

Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs

Keith Ball¹, Tanguy Rivoal²

¹ Department of Mathematics, UCL, Gower Street, London WC1E 6BT, UK
 (e-mail: kmb@math.ucl.ac.uk)

² Laboratoire SDAD, CNRS FRE 2271, Département de Mathématiques, Université de Caen, Campus II, BP 186, 14032 Caen cédex, France
 (e-mail: rivoal@math.unicaen.fr)

Oblatum 5-VI-2000 & 25-V-2001

Published online: 13 August 2001 – © Springer-Verlag 2001

1. Introduction

Au contraire des nombres $\zeta(2n) = \sum_{k \geq 1} 1/k^{2n} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n} \pi^{2n} / (2n)!$ ($n \geq 1$), dont la transcendance est une conséquence de celle de π , peu de résultats sont actuellement connus sur la nature arithmétique des nombres $\zeta(2n+1) = \sum_{k \geq 1} 1/k^{2n+1}$. On peut citer en particulier les résultats suivants.

- En 1978, Apéry [1] est parvenu à montrer l’irrationalité de $\zeta(3)$, mais sa démonstration n’a pas pu être généralisée aux nombres $\zeta(2n+1)$ avec $n \geq 2$: voir Van der Poorten [20], Cohen [6] et Reyssat [14] pour des exposés de la méthode d’Apéry. D’autres démonstrations ont été données depuis par Beukers [2,4,5], Nesterenko [11], Sorokin [19] et Prévost [13].
- Des mesures d’irrationalité de $\zeta(3)$ ont aussi été établies par Apéry [1], Dvornicich-Viola [7], Hata [9] et Rhin-Viola [16].
- En 1979, Gutnik [8] a démontré que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, au moins un des deux nombres suivants est irrationnel

$$3\zeta(3) + q\zeta(2), \quad \zeta(2) + 2q \log(2).$$

- En 1981, Beukers [3] a indiqué des résultats similaires à ceux de Gutnik : les deux ensembles qui suivent contiennent au moins un nombre irrationnel

$$\left\{ \frac{\pi^4}{\zeta(3)}, \quad \frac{7\pi^4 \log(2)}{\zeta(3)} - 15\pi^2, \quad \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)} - \zeta(3) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\zeta(3)}{\pi^2}, \quad \frac{\zeta(3)^2}{\pi^2} - \frac{\pi^4}{360}, \quad \zeta(3)\pi^2 - 30\zeta(5), \quad \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2} - \frac{\pi^6}{2268} \right\}.$$

Dans cet article, nous démontrons qu'une infinité de valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. De façon plus précise, nous prouvons le

Théorème 1 *Soit a un entier impair ≥ 3 et notons $\delta(a)$ la dimension du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)$. On a alors*

$$\delta(a) \geq \frac{1}{3} \log(a).$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon)$ tel que si $a > A(\varepsilon)$,

$$\delta(a) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \log(2)} \log(a).$$

Nous montrons également le

Théorème 2 *Il existe un entier impair $j \leq 169$ tel que $1, \zeta(3)$ et $\zeta(j)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Les démonstrations de ces théorèmes sont données au paragraphe 3, après celles des résultats auxiliaires, énoncés au paragraphe 2.

Les méthodes de cet article s'inspirent du travail de Nikishin [12] sur l'approximation simultanée des polylogarithmes $\text{Li}_n(z)$ en des valeurs rationnelles. Ces fonctions sont définies par le développement en série entière, pour $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$,

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^n}.$$

En particulier, $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)/z$ diverge au voisinage de 1, alors que si $n \geq 2$, $\text{Li}_n(1) = \zeta(n)$. La démarche de Nikishin le conduit à introduire des séries de la forme

$$N_{n,a,b}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1) \cdots (k-an-b+2)}{(k+1)^a(k+2)^a \cdots (k+n)^a(k+n+1)^b} z^{-k}$$

avec a, b, n entiers ≥ 1 , $1 \leq b \leq a$ et z un nombre complexe de module ≥ 1 , $z \neq 1$. Ces séries fournissent des approximants de Padé de type I des polylogarithmes : spécialisées en $z = -1$, elles donnent donc des combinaisons linéaires à coefficients rationnels en les ζ impairs, les ζ pairs et $\log(2)$. La croissance en a des coefficients est néanmoins trop rapide pour obtenir un résultat arithmétique non trivial dans ce cas.

