HISTORIA MATHEMATICA 20 (1993), 45–53

Bernard Bolzano—Not as Unknown to His Contemporaries as Is Commonly Believed?

GERT SCHUBRING

Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld, Postfach 100131, D-4800 Bielefeld 1, Federal Republic of Germany

An unknown review of Bolzano's three important papers from the years 1816 to 1817 written in 1821 by J. J. I. Hoffmann, a mathematician from Southern Germany, is edited and commented. © 1993 Academic Press, Inc.

Un compte-rendu des trois études importantes de Bolzano datant des années 1816–1817, composé en 1821 par J. J. I. Hoffmann, un mathématicien de l'Allemagne du sud, est édité et commenté. © 1993 Academic Press, Inc.

Der Artikel dokumentiert und kommentiert eine bislang unbekannte Rezension der drei wichtigen Arbeiten Bolzanos von 1816/17 durch den süddeutschen Mathematiker J. J. I. Hoffmann aus dem Jahre 1821. © 1993 Academic Press, Inc.

AMS 1991 subject classifications: 01A55, 26-03
KEY WORDS: B. Bolzano, J. J. I. Hoffmann, real analysis

According to common historiography, Bolzano's pioneer publications, in particular his contributions to a new rigor in analysis in 1816 to 1817, remained almost unknown to the mathematical community. Only one piece of evidence contradicting the general impression that nobody read Bolzano in his own day is frequently quoted: N. H. Abel's remark in one of his Paris notebooks. Having read some of Bolzano's publications during the time he spent in Berlin 1825/1826, he noted enthusiastically "Bolzano is a clever man" [1]. Abel's appreciation is taken, however, as an isolated instance, and Hermann Hankel is credited with having been the first to bring Bolzano to the general attention of the mathematical community in 1871 (see [Grattan—Guinness 1970, 51–52]).

No detailed study of the reception of Bolzano's publications by his contemporaries has been undertaken as yet [2]. An essential part of such a study would consist in searching for reviews of his books, in identifying their authors (most reviews were published anonymously at the time), and in evaluating how far these reviews were disseminated. The impressive series of his collected works—the *Bernard—Bolzano—Gesamtausgabe,* in publication since 1969—does not contain this dimension of his work's reception, although the biographical volume E.2.1 indicates reviews Bolzano wrote of other authors' publications [Bolzano 1972, 97].

With regard to this desideratum concerning the history of reception of Bolzano's work in his own time, an essay review of Bolzano's three key papers of 1816/1817 in one of the leading German review journals, the *Jenaische Allgemeine Literatur—Zeitung* (*JALZ*), is a most welcome find. I came across it when analyz-

0315-0860/93 $5.00

ing the *JALZ* for its numerous mathematical reviews. As a first contribution to the study of Bolzano's contemporary reception, the essay review is examined in order to explore the reviewer's reading and understanding of Bolzano's work. Moreover, the mathematical education and practice of the reviewer is analyzed, and the role of the transmitting journal is briefly discussed. The essay review itself is also presented, or more precisely, those parts of it that are in the reviewer's own words.

Review journals like the *JALZ* were typical for the classical German culture of the 18th and the early 19th century—other major journals published in the same period were the *Göttinger gelehrte Anzeigen,* the *Leipziger Literatur Zeitung,* the *Allgemeine* (the so-called *Haller*) *Literaturzeitung,* etc. These informed their readers about books concerning all branches of knowledge—mathematics and the sciences being included as essential parts of human knowledge. These review journals thus were living encyclopedias—and these were only superseded in the middle of the 19th century by more specialized reviewing journals.

In the 16th issue of the *Ergänzungsblätter zur Jenaischen Allgemeinen Literatur—Zeitung,* 1823, columns 121 to 127, three of Bolzano's publications are reviewed: "The Binomial Theorem . . ." (1816), "The three problems of rectification, . . ." (1817), and "Purely analytical proof of the theorem . . ." (1817). The treatments of the three publications differ in style. Whereas the essence of the papers on the binomial theorem and on the intermediate value theorem is briefly stated, followed by some indication as to the conceptual innovation, Bolzano's approach in his paper on integration is elucidated by using a particular case to present his method (probably to enable the reader to get acquainted with Bolzano's reasoning). Actually, this text was taken unchanged from Bolzano's introduction, pp. xviii to xxii.

