως ακριβώς έχειδειχθεί στο λήμμα 4.2.1.



Παρατηρήσεις 4.3.8. (i) Ο τόπος χρειάστηκε ώστε η ρίζα a να είναι μεμονωμένη.
 (ii) Το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει αν το Ω είναι ανοικτό και η ρίζα a είναι μεμονωμένη.

4.3.1 Πόλοι

Θεώρημα 4.3.9. (Χαρακτηρισμός πόλων) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα :

- (i) Το a είναι πόλος της f .
 (ii) Υπάρχουν ένας μοναδικός $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 1$ και μια μοναδική ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = (z - a)^{-\kappa} g(z)$$

για κάθε $z \in \Omega, z \neq a$ και $g(z) \neq 0$.

- (iii) Υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί $c_1, c_2, \dots, c_\kappa$ με $c_\kappa \neq 0$ ώστε η συνάρτηση

$$f(z) - \left(\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa} \right)$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a .

Απόδειξη :

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Εφόσον

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

από τον ορισμό του πόλου υπάρχει $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, 0, r)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : S(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{αν } z \neq a \\ 0 & \text{αν } z = a \end{cases}$$

, (1) Η h είναι προφανώς ολόμορφη στο $S(a, 0, r)$, όμως

$$\lim_{z \rightarrow a} h(z) = 0 = h(a).$$

Επομένως, η h είναι ολόμορφη στο δίσκο $S(a, r)$ από το θεώρημα Riemann, $h(a) = 0$ και $h(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Από το θεώρημα 4.3.7 υπάρχουν $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 1$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $h_1 : S(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $h(z) = (z-a)^\kappa h_1(z)$ για κάθε $z \in S(a, r)$ και $h_1 \neq 0$, (2). Έπεται ότι $h_1(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Από (1), (2) έχουμε ότι

$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-\kappa} h_1(z)$ δηλαδή $f(z) = (z-a)^{-\kappa} \frac{1}{h_1(z)}$ για κάθε $z \in S(a, 0, r)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^\kappa f(z) & \text{αν } z \neq a \\ \frac{1}{h_1(a)} & \text{αν } z = a \end{cases}$$

Τότε προφανώς η g είναι ολόμορφη στο $\Omega - \{a\}$. Επίσης, $g|_S(a, r) = \frac{1}{h_1}$. Έτσι, η g είναι ολόμορφη στο Ω . Έχουμε $g(a) = \frac{1}{h_1(a)} \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^{-\kappa} g(z)$ για κάθε $z \in \Omega$ με $z \neq a$. Η μοναδικότητα του κ αποδεικνύεται όπως σε προηγούμενες προτάσεις. (ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $r > 0$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$. Τότε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

για κάθε $z \in S(a, r)$, (1). Επομένως για κάθε $z \in S(a, 0, r)$ έχουμε

$$f(z) = (z-a)^{-\kappa} [a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_\kappa(z-a)^\kappa + \dots]$$

ώστε για κάθε $z \in S(a, 0, r)$,

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^\kappa} + \frac{a_1}{(z-a)^{\kappa-1}} + \dots + \frac{a_{\kappa-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^n.$$

Θέτουμε $c_i = a_{\kappa-i}$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$. Τότε $f(z) - \left[\frac{c_1}{z-a} + \dots + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^n$, (2).

Η συνάρτηση $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^n$ είναι ολόμορφη στο $S(a, r)$. Από την (1) έχουμε $c_\kappa = a_0 = g(a) \neq 0 \Rightarrow c_\kappa \neq 0$. Επίσης, από τη (2) έπεται ότι υπάρχει το $\lim \left[f(z) - \left(\frac{c_1}{z-a} + \dots + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa} \right) \right] \in \mathbb{C}$ και επομένως αυτή η συνάρτηση έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a . Η μοναδικότητα των c_i , $i = 1, 2, \dots, \kappa$ προκύπτει από τις σχέσεις $c_i = a_{\kappa-i} = \frac{g^{\kappa-i}(a)}{(\kappa-i)!}$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$. (iii) $\Rightarrow$ (i)

Έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{c_1}{(z-a)} + \dots + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa} \right] = \infty$$

εφόσον $c_\kappa \neq 0$ και άρα πρέπει

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

■

Ορισμός 4.3.10. Ο αριθμός κ καλείται τάξη του πόλου a και η παράσταση $\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_\kappa}{(z-a)^\kappa}$ καλείται κύριο μέρος της f στο a .

Θεώρημα 4.3.11. (Το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$, ώστε $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$, έχουμε

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Ορισμός 4.3.12. Ένας τόπος $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ καλείται απλά συνεκτικός τόπος αν για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega$ έχουμε $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$.

Ορισμός 4.3.13. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f συνάρτηση. Η f καλείται μερόμορφη στο Ω αν υπάρχει $A \subseteq \Omega$ ώστε το A να μην έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω -άρα το A είναι αριθμήσιμο- ώστε $f : \Omega - A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και κάθε σημείο του A είναι πόλος της f .