Plus récemment, Sorokin [18] a proposé une méthode pour éliminer (en particulier) les ζ impairs : pour cela, il résout explicitement un problème d'approximation simultanée de certaines fonctions multizêtas, parvenant ainsi à donner une nouvelle mesure de transcendance de π . Dans la direction opposée, en généralisant les intégrales de Beukers [2], Vasilyev [21] a construit une combinaison linéaire (à coefficients a_n, b_n et c_n entiers)

$J_n(5) = a_n\zeta(5) + b_n\zeta(3) + c_n$ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$: la présence de $\zeta(3)$ ne permet malheureusement pas la démonstration directe de l'irrationalité de $\zeta(5)$.

Reyssat [15] a utilisé les approximants de Padé simultanés des puissances de $\log(1-x)$ pour montrer, avec $a/b > 1$ rationnel fixé, l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ d'une infinité des nombres $\log^k(a/b)$ (où $k \in \mathbb{N}$), ce qui suffit pour prouver la transcendance de $\log(a/b)$.

Ce dernier résultat suggère que, plutôt que la recherche, à la manière d'Apéry, de l'irrationalité de chacune des valeurs de la fonction ζ aux entiers impairs, il peut être fructueux de les considérer tous ensemble, afin de prouver leur indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$, ou un résultat dans cette direction. Pour parvenir à cela, deux autres idées sont nécessaires. La première consiste à modifier la série de Nikishin de la façon suivante :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q_n(k)}{(k+1)^a \cdots (k+n+1)^a} z^{-k}$$

où $q_n(k)$ est un polynôme qui est une fonction paire de $k+n/2+1$. La parité de q_n assure en effet qu'une fois la fraction rationnelle décomposée en fractions partielles, les polynômes correspondant aux dénominateurs avec une puissance paire s'annulent pour $z=1$: on obtient ainsi des combinaisons linéaires à coefficients rationnels uniquement en les ζ impairs. La deuxième idée est de paramétrer le nombre de zéros entiers de q_n par un entier r et d'ajuster celui-ci de sorte que les coefficients des combinaisons linéaires aient une croissance moins importante que pour la série de Nikishin, tout en gardant une décroissance rapide de la combinaison elle-même.

Pour cela, nous introduisons la série

$$S_{n,a,r}(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdots (k-rn+1)(k+n+2) \cdots (k+(r+1)n+1)}{(k+1)^a (k+2)^a \cdots (k+n+1)^a} z^{-k}$$

où n, r et a sont des entiers vérifiant $1 \leq r < a/2$, $n \in \mathbb{N}$. Les conditions sur a et r assurent que $S_{n,a,r}(z)$ converge pour tout complexe z de module ≥ 1 . Pour simplifier l'exposé des résultats, nous écrirons cette série sous la forme

$$S_n(z) = n!^{a-2r} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-rn+1)_m (k+n+2)_m}{(k+1)_{n+1}^a} z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochhammer :

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \dots$$

Comme nous l'a suggéré le referee, il est aussi utile de remarquer que $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$S_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-2r} \frac{\Gamma(rn+1)^{a+1} \Gamma((2r+1)n+2)}{\Gamma((r+1)n+2)^{a+1}} \\ \times {}_{a+2}F_{a+1} \left(\begin{matrix} rn+1, \dots, rn+1, (2r+1)n+2 \\ (r+1)n+2, \dots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right).$$

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude précise de cette série : le Lemme 1 montre que la série $S_n(1)$ fournit bien des combinaisons linéaires à coefficients rationnelles en les ζ impairs lorsque n est pair. Le Lemme 2 donne une expression intégrale similaire à celles de Beukers [2] et de Dvornicich-Viola [7], §1.3, ce qui permet d'estimer facilement $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ (Lemme 3). Nous suivons ensuite Nikishin pour la démonstration des Lemmes 4 et 5, qui concernent les propriétés asymptotiques et arithmétiques des coefficients des combinaisons linéaires. Enfin, pour montrer que les séries $N_{n,a,b}(z)$ fournissent des approximations des polylogarithmes linéairement indépendantes, Nikishin évalue un déterminant : nous évitons cette complication en appliquant un critère d'indépendance linéaire, dû à Nesterenko [12].

Remerciements. Nous remercions le referee, dont les remarques ont permis de simplifier les démonstrations des Lemmes 2 et 4. Le second auteur tient par ailleurs à exprimer toute sa gratitude à F. Amoroso pour ses précieux conseils qui ont permis de grandement améliorer une précédente version, ainsi qu'à M. Waldschmidt pour sa patiente relecture et son soutien constant.