The reviewer signed with a seal (a common practice in this type of journals): with "Δ", an indication that the author was *Johann Josef Ignaz* (*von*) *Hoffmann* (1777–1866), professor of mathematics in Aschaffenburg and quite influential in his own day (though since fallen into oblivion). The evidence is twofold: In his autobiography of 1856, Hoffmann claims to have written "hundreds of reviews" for the *JALZ,* "most of them signed with Δ" (Hoffmann 1856, 9). That there is no confusion with another reviewer's seal is proved by Karl Bulling who identified the names of the authors of all reviews published in the *JALZ* between 1804 and 1833 by analyzing the files of the editorial office of the *JALZ.* He, too, names Hoffmann as the author of the Bolzano review (Bulling 1963, 292). The editors of the *JALZ* noted in their files the dates of receipt for each review; the delivery of Hoffmann's review was noted on 10 June 1821 (*ibid.*), which shows that there was a delay of more than one and a half years until publication.

The text shows that the reviewer did grasp the fundamental importance of Bolzano's work. Hoffmann begins his review with the revealing assertion that he is familiar with earlier publications of Bolzano, naming in particular the latter's first published paper, the 1804 text on some issues of elementary geometry. It may thus be assumed that Hoffmann had stumbled onto it in his analysis of various approaches to proving the fifth Euclidean postulate and the theory of parallels.

Hoffmann does not mention this first paper in his own comprehensive study of seventeen methods of proof (Hoffmann 1807) and I found no review of his, at least not in the *JALZ*. The plural "seine früheren Arbeiten" suggests that Hoffmann also knew Bolzano's other mathematical publication before 1816: the "Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik" (1810). Hoffmann states that he values Bolzano as a searcher for truth and as a rigorous thinker. He judges the three publications of 1816/1817 to be novel, to be based on rigorous concepts, to show consistent thinking, and to be concerned with the most eminent mathematical theories. Hoffmann was aware, however, that Bolzano's publications had not received wide circulation and he tried to draw attention to them. The review's concluding encouragement to Bolzano, urging him to pursue his research on the foundations of mathematics, suggests that he was also aware of Bolzano's difficult personal situation. Indeed, it is entirely possible that someone prompted Hoffmann to write the review in an attempt to improve Bolzano's situation. The intervention of a mediating promotor is all the more probable as reviews of this type were customarily published in the same year as the work under review and not four or five years later.

As an aside, it is entirely improbable, despite the identity of surname with Bolzano's friends and protectors Josef and Anna Hoffmann in Bohemia, that these were his relatives: His own family originated from Mainz and his grandfather originated from the Trier region [Hoffmann 1856, 5].

As the first known reader of almost all of Bolzano's mathematical publications from this early period, Hoffmann himself constitutes a case study in the desired history of Bolzano's reception. In particular, it might be asked if he further disseminated these ideas—having praised Bolzano's innovative achievements—and, if not, why not. In order to undertake such a first case study, one must consider Hoffmann's mathematical training and orientation, and these will, in turn, reveal certain developments in elementary mathematics and peculiar patterns of mathematical culture in Southern Germany.

Hoffmann was a prolific writer of textbooks for all branches of elementary arithmetic, algebra, and (mainly) geometry, but also textbooks on physics and mechanics intended for secondary and higher education. Several of these works were used as official textbooks in Bavarian and in Hessian secondary schools. His main research interest was the fundamental concepts of geometry, in particular Euclid's fifth postulate [3]. The more recent developments in higher analysis: the concepts of function, of continuity, of integration, etc., lay outside his field of research. Only one of Hoffmann's publications was addressed to the field of analysis: an 1817 textbook explicating the elements of algebra, higher geometry, and the infinitesimal calculus. This work was intended for students at the end of their secondary education, and hence he refrained from developing the fundamental concepts or discussing any proofs of basic theorems, and merely provided basic rules to be applied in elementary and integral calculus (Hoffmann 1817). At the time this textbook was completed, in September 1816 (Hoffman 1817, p. xvi), Hoffmann could not have been aware of Bolzano's work. His status and his institutional environment, however, prevented him from entering into the field of analysis even afterward.