Παράδειγμα 4.3.14. Μια ρητή συνάρτηση είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$.

Κεφάλαιο 5

Αρχή του ορίσματος

5.1 Εισαγωγή

Λήμμα 5.1.1. Έστω $h_1, h_2, \dots, h_n$ μερόμορφες συναρτήσεις στο ανοικτό σύνολο Ω και $h = h_1 h_2 \dots h_n$. Τότε για κάθε $z \in \Omega$ έτσι ώστε η h_κ να ορίζεται και $h_\kappa \neq 0$ έχουμε $\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{h'_1(z)}{h_1(z)} + \dots + \frac{h'_n(z)}{h_n(z)}$. Η $\frac{h'}{h}$ καλείται λογαριθμική παράγωγος του h .

Απόδειξη :

Έχουμε $h = h_1 h_2 \dots h_n$ και άρα $h'(z) = h'_1(z) h_2(z) \dots h_n(z) + h_1(z) h'_2(z) \dots h_n(z) + \dots + h_1(z) h_2(z) \dots h'_n(z)$. Συνεπώς

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{h'(z)}{h_1(z) h_2(z) \dots h_n(z)} = \frac{h'_1(z) h_2(z) \dots h_n(z)}{h_1(z) h_2(z) \dots h_n(z)} + \dots + \frac{h_1(z) h_2(z) \dots h'_n(z)}{h_1(z) h_2(z) \dots h_n(z)} = \frac{h'_1(z)}{h_1(z)} + \frac{h'_2(z)}{h_2(z)} + \dots + \frac{h'_n(z)}{h_n(z)}$$

■

Λήμμα 5.1.2. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f μια μερόμορφη συνάρτηση στο Ω με ρίζες $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ και πόλους $a_1, a_2, \dots, a_\kappa$ όπου κάθε πόλος λαμβάνεται τόσες φορές όση είναι και η τάξη του. Τότε υπάρχει $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ με τις εξής ιδιότητες :

(i) $f(z) = \frac{(z-\varrho_1) \dots (z-\varrho_n)}{(z-a_1) \dots (z-a_\kappa)} g(z)$ για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, \dots, a_\kappa\}$.

(ii) $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z-\varrho_1)} + \frac{1}{z-\varrho_2} + \dots + \frac{1}{z-\varrho_n} - \left[\frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \dots + \frac{1}{z-a_\kappa} \right] + \frac{g'(z)}{g(z)}$ για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, a_2, \dots, a_\kappa, \varrho_1, \dots, \varrho_n\}$.

Απόδειξη :

Με επαναληπτική χρήση των θεωρημάτων για τις ρίζες και τους πόλους βρίσκουμε μια

συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ώστε

$$f(z) = \frac{(z - \varrho_1)(z - \varrho_2) \dots (z - \varrho_n)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_\kappa)} g(z),$$

για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, a_2, \dots, a_\kappa\}$. Από το λήμμα 5.1.1 έχουμε $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{(z - \varrho_1)} + \frac{1}{(z - \varrho_2)} + \dots + \frac{1}{(z - \varrho_n)} - \left[\frac{1}{z - a_1} + \frac{1}{z - a_2} + \dots + \frac{1}{z - a_\kappa} \right] + \frac{g'(z)}{g(z)}$ για κάθε $z \in \Omega - \{a_1, a_2, \dots, a_\kappa, \varrho_1, \dots, \varrho_n\}$.

■

Θεώρημα 5.1.3. (Αρχή του ορίσματος) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, f μερόμορφη συνάρτηση στο Ω με πόλους $a_1, a_2, \dots, a_\kappa$. Έστω $w \in \mathbb{C}$ και $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n \in \Omega$ οι ρίζες της $f - w$ όπου κάθε πόλος και κάθε ρίζα λαμβάνεται τόσες φορές όση είναι η τάξη του. Έστω, επίσης $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega - \{a_1, \dots, a_\kappa, \varrho_1, \dots, \varrho_n\}$ ώστε $\text{Ind}_\gamma = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C} - \Omega$. Τότε

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{\zeta=1}^n \text{Ind}_\gamma(\varrho_\zeta) - \sum_{\zeta=1}^\kappa \text{Ind}_\gamma(a_\zeta).$$

Απόδειξη :

Από το λήμμα 5.1.2 υπάρχει $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ώστε

$$\frac{f'(z)}{f(z) - w} = \sum_{\zeta=1}^n \frac{1}{z - \varrho_\zeta} - \sum_{\zeta=1}^\kappa \frac{1}{z - a_\zeta} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

για κάθε $z \in \Omega - \{\varrho_1, \dots, \varrho_n, a_1, \dots, a_\kappa\}$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{\zeta=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \varrho_\zeta} dz - \sum_{\zeta=1}^\kappa \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a_\zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$. Επίσης, $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \varrho_\zeta} dz =$

$\text{Ind}_\gamma(\varrho_\zeta)$, για κάθε $\zeta = 1, 2, \dots, n$ και $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a_\zeta} dz = \text{Ind}_\gamma(a_\zeta)$, για κάθε $\zeta =$