2. Résultats auxiliaires

Dans toute la suite, on pose $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ et

$$R_n(t) = n!^{a-2r} \frac{(t-rn+1)_m (t+n+2)_m}{(t+1)_{n+1}^a}$$

de sorte que

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_n(k) z^{-k}.$$

Pour $l \in \{1, \dots, a\}$ et $j \in \{0, \dots, n\}$, on note aussi

$$c_{l,j,n} = D_{a-l} \left(R_n(t) (t+j+1)^a \right)_{|t=-j-1} \in \mathbb{Q}, \quad (1)$$

$$P_{0,n}(z) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k} \text{ et } P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j. \quad (2)$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

Lemme 1 *On a :*

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=2}^a P_{l,n}(1)\zeta(l). \quad (3)$$

De plus,

$$\text{si } (n+1)a + l \text{ est impair, alors } P_{l,n}(1) = 0. \quad (4)$$

En particulier, si n est pair et a impair ≥ 3 , $P_{l,n}(1) = 0$ pour tout $l \in \{2, \dots, a\}$ pair et $S_n(1)$ est alors une combinaison linéaire uniquement en les ζ impairs :

$$S_n(1) = P_{0,n}(1) + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} P_{2l+1,n}(1)\zeta(2l+1). \quad (5)$$

Démonstration

En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n \frac{c_{l,j,n}}{(t+j+1)^l}.$$

D'où si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{(k+j+1)^l} \\ &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{(k+1)^l} - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{z^k} \frac{1}{(k+1)^l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^a \text{Li}_l(1/z) \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} z^{j-k}. \end{aligned}$$

On a donc

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^a P_{l,n}(z) \text{Li}_l(1/z) + P_{0,n}(z). \quad (6)$$

Comme $2r < a$, le degré total de la fraction rationnelle $R_n(t)$ est ≤ -2 , donc $P_{1,n}(1) = \sum_{j=0}^n \text{Res}_{t=-j}(R_n(t)) = 0$ et

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| > 1}} (P_{1,n}(z) \text{Li}_1(1/z)) = 0,$$

ce qui montre (3).

Montrons maintenant (4) et pour cela reformulons (1) sous la forme

$$c_{l,j,n} = (-1)^{a-l} D_{a-l}(\Phi_{n,j}(x))|_{x=j}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{n,j}(x) &= R_n(-x-1)(j-x)^a \\ &= n!^{a-2r} \frac{(-x-rn)_m(-x+n+1)_m}{(-x)_{n+1}^a} (j-x)^a. \end{aligned}$$

On a

$$\Phi_{n,n-j}(n-x) = n!^{a-2r} \frac{(x-(r+1)n)_m(x+1)_m}{(x-n)_{n+1}^a} (x-j)^a. \quad (7)$$

En appliquant l'identité $(\alpha)_l = (-1)^l(-\alpha-l+1)_l$ aux trois symboles de Pochhammer de (7), on obtient

$$\begin{aligned} &\Phi_{n,n-j}(n-x) \\ &= n!^{a-2r} \frac{(-1)^m(-x+n+1)_m(-1)^m(-x-rn)_m}{(-1)^{(n+1)a}(-x)_{n+1}^a} (-1)^a(j-x)^a \\ &= (-1)^{na} \Phi_{n,j}(x). \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \geq 0$,

$$\Phi_{n,n-j}^{(k)}(n-x) = (-1)^k(-1)^{na} \Phi_{n,j}^{(k)}(x).$$

En particulier avec $k = a-l$ et $x = j$, on a donc

$$c_{l,n-j,n} = (-1)^{a-l}(-1)^{an} c_{l,j,n},$$

ce qui implique la relation

$$P_{l,n}(1) = (-1)^{(n+1)a+l} P_{l,n}(1).$$

Si $(n+1)a+l$ est impair, on en déduit que $P_{l,n}(1) = 0$.

Définissons maintenant l'intégrale

$$I_n(z) = \int_{[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1-x_l)}{(z-x_1x_2 \cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right)^n \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_{a+1}}{(z-x_1x_2 \cdots x_{a+1})^2}$$

qui converge a priori pour tout complexe z tel que $|z| > 1$.