Hoffmann's career was quite remarkable. Born in Mainz, in 1777, as son of a leading official at the Court of Mainz (Mainz was at that time the capital of an important German clerical state: the electorate and archbishopric Mainz), he was raised in the atmosphere of the Court and began philosophical studies at Mainz University in 1791 [4]. After this he continued to study law and later practiced this profession. The aftermath of the French Revolution marked a decisive turning point for his career in several respects. The French revolutionary armies "liberated" Mainz, abolished the electorate state on the left bank of the Rhine, and annexed it to France. In 1800, Hoffmann followed the Court of Mainz and the professors of Mainz University to Aschaffenburg, a territory belonging to the electorate. The professors continued their courses there and in 1801 Hoffmann was appointed to give mathematics courses, and also physics in 1802.

Gradually, a new higher educational institution established itself in Aschaffenburg due to a unique political constellation created by Napoleon's policies toward Germany. In 1802, archbishop Karl Theodor von Dalberg (1744–1817) became the last Elector of Mainz, which was now restricted to Aschaffenburg territory. Dalberg had proved before (in Erfurt) that he favored a policy of modernization and promotion of the sciences. With the abolition of all German clerical states in 1806, Dalberg—as sovereign of the principality of Aschaffenburg—simultaneously became the leader of the *Rheinbund* inspired by Napoleon, a federation of the small and medium-sized states in middle and southern Germany. This territory, now called "Grossherzogtum Frankfurt," had been enlarged by territories in Hessia.

In this new state, Dalberg established a new university in December 1808—not a university in the traditional German sense, but one modeled according to the *Université de France* created only months earlier by Napoleon: by combining secondary schools and faculties for professional studies (instead of combining all faculties in one town to form a "university"). Dalberg's *Karls-Universität* seems to have been the only foreign adaptation of the Napoleonic *université* (see [Schubring 1991]). The former propaedeutic studies of philosophy, philology, mathematics, and the sciences were organized as a "Philosophisches Lehrinstitut" in Aschaffenburg, an institute that adhered to the traditional model of providing a general scientific preparation for studies in law, medicine, and theology, as opposed to the subsequent Prussian model of specialized studies and of research obligations for professors (see [Scherg 1939, 455–478]).

Hoffmann was established as professor of mathematics and physics at the *Philosophisches Lehrinstitut*. He was on intimate terms with Dalberg, was charged by him to reform weights and measures, and they communicated regularly about scientific news (Dalberg was a foreign associated member of the Paris *Institut National*: its third class). Dalberg became aware of Hoffmann's organizational skills and appointed him director of the *Philosophisches Lehrinstitut*. Already in 1807 Hoffmann had helped to create a *Forstlehranstalt* and was appointed as director (until its dissolution in 1832). These managerial duties became Hoffmann's main preoccupation after Dalberg's enlighted reign ended in 1814 when major parts of Grossherzogtum Frankfurt were incorporated into Bavaria, where political reactionaries marginalized mathematics and the sciences within the educational system. As director of the Philosophical Institute, Hoffmann had to fight for its survival, and he succeeded in continuing it as a *Lyzeum* in 1818 (see Hoffmann 1856, 6–9). Although the *Lyzeum* functioned according to the same propaedeutic model as the former institute, Hoffmann found himself allied with the anti-Enlightenment forces in Bavaria: the other *Lyzeen* in the traditional territories were originally Jesuit institutions, and even now concentrated on preparing future clerics. They functioned as rivals to the philosophical faculties of the three Bavarian universities. Neohumanist reformers like Friedrich Thiersch thus tried to dissolve these disturbing elements, and Hoffmann became one of the most obstinate defenders of the Lyzeum approach as a parallel form of propaedeutic studies (and the only important layman allied with the Catholic clergy) [5].