$1, 2, \dots, \kappa$. Άρα $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \sum_{\zeta=1}^n \text{Ind}_\gamma(\varrho_\zeta) - \sum_{\zeta=1}^\kappa \text{Ind}_\gamma(a_\zeta)$. Θα δείξουμε ότι $\text{Ind}_{f \circ \gamma}(w) =$

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz$. Έχουμε υποθέσει ότι η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Έχουμε εξ' ορισμού ότι

$$\text{Ind}_{f \circ \gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t) - w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz.$$

Πόρισμα 5.1.4. Έστω f μερόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $r > 0$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$. Έστω $w \in \mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι στην περιφέρεια $C(a, r)$ η $f - w$ δεν έχει ούτε ρίζες ούτε πόλους και έστω $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε

(i) $Ind_{f \circ \gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz =$ αριθμός ριζών της $f - w$ στο $S(a, r)$ - αριθμός πόλων της $f - w$ στο $S(a, r)$, όπου κάθε ρίζα και κάθε πόλος λαμβάνεται τόσες φορές όσες η τάξη του.

(ii) Αν η f είναι ολόμορφη τότε $Ind_{f \circ \gamma}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz =$ αριθμός των ριζών της $f - w$ στο εσωτερικό του $S(a, r)$.

5.1.1 Ανοικτές απεικονίσεις

Πόρισμα 5.1.5. (Το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη μη σταθερή μιγαδική συνάρτηση. Τότε η f είναι ανοικτή, δηλαδή αν $G \subseteq \Omega$ ανοικτό τότε $f(G)$ ανοικτό.

Απόδειξη :

Έστω $G \subseteq \Omega$ ανοικτό, $a \in G$. Θέτουμε $b = f(a)$. Η $f - b$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν άρα η ρίζα της a είναι μεμονωμένη, δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq G$ ώστε $f(z) - b \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow G : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε από την αρχή του ορίσματος έχουμε ότι $Ind_{f \circ \gamma}(b) =$ αριθμός των ριζών της $f - b$ στην $S(a, r) \neq 0$. Έχουμε $b \notin f[C(a, r)]$ και το $f[C(a, r)]$ είναι συμπαγές άρα κλειστό. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $S(b, \varepsilon) \cap f[C(a, r)] = \emptyset$. Είναι $(f \circ \gamma)^* = f[C(a, r)]$. Έτσι $S(b, \varepsilon) \cap (f \circ \gamma)^* = \emptyset$. Επομένως για κάθε $w \in S(b, \varepsilon)$ τα σημεία b και w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - (f \circ \gamma)^*$. Συνεπώς $Ind_{f \circ \gamma}(w) = Ind_{f \circ \gamma}(b) \neq 0$ και άρα $Ind_{f \circ \gamma}(w) \neq 0$. Από την αρχή του ορίσματος έπεται ότι υπάρχει $z \in S(a, r)$ ώστε $f(z) = w$. Έστω $S(b, \varepsilon) \subseteq f(G)$ και άρα $f(G)$ ανοικτό.

Θεώρημα 5.1.6. (Rouche) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και f, g μερόμορφες συναρτήσεις στον Ω , $a \in \Omega$ ώστε $S(a, r) \subseteq \Omega$. Υποθέτουμε ότι

- (i) Η f δεν έχει ρίζες στην περιφέρεια $C(a, r)$ και η g δεν έχει πόλους στην περιφέρεια $C(a, r)$.
- (ii) $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Τότε : αριθμός ριζών της $f + g$ στο $S(a, r)$ - αριθμός των πόλων της $f + g$ στο $S(a, r) =$ αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$ - αριθμός των πόλων της f στο $S(a, r)$.

Απόδειξη :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = 1 = \frac{g}{f}$. Αυτή είναι μερόμορφη στο Ω και για κάθε $\zeta \in C(a, r)$ έχουμε $|h(\zeta) - 1| = \frac{|g(\zeta)|}{|f(\zeta)|} < 1$ από την υπόθεση (ii). Άρα $Re(1 - h(\zeta)) \leq |h(\zeta) - 1| < 1$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Δηλαδή $1 - Re h(\zeta) < 1$ και επομένως $Re h(\zeta) > 0$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Έστω η καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma(t) = a + re^{it}$. Τότε $Re(h \circ \gamma)(t) > 0$ για κάθε $t \in [0, 2\pi]$ Επομένως το μηδέν ανήκει στη μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} - (h \circ \gamma)^*$ και άρα $Ind_{f \circ \gamma}(0) = 0$. Άρα από την αρχή του ορίσματος έπεται ότι

- (i) $0 = Ind_{f \circ \gamma}(0) =$ αριθμός ριζών της h στο $S(a, r)$ -αριθμός των πόλων της h στο $S(a, r)$. Είναι $h = \frac{f+g}{f}$ και επομένως
- (ii) αριθμός ριζών της h στο $S(a, r) =$ αριθμός ριζών της $f+g$ στο $S(a, r)$ + αριθμός των πόλων της f στο $S(a, r)$. Επίσης,
- (iii) αριθμός των πόλων της h στο $S(a, r) =$ αριθμός των πόλων της $f+g$ στο $S(a, r)$ + αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$.