Lemme 2 *La série $S_n(z)$ admet la représentation intégrale, pour $|z| \geq 1$:*

$$S_n(z) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} z^{(r+1)n+2} I_n(z). \quad (8)$$

Démonstration

La série $S_n(z)$ est une fonction hypergéométrique généralisée dont les paramètres sont tels qu'elle peut s'exprimer sous la forme intégrale voulue pour $|z| > 1$ (voir par exemple [17], p. 108). Il s'agit de montrer que cette représentation est encore valide si $|z| = 1$. Pour cela posons $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ et définissons la fonction

$$F(x, z) = \begin{cases} \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1-x_l)}{(z-x_1 \cdots x_{a+1})^{2r+1}} & \text{si } (x, z) \in [0, 1]^{a+1} \times E \text{ et } (x, z) \neq (1, 1, \dots, 1); \\ 0 & \text{si } (x, z) = (1, 1, \dots, 1). \end{cases}$$

La fonction $F(x, z)$ est continue sur $[0, 1]^{a+1} \times E$: en effet, pour $x \in [0, 1]^{a+1}$, il est clair que pour tout $l \in \{1, \dots, a+1\}$, on a $1 - x_1 \cdots x_{a+1} \geq 1 - x_l$, d'où

$$(1 - x_1 \cdots x_{a+1})^{a+1} \geq \prod_{l=1}^{a+1} (1 - x_l).$$

Donc pour tout $(x, z) \in [0, 1]^{a+1} \times E$ tel que $(x, z) \neq (1, 1, \dots, 1)$,

$$|F(x, z)| \leq F(x, 1) \leq \prod_{l=1}^{a+1} \left(x_l^r (1 - x_l)^{\frac{a-2r}{a+1}} \right).$$

Il en résulte que la fonction $F(x, z)$ est continue sur $[0, 1]^{a+1} \times E$, puisque $a > 2r$.

Par ailleurs, la fonction $G(x, z) = (z - x_1 \cdots x_{a+1})^{-2}$ est intégrable sur $[0, 1]^{a+1}$, ce qui résulte de la continuité, pour $|t| \leq 1$, de la fonction

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{du dv dw}{(1 - uvwt)^2} = \text{Li}_2(t).$$

Notons $\tilde{S}_n(z)$ le membre de droite de (8) et $u(x, z) = F(x, z)^n G(x, z)$. Alors

- pour tout $z \in E$, $|u(x, z)| \leq u(x, 1)$ et $u(x, 1)$ est intégrable sur $[0, 1]^{a+1}$
- pour tout $x \in [0, 1]^{a+1}$, $x \neq (1, \dots, 1)$, la fonction $u(x, z)$ est continue sur E .

Donc $\tilde{S}_n(z)$ est continue sur E . Comme $S_n(z)$ est aussi continue sur E et $S_n(z) = \tilde{S}_n(z)$ si $|z| > 1$, cette dernière égalité est encore vraie sur E , ce qui termine la démonstration du Lemme 2.

Considérons le polynôme

$$Q_{r,a}(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r.$$

On remarque que $Q_{r,a}(s) = s^{a+1}(rs - r - 1) + ((r+1)s - r) < 0$ sur $[0, \frac{r}{r+1}]$. De plus

$$Q'_{r,a}(s) = r(a+2)s^{a+1} - (r+1)(a+1)s^a + r+1$$

et

$$Q''_{r,a}(s) = (a+1)s^{a-1}(r(a+2)s - (r+1)a).$$

D'où $Q'_{r,a}(0) = r+1 > 0$, $Q'_{r,a}(1) = 2r-a < 0$ et $Q''_{r,a}(s) < 0$ sur $[0, 1]$.
On en déduit que $Q_{r,a}$ a une seule racine s_0 dans $[0, 1[$ et que $s_0 \in]\frac{r}{r+1}, 1[$.

Lemme 3 *On a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \varphi_{r,a} \quad (9)$$

où

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1 - rs_0)^{r+1} (1 - s_0)^{a-2r}.$$

De plus, on a l'encadrement

$$0 < \varphi_{r,a} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}}.$$

Nous allons donner une première démonstration en utilisant le Lemme 2, puis une seconde démonstration en utilisant directement la série.

Première démonstration

En vertu de la formule de Stirling,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \right)^{1/n} = (2r+1)^{2r+1}.$$

L'expression intégrale (8) et le Lemme 2 impliquent que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(1)|^{1/n}$ existe et vaut

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{(x_1, \dots, x_{a+1}) \in [0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1-x_l)}{(1-x_1 x_2 \cdots x_{a+1})^{2r+1}} \right) > 0.$$

Posons

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_{a+1}) = \frac{\prod_{l=1}^{a+1} x_l^r (1-x_l)}{(1-x_1 x_2 \cdots x_{a+1})^{2r+1}}$$

et $f(x) = \log(F(x))$: les extrema de F doivent vérifier pour tout $l \in \{1, \dots, a+1\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{x_l} \left(r - \frac{x_l}{1-x_l} + (2r+1) \frac{x_1 x_2 \cdots x_{a+1}}{1-x_1 x_2 \cdots x_{a+1}} \right) = 0.$$