Not only his numerous managerial functions and his heavy teaching load kept Hoffmann from pursuing extensive research in mathematics, but also the fact that his audience consisted of students with little interest in mathematics as they were preparing for careers in unrelated professions. Thus, his lectures in mathematics were merely encyclopedic overviews. During the two years of study at the *Lyzeum*, mathematics was taught three hours per week during the first year, whereas Hoffmann taught mechanics, optics, and astronomy in the second year. At the beginning of the Bavarian era, the first-year mathematics course was entirely elementary, consisting, for instance, of arithmetic in the winter term and geometry in the summer. Later on, the level improved somewhat. From 1824 onward, Hoffmann's mathematics course comprised "Arithmetics, Geometry, Algebra, Differential and Integral Calculus," based "on his own textbooks" [6]. Given this vast program and the institutional context in which he taught, Hoffmann obviously had no incentive to engage in research on the foundations of analysis or to introduce his students to these questions. His positive response to Bolzano's rigorous approach in analysis had been prompted by his own earlier search for rigorous foundations in geometry. Hoffmann's mathematical practice can be characterized as typical for the state of mathematics in southern Germany up to the 1860s.

Who might have read Hoffmann's review of Bolzano's key papers? The *JALZ* was widely read in Germany by scholars, intellectuals, teachers, etc. Since it regularly published a large number of reviews on mathematical books of all branches and levels, it may be assumed that it was read by mathematicians as well, and particularly so since no specialized mathematical review journals existed at the time. To be sure, young aspiring mathematicians were eager to get the recent issues of the review journals in order to see their publications reviewed. For instance, Martin Ohm reported to his brother in 1816, after the publication of his first book, that he kept reading all the "gelehrten Zeitungen," i.e., review journals, fearing to find a negative review of his work:

Mit Zittern nehmen wir täglich die neueste Makulatur in Händen (d.h. die gelehrten Zeit.) und *fürchten* eine sogenannte Recension darin zu finden. [Quoted from Schubring 1983, 225]

A suggestion as to how Hoffmann's reviews might have been received within more analytically oriented mathematical communities is presented, again, by Abel. During the four months he spent in Berlin starting in October 1825, he was in close contact with Crelle and his mathematical circle, with whom he engaged in very intensive conversations on all mathematical issues (see [Ore 1957, 90 and passim]). Abel's reading of Bolzano in Berlin was, therefore, no isolated instance, but rather part of this process of communication. In fact, Crelle had in his own personal library all three booklets of Bolzano reviewed by Hoffmann [Catalogue ... 1856, 69]![7] One can deduce, therefore, that Berlin was a center for the reception and transmission of Bolzano's mathematical work.

It would be rewarding to undertake more detailed studies of the reception of Bolzano's work. As a first such result, I might mention that no review of a Bolzano publication is listed in the registers of the "Göttinger gelehrte Anzeigen" for the years 1783 to 1822.

REEDITION OF THE MAIN PARTS OF HOFFMANN'S ESSAY REVIEW

1. Leipzig, b. Kummer. **Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen** u. s. f., gelöst von **Bernard Bolzano,** Weltpriester, Dr. der Philos. u. s. w. 1817. xxiv u. 80 S. 9. Mit 1 Kupfertafel.

2. Prag, b. Enders. **Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen,** genauer als bisher bewiesen, von **Bernard Bolzano** u. s. w. 1816, xvi u. 144 S. gr. 8. (1 Rthlr.)

3. Prag, b. Haase. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege,** von **Bernard Bolzano** u. s. f. 1817. xxviii u. 32 S. gr. 8. (6 gr.)