Από τις (i), (ii), (iii) προκύπτει ότι ο αριθμός των ριζών της $f+g$ στο $S(a, r)$ + αριθμός των πόλων της f στο $S(a, r) =$ αριθμός των πόλων της $f+g$ στο $S(a, r)$ + αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$. Άρα, αριθμός των ριζών της $f+g$ στο $S(a, r)$ - αριθμός των πόλων της $f+g$ στο $S(a, r) =$ αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$ - αριθμός των πόλων της f στο $S(a, r)$. Στην περίπτωση που έχουμε αμοιβαία αναίρεση ριζών και πόλων ο τύπος εξακολουθεί να ισχύει. ■

Θεώρημα 5.1.7. (Θεώρημα Rouché για ολόμορφες συναρτήσεις) Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και την επιπλέον υπόθεση ότι οι f, g είναι ολόμορφες συναρτήσεις έπεται ότι ο αριθμός των ριζών της $f+g$ στο $S(a, r) =$ αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$.

Πόρισμα 5.1.8. (Θεώρημα του D' Alembert) Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει ακριβώς n ρίζες.

Απόδειξη :

Έστω $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ με $a_n \neq 0, n \geq 1$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(z) = a_n z^n$ και $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$. Τότε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

Επομένως για αρκετά μεγάλο $R > 0$ έχουμε $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| > 1$ για κάθε $z \in C(0, R)$. Από το θεώρημα 5.1.6 έπεται ότι: αριθμός ριζών της $f+g$ στο $S(0, R) =$ αριθμός ριζών της f στο $S(0, R) = n$ (από τον τύπο της f). Αλλά $p(z) = f(z) + g(z)$ άρα το $p(z)$ έχει n ακριβώς ρίζες στο $S(0, R)$.

Παράδειγμα 5.1.9. Να υπολογιστεί ο αριθμός των ριζών της $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ στο $S(0, 1)$.

Λύση :

Απομονώνουμε το μονώνυμο με το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή συντελεστή, δηλαδή το $-4z^5$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(z) = -4z^5$ και $g(z) = z^8 + z^2 - 1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζ με $|\zeta| = 1$ έχουμε $|g(\zeta)| \leq |z^8| + |z|^2 + 1 = 3 < 4|\zeta|^5 = |f(\zeta)|$. Δηλαδή $|g(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε ζ με $|\zeta| = 1$. Άρα από το θεώρημα 5.1.6 έχουμε ότι : αριθμός των ριζών της $f + g$ = αριθμός των ριζών της f στο $S(0, 1) = 5$.

5.1.2 Σύγκλιση

Θεώρημα 5.1.10. (Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$ ώστε για κάθε n η f_n να είναι ολόμορφη και $f_n \rightarrow f$ ολόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Τότε

- (i) η f είναι ολόμορφη.
- (ii) $f'_n \rightarrow f'$ ολόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω .

Απόδειξη :

- (i) Η f είναι συνεχής κατά τα γνωστά. Έστω $a \in \Omega, r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$. Το $S(a, r)$ είναι ανοικτό-κυρτό. Από το λήμμα Cauchy-Goursat έχουμε ότι $\int_{\partial\Delta} f_n(z) dz = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$ και για κάθε n . Για κάθε τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$ το $\partial\Delta$ είναι συμπαγές και άρα $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $\partial\Delta$ επομένως

$$\int_{\partial\Delta} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z) dz.$$

Έτσι, $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ για κάθε κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq S(a, r)$. Από το θεώρημα Morera έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στο $S(a, r)$.

- (ii) Η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα 5.1.11. (Hurwitz) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$ ώστε κάθε f_n είναι ολόμορφη και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Έστω, επίσης, $a \in \Omega, r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$. Υποθέτουμε ότι $f(\zeta) \neq 0$ για κάθε $\zeta \in S(a, r)$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N \Rightarrow$ αριθμός των ριζών της f_n στο $S(a, r)$ = αριθμός των ριζών της f στο $S(a, r)$. Κάθε ρίζα λαμβάνεται τόσες φορές όσος είναι ο βαθμός πολλαπλότητας.

Απόδειξη :

Από το Θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass η f είναι ολόμορφη. Θέτουμε $\varepsilon = \inf \{|f(\zeta)| : \zeta \in C(a, r)\} = \min \{|f(\zeta)| : \zeta \in C(a, r)\} > 0$. Η $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $C(a, r)$ άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να έχουμε $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Από το θεώρημα Rouché έπεται ότι : αριθμός ριζών της $f_n - f + f$ στο $S(a, r)$ = αριθμός ριζών της f στο $S(a, r)$ για κάθε $n \geq N$. Δηλαδή : αριθμός ριζών της f_n στο $S(a, r)$ = αριθμός ριζών της f στο $S(a, r)$ για κάθε $n \geq N$.