Le maximum de F est donc atteint sur la diagonale $x_1 = x_2 = \cdots = x_{a+1}$ et on a

$$\varphi_{r,a} = (2r+1)^{2r+1} \max_{s \in [0,1]} \left(\frac{s^{r(a+1)} (1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}} \right).$$

On vérifie que ce maximum est atteint pour $s = s_0$, racine dans $]0, 1[$ du polynôme $Q_{r,a}$. De la relation $rs_0^{a+2} - (r+1)s_0^{a+1} + (r+1)s_0 - r = 0$, on déduit que

$$s_0^{a+1} = \frac{(r+1)s_0 - r}{r+1 - rs_0}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_{r,a} &= (2r+1)^{2r+1} \frac{s_0^{r(a+1)}(1-s_0)^{a+1}}{(1-s_0^{a+1})^{2r+1}} \\ &= ((r+1)s_0 - r)^r (r+1 - rs_0)^{r+1} (1-s_0)^{a-2r} \\ &\leq \frac{(2r+1)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \leq \frac{(2r+2)^{r+1}}{(r+1)^{a-r+1}} \leq \frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} \end{aligned}$$

en utilisant l'encadrement $\frac{r}{r+1} < s_0 < 1$.

Seconde démonstration

Ecrivons $R_n(k) = (k+1)^{-a} \tilde{R}_n(k)$ où

$$\tilde{R}_n(k) = n!^{a-2r} \frac{(k-rn+1)_m (k+n+2)_m}{(k+2)_n^a}.$$

Puisque $\tilde{R}_n(k) = 0$ pour $0 \leq k \leq rn-1$ et que $r < a/2$, on voit facilement qu'il existe $c = c(a, r) > 0$ tel que

$$\max_{k \geq 0} \tilde{R}_n(k) = \max_{rn \leq k \leq cn} \tilde{R}_n(k).$$

Notons M_n ce maximum : comme $\sum_{k \geq rn} (k+1)^{-a} < 1$ et $\tilde{R}_n(k) \geq 0$, on a

$$\frac{1}{(cn)^a} M_n \leq S_n(1) \leq M_n.$$

Il suffit donc de montrer que $M_n^{1/n}$ converge vers $\varphi_{r,a}$. La formule de Stirling montre que pour $rn \leq k \leq cn$

$$\tilde{R}_n(k) = \rho_n(k) \frac{k^{k(a+1)} (k+(r+1)n)^{k+(r+1)n} n^{n(a-2r)}}{(k+n)^{(k+n)(a+1)} (k-rn)^{k-rn}}$$

où $\rho_n(k)^{1/n}$ tend vers 1. Posons

$$\tilde{F}(x) = \frac{x^{x(a+1)} (x+r+1)^{x+r+1}}{(x+1)^{(x+1)(a+1)} (x-r)^{x-r}}.$$

Alors

$$\max_{x \in [r, c]} \tilde{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{rn \leq k \leq cn} \tilde{F}\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n^{1/n}.$$

De plus, on peut choisir c de telle sorte que $\max_{x \in [r, c]} \tilde{F}(x) = \max_{x \in [r, +\infty[} \tilde{F}(x)$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(1)|^{1/n} = \max_{x \in [r, +\infty[} \tilde{F}(x).$$

Un calcul montre que $\max_{x \in [r, +\infty[} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$ où $x_0 = s_0/(1 - s_0)$, et que $\tilde{F}(x_0) = \varphi_{r,a}$.

Notons enfin que la majoration $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$ découle immédiatement de l'inégalité $k + (r + 1)n < 2^{1+1/r}k$ pour $k > rn$. En effet, pour $k > rn$ on a

$$\tilde{R}_n(k) < n^{(a-2r)n} \frac{k^{rn} (2^{1+1/r}k)^{rn}}{k^{an}} = \left(2^{r+1} \left(\frac{n}{k} \right)^{a-2r} \right)^n < \left(\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}} \right)^n.$$

Lemme 4 Pour tout $l \in \{0, \dots, a\}$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r + 1)^{2r+1}. \quad (10)$$