Wir kennen den Vf. dieser Schriften schon aus seinen früheren Arbeiten (z.B. Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie, Prag, 1804) als einen wahrheitsliebenden Forscher und scharfen Denker. Da aber seine literarischen Versuche nicht bekannt genug geworden sind: so übernimmt es Rec. sehr gern, die drey jüngsten Früchte seines Studiums zur näheren Kenntniß des größeren mathematischen Publicums zu bringen. Des Vfs. Ansichten sind neu, auf scharf bestimmte Begriffe gestützt, mit großer Consequenz durchgeführt, und erstrecken sich über einige der wichtigsten mathematischen Lehren. Warum sollten wir sie also nicht genauer beachten? Wohl bedarf es bisweilen einiger Anstrengung, um seinem Ideengange zu folgen; doch soll dieß den Unbefangenen nicht abschrecken.

In No. 1 sucht der Vf. die drey wichtigen Probleme von der Rectification, der Complanation und von der Cubirung, ohne Betrachtung des Unendlich-Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne eine nicht streng erweisliche Voraussetzung, als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Geometrie, aufzulösen, Zu diesem Behufe legt er die drey Formale [8] zum Grunde, nach welchen (1) die Länge einer jeden Linie $= \int \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; (2) die Größe jeder Fläche $= \int\int dx\, dy \sqrt{[1 + (dz/dx)^2 + (dz/dy)^2]}$, und der Inhalt jedes Körpers $= \int\int\int dx\, dy\, dz$ ist, wenn $x\ y\ z$ die drey rechtwinklichen Coordinaten dieser Raumdinge bezeichnen. Von diesen Formeln behauptet nun der Vf., daß kein bisher bekannt gewordener Beweis derselben *ächt wissenschaftlich* sey, und bringt Gründe vor, welche für den unparteyischen Forscher großes Gewicht haben. Um aber die Leser in den Stand zu setzen, des Vfs. neue Methode, wenigstens *für einen einzelnen Fall,* zu übersehen und zu prüfen, theilen wir Folgendes hier mit.

... [9]

Wir gestehen, daß uns diese Darstellung sehr erfreulich gewesen ist, und wünschen ihr, sowie der ganzen Schrift des Vfs., die besondere Theilnahme des mathematischen Publikums.

In No. 2 erhalten wir eine neue Probe von dem regen Streben des Vfs. Alle früheren Bemühungen, den binomischen und polynomischen Lehrsatz mit Evidenz zu beweisen, sind demselben nicht vollkommen befriedigend. (1) Habe man die Glieder der Binomialreihe, wenn der Exponent keine ganze positive Zahl war, ins *Unendliche* fortgehen lassen, und hiedurch also dieses *Unendliche* zu berechnen versucht. (2) Habe man die Binomialgleichung als eine *für jeden Werth* des Exponenten und für jede Beschaffenheit der zweytheiligen Größe geltende Gleichung dargestellt, und doch sey es gewiß, daß sie nur eigentlich für einen ganzen und positiven Exponenten gelte. (3) Wäre die Unstatthaftigkeit der Gleichung $(1 + x)^n = \ldots.$ für den Werth von $x < \pm 1$ [10] allgemein anerkannt. (4) Sind alle für den binomischen Lehrsatz bisher geführten Beweise schon deshalb fehlerhaft, weil sie *zu viel* beweisen: denn der Satz gilt für einen gebrochenen oder negativen Exponenten, höchstens, wenn $x < \pm 1$ ist. Aber in welchem Beweise wird auf dieses unumgängliche Bedingniß Rücksicht genommen? Was soll es helfen, daß man sich bloß hinterher die Anwendung der Sätze, wo $x =$ oder $> \pm 1$ ist, verbietet, wenn aus den Beweisen nicht selbst zu ersehen ist, warum sie nicht auch für diese Fälle gelten? Diese Kritiken, welche der Vf. mit Ausführlichkeit darlegt, haben unseren vollen Beyfall. Was nun des Vfs. eigene Darstellung betrifft: so können wir ihr weder Originalität, noch Gründlichkeit absprechen, und halten uns für verpflichtet, sowohl Kenner, als Liebhaber der streng analytischen Methode hierauf aufmerksam zu machen, überzeugt, daß sie mit Theilnahme und Zufriedenheit diese Schrift durchlesen werden.