■

Πόρισμα 5.1.12. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος και $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$ ώστε κάθε f_n είναι ολόμορφη και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω . Υποθέτουμε ότι $f_n(z) \neq 0$, για κάθε $z \in \Omega$ και για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Τότε είτε $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$ ή $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \Omega$.

Απόδειξη :

Ας υποθέσουμε ότι $f \neq 0$ και ότι υπάρχει $a \in \Omega$ ώστε $f(a) = 0$. Τότε από της αρχή της αναλυτικής συνέχειας η ρίζα a είναι μεμονωμένη εφόσον ο Ω είναι τόπος. Δηλαδή υπάρχει $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r)$ με $z \neq a$. Ειδικά $f(\zeta) \neq 0$ για κάθε $\zeta \in C(a, r)$. Από το θεώρημα Hurwitz υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N$, αριθμός των ριζών της f_n στο $S(a, r)$ = αριθμός ριζών της f στο $S(a, r) \neq 0$. Άρα η f_n έχει ρίζα στο $S(a, r)$ για κάθε $n \geq N$, που αντιβαίνει στην υπόθεση.

■

5.1.3 Ανάπτυγμα Laurent**Συμβολισμός :**

Έστω $a \in \Omega, 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$. Θέτουμε $S(a_1, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$. Το σύνολο $S(a_1, r_1, r_2)$ καλείται δακτύλιος κέντρου a και ακτίνων r_1, r_2 .

Θεώρημα 5.1.13. (Weierstrass-Laurent) Έστω $a \in \Omega$ και $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ και $f : S(a_1, r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια μοναδική διπλή α-

κολουθία $\{a_n, n = 0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n +$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - a)^n$ για κάθε $z \in S(a, r_1, r_2)$. Επιπλέον, η σύγκλιση των

δύο σειρών είναι απόλυτη για κάθε $z \in S(a, r_1, r_2)$ και ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $S(a, r_1, r_2)$. Επίσης, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$ για κάθε $n = 0, -1, 1, -2, 2, \dots$ και

για κάθε $\varrho \in \mathbb{R}$ με $r_1 < \varrho < r_2$. Ειδικά για $n = -1$ έχουμε $\int_{C(a, r)} f(\zeta) d\zeta$ για κάθε $r_1 < \varrho < r_2$.

Παρατηρήσεις 5.1.14. (i) Αν $f : S(a, 0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση ($R > 0$) και το a είναι πόλος τάξης $m \geq 1$ τότε η παράσταση που μας δίνει το θεώρημα Weierstrass-Laurent συμπίπτει με την παράσταση που προκύπτει από το θεώρημα χαρακτηρισμού των πόλων. Τότε το δεύτερο άθροισμα είναι πεπερασμένο και είναι το κύριο μέρος της f στο a :

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}.$$

(ii) Έστω συνάρτηση $f : S(a, 0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη και $R > 0$. Έστω επίσης το ανάπτυγμα Laurent της $f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}, z \in S(a, 0, R)$. Τότε

(α') Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση η f επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση στο $S(a, r)$ θέτοντας $f(a) = a_0$.

(β') Η f έχει πόλο τάξης $m \geq 1$ στο a αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > m$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m}$$

είναι το κύριο μέρος της f στο a .

(γ') Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} \neq 0$ για άπειρα $n > 0$.

Παράδειγμα 5.1.15. Η συνάρτηση $z \sin \frac{1}{z}$ έχει ανωμαλία στο μηδέν. Θα δούμε τι είδους ανωμαλία είναι το μηδέν. Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor του $\sin \omega = \omega = \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots$. Άρα $z \sin \frac{1}{z} = z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \dots$. Επομένως, το μηδέν είναι ουσιώδης ανωμαλία της $z \sin \frac{1}{z}$.

Κεφάλαιο 6

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

6.1 Εισαγωγή

Ορισμός 6.1.1. Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $R > 0$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $f : S(a, 0, R) \rightarrow \mathbb{C}$. Έστω, επίσης, το ανάπτυγμα *Laurent* της f

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n},$$

για κάθε $z \in S(a < 0, R)$. Τότε ο αριθμός a_{-1} καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο a και συμβολίζεται με $\text{Res}(f, a)$. Έχουμε

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} f(\zeta) d\zeta$$

για κάθε $0 < r < R$, δηλαδή

$$\int_{C(a, r)} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \text{Res}(f, a).$$

Παράδειγμα 6.1.2. (i) Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $z \sin \frac{1}{z}$ στο μηδέν είναι $\text{Res}(z \sin \frac{1}{z}, 0) = 0$ και άρα $\int_{C(0, \varrho)} z \sin \frac{1}{z} dz = 0$ για κάθε $\varrho > 0$.