Démonstration

Si $l \in \{1, \dots, a\}$, il suffit de majorer les coefficients $c_{l,j,n}$ puisque $P_{l,n}(1) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n}$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z+j+1|=1/2} R_n(z)(z+j+1)^{l-1} dz$$

où $|z + j + 1| = 1/2$ désigne le cercle de centre $-j - 1$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z - rn + 1)_m| \leq (j + 2)_{rn},$$

$$|(z + n + 2)_m| \leq (n - j + 2)_{rn},$$

$$\text{et } |(z + 1)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j - 1)!(n - j - 1)!.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |c_{l,j,n}| &\leq \frac{(rn + j + 1)!}{(j + 1)!(j!(n - j)!)^r} \cdot \frac{((r + 1)n - j + 1)!}{(n - j + 1)!(j!(n - j)!)^r} \\ &\quad \cdot \left(\frac{n!}{j!(n - j)!} \right)^{a-2r} \cdot (j(n - j))^a 8^a, \\ &\leq (2r + 1)^{(2r+1)n+2} 2^{(a-2r)n} (2n^2)^a \end{aligned}$$

en remarquant que les coefficients multinômiaux

$$\frac{(rn + j + 1)!}{(j + 1)!(j!(n - j)!)^r} \quad \text{et} \quad \frac{((r + 1)n - j + 1)!}{(n - j + 1)!(j!(n - j)!)^r}$$

sont majorés respectivement par $(2r+1)^{m+j+1}$ et $(2r+1)^{(r+1)n-j+1}$. On a donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |P_{l,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}.$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(1)$, dont on a déterminé l'expression (2)

$$P_{0,n}(1) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l}.$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{(k+1)^l} \leq \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq j \leq n$$

on a bien là aussi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |P_{0,n}(1)|^{1/n} \leq 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}.$$

Lemme 5 On pose $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$. Alors pour $l \in \{0, \dots, a\}$

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]. \quad (11)$$

Démonstration

L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur une réécriture de $R_n(t)$. Fixons les entiers n et j . On décompose alors le numérateur de $R_n(t)$ en $2r$ produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j+1)^a = \left(\prod_{l=1}^r F_l(t) \right) \times \left(\prod_{l=1}^r G_l(t) \right) \times H(t)^{a-2r}$$

où pour $l \in \{1, \dots, r\}$,

$$F_l(t) = \frac{(t-nl+1)_n}{(t+1)_{n+1}} (t+j+1), \quad G_l(t) = \frac{(t+nl+2)_n}{(t+1)_{n+1}} (t+j+1),$$

$$H(t) = \frac{n!}{(t+1)_{n+1}} (t+j+1).$$

Décomposons $F_l(t)$, $G_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p+1}, \quad G_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{(j-p)g_{p,l}}{t+p+1},$$

$$H(t) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{(j-p)h_p}{t+p+1}$$

où

$$\begin{aligned} f_{p,l} &= \frac{(-p - nl)_n}{\prod_{\substack{h=0 \\ p \neq h}}^n (-p + h)} \\ &= \frac{(-1)^n ((l-1)n + p + 1)_n}{(-1)^p p! (n-p)!} = (-1)^{n-p} \binom{nl+p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{p,l} &= \frac{(-p + nl + 1)_n}{\prod_{\substack{h=0 \\ p \neq h}}^n (-p + h)} \\ &= \frac{(-1)^p ((l+1)n - p)!}{(nl-p)! p! (n-p)!} = (-1)^p \binom{n(l+1)-p}{n} \binom{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod_{\substack{h=0 \\ p \neq h}}^n (-p + h)} = \frac{(-1)^p n!}{p! (n-p)!} = (-1)^p \binom{n}{p} \in \mathbb{Z}.$$

On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F_l(t))|_{t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$(D_\lambda G_l(t))|_{t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{(j-p)g_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$(D_\lambda H(t))|_{t=-j-1} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que

$$d_n^\lambda (D_\lambda F_l)|_{t=-j-1}, \quad d_n^\lambda (D_\lambda G_l)|_{t=-j-1} \quad \text{et} \quad d_n^\lambda (D_\lambda H)|_{t=-j-1}$$

sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} D_{a-l}(R(t)(t+j+1)^a) &= \\ \sum_{\mu} (D_{\mu_1} F_1) \cdots (D_{\mu_r} F_r) (D_{\mu_{r+1}} G_1) \cdots (D_{\mu_{2r}} G_r) (D_{\mu_{2r+1}} H) \cdots (D_{\mu_a} H) \end{aligned}$$

(où la somme est sur tous les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a-l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

3. Irrationalité d'une infinité de ζ impairs

Nous appliquons le critère suivant pour démontrer la Proposition 1 ci-dessous. Les Théorèmes 1 et 2 sont des conséquences de cette Proposition.