(ii) Έστω $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$. Ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$ είναι 1. Άρα $\text{Res}(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1$ και επομένως $\int_{C(0, \varrho)} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \text{Res}(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 2\pi i 1$ για κάθε $\varrho > 0$.

$$(iii) \text{ Έστω } z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots \text{ Επομένως}$$

$$Res(z^2 \sin \frac{1}{z}, 0) = -\frac{1}{6} \text{ και άρα } \int_{C(0, \varrho)} z^2 \sin \frac{1}{z} dz = -\frac{1}{6} 2\pi i = -\frac{\pi i}{3} \text{ για κάθε } \varrho > 0.$$

Θεώρημα 6.1.3. (Θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_\kappa \in \Omega$ και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{\varrho_1, \dots, \varrho_\kappa\} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε κάθε $\varrho_j, j = 1 = 2, \dots, \kappa$ να είναι πόλος της f . Έστω, επίσης, κλειστή καμπύλη γ με $\gamma^* \subseteq \Omega - \{\varrho_1, \dots, \varrho_\kappa\}$ και $Ind_\gamma(a) = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{C} - \Omega$. Τότε

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\kappa} Res(f, \varrho_j) Ind_\gamma(\varrho_j).$$

Απόδειξη :

Για κάθε $j = 1 = 2, \dots, \kappa$ έστω $R_j(z) = \frac{c_{j,1}}{z - \varrho_j} + \dots \frac{c_{j,\kappa}}{(z - \varrho_j)^{\kappa_j}}$ το κύριο μέρος της f στον πόλο ϱ_j . Τότε η συνάρτηση $f - \sum_{j=1}^{\kappa} R_j$ έχει επουσιώσιμες ανωμαλίες στα σημεία $\varrho_1, \dots, \varrho_\kappa$.

Επομένως, από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$(i) \int_\gamma \left[f(z) - \sum_{j=1}^{\kappa} R_j(z) \right] dz = 0.$$

$$(ii) \int_\gamma R_j(z) dz = c_{j,1} \int_\gamma \frac{1}{z - \varrho_j} dz + c_{j,2} \int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^2} dz + \dots + c_{j,\kappa} \int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^{\kappa_j}} dz.$$

Έχουμε $\int_\gamma \frac{1}{(z - \varrho_j)^r} dz = 0$ για κάθε $r = 2, \dots, \kappa_j$ διότι οι συναρτήσεις $\frac{1}{(z - \varrho_j)^r}$ έχουν παράγουσες για κάθε $r = 2, 3, \dots, \kappa_j$. Επομένως, η (ii) γίνεται

$$\int_\gamma R_j(z) dz = c_{j,1} 2\pi i Ind_\gamma(\varrho_j)$$

για κάθε $1 \leq j \leq \kappa$. Είναι $c_{j,1} = Res(f, \varrho_j)$ επομένως από την (i) έχουμε

$$\int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^{\kappa} \int_\gamma R_j(z) dz.$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta \int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^{\kappa} 2\pi i Res(f, \varrho_j) Ind_\gamma(\varrho_j).$$

■

Πρόταση 6.1.4. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $a \in \Omega$. Θεωρούμε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε το σημείο a είναι πόλος της f τάξης m . Έστω, επίσης, ολόμορφη συνάρτηση $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$f(z) = (z - a)^{-m} g(z)$$

για κάθε $z \in \Omega - \{a\}$, $g(a) \neq 0$ (όπως προκύπτει από το χαρακτηρισμό των πόλων). Τότε $\text{Res}(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$.

Παρατηρήσεις 6.1.5. (i) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε το a να είναι πόλος της f . Η τάξη του πόλου a της f είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός $m \geq 1$ ώστε το

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z)$$

υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

(ii) Αν m είναι η τάξη του πόλου a της f τότε

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{[(z - a)^m f(z)]}{(m - 1)!}.$$

Παράδειγμα 6.1.6. Έστω ότι η τάξη είναι $m = 1$. Τότε

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z).$$

Έστω η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Οι πόλοι της f είναι το i και το $-i$. Έχουμε $(z - i)f(z) = (z - i) \frac{1}{(z-i)(z+i)}$. Επομένως,

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}.$$

(iii) Αν το a δεν είναι πόλος αλλά επουσιώδης ανωμαλία τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο θα βρεθεί βρίσκοντας το αντίστοιχο ανάπτυγμα *Laurent* μέσω του αναπτύγματος *Taylor* χρησιμοποιώντας βοηθητική μεταβλητή.

(iv) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ με $a \in \Omega$ μια μεμονωμένη ρίζα. Ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας a είναι $m \geq 1$ αν και μόνο αν

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{m-1}(a) = 0$$

και $f^m(a) \neq 0$.

Πρόταση 6.1.7. (Κανόνας *De L' Hospital*) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις, $a \in \Omega$ μεμονωμένη ρίζα των f, g τάξης κ και m αντίστοιχα. Τότε

(i) Το a είναι επουσιώδης ανωμαλία της $\frac{f}{g}$ αν $\kappa \geq m$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \kappa > m \\ \frac{f^\kappa(a)}{g^\kappa(a)} & \text{αν } \kappa = m \end{cases}$$

(ii) Το a είναι πόλος της $\frac{f}{g}$ τάξης $m - \kappa$ αν $m > \kappa$ και άρα

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

Απόδειξη :

Έστω $r > 0$ με $S(a, r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in S(a, r), z \neq a$. Έστω, επίσης, τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor

$$(i) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$(ii) \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

για κάθε $z \in S(a, r)$. Τότε $a_0 = a_1 = \dots = a_{\kappa-1} = 0, a_\kappa \neq 0$ και $b_1 = b_2 = \dots b_{m-1}, b_m \neq 0$. Άρα $f(z) = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n (z-a)^n$ και $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^n$ για κάθε $z \in S(a, r)$. Επομένως $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^{\kappa+n}$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z-a)^{n+m}$.
 Δηλαδή $f(z) = (z-a)^\kappa \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^n$ και $g(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z-a)^n$ και

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^\kappa \sum_{n=0}^{\infty} a_{\kappa+n} (z-a)^n}{(z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m} (z-a)^n} \quad \text{για κάθε } z \in S(a, r), z \neq a. \text{ Συνεπώς έχουμε ότι}$$

$$\lim_{z \rightarrow a} = \begin{cases} 0 & \text{αν } \kappa > m \\ \frac{\kappa! a_\kappa}{\kappa! b_\kappa} & \text{αν } \kappa = m \\ \infty & \text{αν } m > \kappa \end{cases}$$

■

Λήμμα 6.1.8. Έστω $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Θέτουμε $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z = |z|e^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$. Για κάθε $r > 0$ έστω καμπύλη $\gamma_r = [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \Omega : \gamma_r(\theta) = re^{i\theta}$. Έστω επίσης $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων. Αν

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$$

τότε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Απόδειξη :

Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο $S(a, r)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ασυνέχειας της f . Για κάθε $r > r_0$ θέτουμε $M(r) = \sup \{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = \max \{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = |f(z_r)|$ με $z_r \in \gamma_r^*$. Τότε

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq M(r)r(\theta_2 - \theta_1) \leq |f(z_r)||z_r|(\theta_2 - \theta_1) \leq |z_r f(z_r)|(\theta_2 - \theta_1) \rightarrow 0 \text{ καθώς } r \rightarrow 0. \text{ Άρα}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

■

Πρόταση 6.1.9. Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ τα οποία δεν ανήκουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και είναι πόλοι της f . Υποθέτουμε ακόμα ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0.$$

Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \{Res(f, \varrho_\kappa) : Im \varrho_\kappa > 0\}.$$

Απόδειξη :

Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$. Για κάθε $r > r_0$ θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $c_r = [-r, r] + \gamma_r$, όπου $\gamma_r(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{c_r} f(z) dz = \int_{r-}^r f(z) dz + \int_{\gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum \{Res(f, \varrho_\kappa) : Im \varrho_\kappa > 0\}.$$

Από γνωστό λήμμα έχουμε ότι

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} f(z) dz = 0$$

και άρα

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum \{Res(f, \varrho_\kappa) : Im \varrho_\kappa > 0\},$$

δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \{Res(f, \rho_k) : Im \rho_k > 0\}$.

■

Παράδειγμα 6.1.10. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ Η f έχει τα σημεία i και $-i$ πόλους τάξης 1. Επίσης,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{1}{1+z^2} = 0.$$

Έχουμε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i Res(f, i)$ από το θεώρημα. Είναι

$$Res(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}.$$

Επομένως $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$, άρα $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ εφόσον η $\frac{1}{1+x^2}$ είναι άρτια.

■

Λήμμα 6.1.11. (Jordan) Έστω $0 \leq a < b \leq \pi$ και $\lambda > 0$. Τότε

$$\int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt < \frac{\pi}{\lambda}.$$

Απόδειξη :

Παρατηρούμε ότι $\int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt \leq \int_0^{\pi} e^{-\lambda \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t} dt$. Είναι

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t} dt. \text{ Πράγματι, με αλλαγή μεταβλητής έχουμε}$$

$$(i) \quad t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$(ii) \quad t = \pi \Rightarrow x = 0$$

$$(iii) \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda \sin t} dt = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\lambda \sin(\pi-x)} dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-\lambda \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin x} dx. \text{ Άρα } \int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt \leq$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t} dt. \text{ Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι } \sin t \geq \frac{2t}{\pi} \text{ για κάθε}$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \text{ Επομένως } \int_a^b e^{-\lambda \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\lambda 2t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}) < \frac{\pi}{\lambda}.$$

Λήμμα 6.1.12. Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ και συνάρτηση σημείων ώστε

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

Για κάθε $r > 0$ έστω η καμπύλη $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega : \gamma_r(t) = re^{it}$. Τότε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Απόδειξη :

Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ασυνέχειας της f . Για κάθε $r > r_0$ έχουμε $\int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = \int_0^\pi f(\gamma_r(t)) e^{i\lambda r(\cos t + i \sin t)} i r e^{it} dt$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [0, \pi]$, $|f(\gamma_r(t)) e^{i\lambda r(\cos t + i \sin t)} i r e^{it}| = r |f(\gamma_r(t))| e^{-(\lambda r) \sin t} \leq r M(r) e^{-(\lambda r) \sin t}$ όπου $M(r) = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r^*\} = |f(z_r)|$ για κάποιο $z_r \in \gamma_r^*$. Επομένως $\left| \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq |z_r| |f(z_r)| \int_0^\pi e^{-(\lambda r) \sin t} dt \leq |z_r| |f(z_r)| \frac{\pi}{\lambda r}$. Από το λήμμα Jordan. Άρα