Critère d'indépendance linéaire de Nesterenko

Considérons N réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ ($N \geq 2$) et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n \geq 0}$ tels que :

- (i) $\forall l \in \{1, \dots, N\}, p_{l,n} \in \mathbb{Z}$;
- (ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq \left| \sum_{l=1}^N p_{l,n} \theta_l \right| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ avec $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$;
- (iii) $\forall l \in \{1, \dots, N\}, |p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ avec $\beta > 1$.

Dans ces conditions,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \theta_1 + \mathbb{Q} \theta_2 + \dots + \mathbb{Q} \theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)}.$$

Proposition 1 Soit a un entier impair ≥ 3 . Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a/2$, on a la minoration

$$\delta(a) \geq \frac{(a-2r) \log(2) + (2r+1) \log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r) \log(2) + (2r+1) \log(2r+1)} \quad (12)$$

où

$$\varphi_{r,a} = ((r+1)s_0 - r)^r (r+1 - rs_0)^{r+1} (1 - s_0)^{a-2r}$$

et s_0 est l'unique racine dans $]0, 1[$ du polynôme $Q(s) = rs^{a+2} - (r+1)s^{a+1} + (r+1)s - r$. En particulier

$$\delta(a) \geq \frac{\log(r) + \frac{a-r}{a+1} \log(2)}{1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1} \log(r+1)}. \quad (13)$$

Démonstration

Notons tout d'abord que d'après le Théorème des nombres premiers,

$$d_n = e^{n+o(n)}. \quad (14)$$

Définissons pour tout entier $n \geq 0$, $\ell_n = d_{2n}^a S_{2n}(1)$,

$p_{0,n} = d_{2n}^a P_{0,2n}(1)$ et $p_{l,n} = d_{2n}^a P_{2l+1,2n}(1)$ pour $l \in \{1, \dots, (a-1)/2\}$.

(5) montre que ℓ_n est une combinaison linéaire en les ζ impairs :

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{(a-1)/2} p_{l,n} \zeta(2l+1). \quad (15)$$

(11) montre que pour tout $l \in \{0, \dots, (a-1)/2\}$ et pour tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$. (9) et (14) montrent que

$$\log |\ell_n| = 2n \log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a \varphi_{r,a}.$$

Enfin, (10) et (14) impliquent que pour tout $l \in \{0, \dots, (a-1)/2\}$:

$$\log |p_{l,n}| \leq 2n \log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a 2^{a-2r} (2r+1)^{2r+1}.$$

On peut donc appliquer le critère de Nesterenko avec $N = (a+1)/2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \kappa^2$ et $\beta = \tau^2$:

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{\log(\tau) - \log(\kappa)}{\log(\tau)} \\ &= \frac{(a-2r) \log(2) + (2r+1) \log(2r+1) - \log(\varphi_{r,a})}{a + (a-2r) \log(2) + (2r+1) \log(2r+1)}. \end{aligned}$$

En utilisant la majoration $\varphi_{r,a} \leq 2^{r+1}/r^{a-2r}$ donnée au Lemme 3 et l'encadrement $2r \leq 2r+1 \leq 2(r+1)$, on obtient l'inégalité (13).

Démonstration du Théorème 2

On choisit $a = 169$ et $r = 10$ dans la Proposition 1 : un calcul par ordinateur montre que

$$s_0 \approx 0,90909093 \quad \text{et} \quad \log(\varphi_{10,169}) \approx -505,73453$$

d'où $\delta(169) > 2,001$. Il existe donc deux entiers impairs j et k tels que $3 \leq j, k \leq 169$ et $1, \zeta(j)$ et $\zeta(k)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. L'irrationalité de $\zeta(3)$ nous permet de supposer $k = 3$, ce qui prouve le Théorème 2.

Démonstration du Théorème 1

Supposons a impair. Nous allons distinguer plusieurs cas :