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

εφόσον

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(z_r) = 0.$$

Θεώρημα 6.1.13. Θέτουμε $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το Ω και είναι ολόμορφη εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $\rho_1, \dots, \rho_\kappa$ τα οποία δεν ανήκουν στον άξονα $\mathbb{R}$ και είναι πόλοι της f . Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Έστω επίσης $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum \{ \operatorname{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, \rho_\kappa) : \operatorname{Im} \rho_\kappa > 0 \}.$$

Απόδειξη :

Έστω $r_0 > 0$ ώστε στο δίσκο $S(0, r_0)$ να ανήκουν όλα τα σημεία ρ_1, ρ_n . Για κάθε $r > r_0$ θεωρούμε την καμπύλη $c_r = [-r, r] + \gamma_r$ όπου $\gamma_r : [0, \pi] \rightarrow \Omega : \gamma_r(t) = re^{it}$. Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε

$$\int_{c_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = \int_{-r}^r f(z) e^{i\lambda z} dz + \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = 2\pi i \sum \{ \operatorname{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, \rho_\kappa) : \operatorname{Im} \rho_\kappa > 0 \}.$$

Από το λήμμα,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \sum \{ \text{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, \varrho_\kappa) : \text{Im} \varrho_\kappa > 0 \}.$$

■

6.1.1 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 6.1.14. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Η συνάρτηση $\frac{\cos x}{1+x^2}$ είναι άρτια. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ η οποία έχει πόλους τα σημεία i και $-i$ τάξης 1. Επίσης,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = 2\pi i \text{Res}(f(z) e^{iz}, i).$$

Έχουμε

$$\text{Res}(f(z) e^{iz}, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie}.$$

Άρα από τη σχέση 6.1.14 έπεται ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \frac{2\pi i}{2ie} = \frac{\pi}{e}$. Επομένως $\frac{\pi}{e} =$

$$\text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \frac{(\cos x + i \sin x)}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Έπεται ότι } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Παράδειγμα 6.1.15. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Απόδειξη :

Η μέθοδος αντιμετώπισης αυτού του παραδείγματος είναι η μέθοδος που αντιμετωπίζουμε γενικά ανάλογα υπολογιστικά προβλήματα που εμφανίζονται πόλοι στον πραγματικό άξονα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Για κάθε $0 < r < R$ έστω η καμπύλη $c_{R,r} = [-R, -r] + (-\gamma_r) + [r, R] + \gamma_r$ όπου $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $\gamma_R(t) = R e^{it}$ με $0 \leq t \leq \pi$. Από το

σφαιρικό θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\int_{C_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$. Άρα $\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz +$

$$\int_r^R \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0, (1). \text{ Η } f \text{ έχει το μηδέν πόλο τάξης ένα και το ολοκληρωτικό}$$

υπόλοιπο της f στο μηδέν είναι $\text{Res}(f, 0) = 1$. Επομένως, το κύριο μέρος της f στο μηδέν είναι $\frac{1}{z}$. Άρα υπάρχει μια συνάρτηση $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $f(z) = \frac{1}{z} + h(z)$. Έστω r_0 σταθερό. Η h είναι φραγμένη στο δίσκο $\overline{S(0, r_0)}$. Έστω $M > 0$ ώστε $|h(z)| \leq M$ για κάθε $z \in S(0, r_0)$. Τότε, για κάθε $0 < r < r_0$ έχουμε $\left| \int_{\gamma_r} h(z) dz \right| \leq M\pi r \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow 0$ άρα και

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} h(z) dz = 0.$$

Επίσης $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = \pi i$. Επομένως

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = \pi i.$$

Λαμβάνοντας στην (1) διαδοχικά τα όρια καθώς $r \rightarrow 0$ και $R \rightarrow +\infty$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{iz}}{z} dz + (-\pi i) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

και άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i$. Επομένως $\pi = \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Έπεται ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, εφόσον η συνάρτηση $\frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια.

■

Πρόταση 6.1.16. Έστω μια συνάρτηση $R(\sin \theta, \cos \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ όπου R ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Θέτουμε $f(z) = R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{1}{iz}$. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει πόλους στην περιφέρεια $C(0, 1)$. Έστω $z_1, \dots, z_n$ οι πόλοι της f στο δίσκο $S(0, 1)$. Τότε

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res}(f, z_\kappa).$$

Απόδειξη :

Από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε ότι $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res}(f, z_\kappa)$

όπου $\gamma = C(0, 1)$ δηλαδή $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Εξ' ορισμού έχουμε ότι $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(\theta)) \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$. Επίσης, $f(e^{i\theta}) = R\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \frac{1}{ie^{i\theta}}$.

Άρα $2\pi i \sum_{\kappa=1}^n \text{Res}(f, z_\kappa) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{R\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) i e^{i\theta}}{ie^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$.