- $3 \leq a \leq 167 < e^6$: le Théorème d'Apéry donne $\delta(3) \geq 2$, d'où $\delta(a) \geq 2 \geq \frac{1}{3} \log(a)$.
- $169 \leq a \leq 8 \cdot 10^3 - 1 < e^9$: le Théorème 2 donne $\delta(169) \geq 3$ d'où $\delta(a) \geq 3 \geq \frac{1}{3} \log(a)$.
- $8 \cdot 10^3 + 1 \leq a \leq 10^5 - 1 < e^{12}$: la Proposition 1 (avec $r = 200$) donne $\delta(8 \cdot 10^3 + 1) > 3$ d'où $\delta(a) \geq 4 \geq \frac{1}{3} \log(a)$.
- $10^5 + 1 \leq a \leq 10^6 - 1 < e^{15}$: la Proposition 1 (avec $r = 600$) donne $\delta(10^5 + 1) > 4$ d'où $\delta(a) \geq 5 \geq \frac{1}{3} \log(a)$.
- $a \geq 10^6 + 1$: on choisit $r = [a^{3/5} + 1] < a/2$ dans la proposition 1. On obtient

$$\delta(a) \geq \frac{3}{5c(a)} \log(a)$$

où $c(a) = 1 + \log(2) + \frac{2a^{3/5}+3}{a+1} \log(a^{3/5}+1)$ est décroissante et $c(10^6+1) < 9/5$. Donc là aussi $\delta(a) \geq \frac{1}{3} \log(a)$.

Montrons maintenant la deuxième partie : on choisit pour cela $r = r(a)$ comme l'entier $< a/2$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$\log(r) + \frac{a-r}{a+1} \log(2) = (1 + o(1)) \log(a)$$

et

$$1 + \log(2) + \frac{2r+1}{a+1} \log(r+1) = 1 + \log(2) + o(1).$$

D'où

$$\delta(a) \geq \frac{(1 + o(1)) \log(a)}{1 + \log(2) + o(1)},$$

ce qui prouve le Théorème 1.

Références

1. R. Apéry, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, *Astérisque* **61**, 11–13 (1979)
2. F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, *Bull. London. Math. Soc.* **11**, no. 33, 268–272 (1978)
3. F. Beukers, The values of Polylogarithms, “Topics in classical number theory”, 219–228, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Budapest (1981)
4. F. Beukers, Padé approximations in Number Theory dans “Padé approximation and its applications”, Amsterdam 1980, LNM 888, 90–99, Springer (1981)
5. F. Beukers, Irrationality proofs using modular forms, *Journées arithmétiques de Besançon* (Besançon, 1985). *Astérisque* No. 147–148 (1987)
6. H. Cohen, Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après Apéry), *Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble*, VI.1–VI.9 (1978)
7. R. Dvornicich, C. Viola, Some remarks on Beukers' integrals, dans *Number Theory*, Vol. II, 637–657, Budapest (1987). *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 51, Budapest
8. L.A. Gutnik, The irrationality of certain quantities involving $\zeta(3)$, *Russ. Math. Surv.* **34**, no. 3, 200 (1979). En russe dans *Acta Arith.* **42**, no. 3, 255–264 (1983)
9. M. Hata, A new irrationality measure for $\zeta(3)$, *Acta. Arith.* **92**, no. 1, 47–57
10. Y.V. Nesterenko, On the linear independence of numbers, *Mosc. Univ. Math. Bull.* **40**, no. 1, 69–74 (1985) traduction de *Vest. Mosk. Univ.*, Ser. I, no. 1, 46–54 (1985)
11. Y.V. Nesterenko, A few remarks on $\zeta(3)$, *Math. Notes* **59**, no. 6, 625–636 (1996)
12. E.M. Nikishin, On the irrationality of the values of the functions $F(x, s)$, *Mat. Sbornik* **37**, no. 3, 381–388 (1979)
13. M. Prévost, A new proof of the irrationality of $\zeta(3)$ using Padé approximants, *J. Comput. Appl. Math.* **67**, 219–235 (1996)
14. E. Reyssat, Irrationalité de $\zeta(3)$, selon Apéry, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 20ème année (1978–1979), exposé no. 6, 6pp
15. E. Reyssat, Mesures de transcendance pour les logarithmes de nombres rationnels, “Approximations diophantiennes et nombres transcendants”, Luminy 1982, 235–245, *Progress in Mathematics*, Birkhäuser (1983)
16. G. Rhin, C. Viola, The group structure for $\zeta(3)$, *Acta Arith.* **97**, 269–293 (2001)
17. L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge University Press (1966)
18. V.N. Sorokin, A transcendence measure for π^2 , *Mat. Sbornik* **187**, no. 12, 1819–1852 (1996)
19. V.N. Sorokin, Apéry's Theorem, *Mosc. Univ. Math. Bull.* **53**, no. 3, 48–52 (1998)
20. A. Van der Poorten, A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, *Math. Intellig.* **1**, 195–203 (1979)
21. D.V. Vasilyev, On small linear forms for the values of the Riemann zeta function at odd integers, soumis à *Dokl. Nat. Acad. Sci. of Belarus*