Mit Recht bemerkt der Vf. in No. 3, daß es in der Lehre von den Gleichungen zwey Sätze gebe, deren Richtigkeit noch vor Kurzem nicht gehörig erwiesen war. Der erste ist: zwischen je zwey Werthen der unbekannten Größe, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, muß immer wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegen; der andere heißt: Jede algebraische rationale ganze Function einer veränderlichen Größe läßt sich in reale Factoren des ersten oder zweyten Grades auflösen.—Mit gleichem Rechte erwähnt der Vf. die mißlungenen Versuche eines befriedigenden Beweises des letzteren Theorems, und ertheilt der Demonstration des vortrefflichen *Gauß* (*Demonstratio nova altera* und *Demonstratio nova tertia theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*; 1816.4.) das verdiente Lob.—Was aber den strengen und vollkommen befriedigenden Beweis des ersten Satzes betrifft, so bemerkt der Vf. mit Recht, daß dieser weder von *Kästner*, noch von *Clairaut, Lacroix, Metternich, Klügel, Lagrange, Rößling* u. A. geliefert worden sey. Denn die *gewöhnliche* Beweisart stützt sich auf eine geometrische (also der Analysis fremdartige) Wahrheit: daß jede continuirliche Linie von einfacher Krümmung, deren Ordinaten erst positiv, dann negativ (oder umgekehrt) sind, die Abscissenlinie nothwendig irgendwo in einem Puncte, der zwischen jenen Ordinaten liegt, durchschneiden müsse.—Ebenso unzulässig ist ein anderer Beweis, welcher aus dem Begriffe der Stetigkeit einer Function mit Einmengung der Begriffe von *Zeit* und *Bewegung* geführt wird.—Ein Gleiches gilt von dem Beweise durch Hülfe des (selbst erst zu begründenden) Satzes: jede veränderliche Größe kann aus einem bejahenden Zustande in einen verneinenden nur durch den Zustand des Nullseyns oder der Unendlichkeit übergehen.—Auch ist folgender Schluß: Weil fx für $x = \alpha$ bejaht, für $x = \beta$ verneint ist, so muß es zwischen α und β zwey Größen a und b geben, bey denen der Übergang aus den bejahten Werthen fx in die verneinten geschieht, so zwar, daß zwischen a und b kein Werth von x mehr fällt, für welchen fx noch bejaht oder verneint wäre, u. s. f.—Des Vfs. Versuch einer objectiven Begründung des Lehrsatzes nimmt folgenden Gang. Die zu beweisende Wahrheit, daß zwischen den zwey Werthen α und β, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, jederzeit wenigstens eine reelle Wurzel liege, beruht offenbar auf jener *allgemeineren*, daß, wenn zwey stetige Functionen von x, fx und φx von solcher Beschaffenheit sind, daß für $x = \alpha, f\alpha < \varphi\alpha$, für $x = \beta$ aber $f\beta > \varphi\beta$ ausfällt, allemal irgend ein zwischen α und β liegender Werth von x vorhanden seyn müsse, für welchen $fx = \varphi x$ wird. Allein wenn $f\alpha < \varphi\alpha$ ist; so ist vermöge des Gesetzes der Stetigkeit auch noch $f(a + i) < \varphi(a + i)$, wenn man nur i klein genug annimmt. *Die Eigenschaft des Kleinerseyns* also kömmt der Function von i, die der Ausdruck $f(a + \mathrm{i})$ darstellt, für alle Werthe von i zu, die kleiner sind, als ein gewisser. Gleichwohl kömmt diese Eigenschaft ihr nicht für *alle* Werthe von i ohne Einschränkung zu; namentlich nicht für ein i, daß $= \beta - \alpha$ wäre, indem $f\beta$ schon $> \varphi\beta$ ist. Nun gilt der *Lehrsatz*, daß so oft eine gewisse

Eigenschaft M allen Werthen einer veränderlichen Größe i, die kleiner, als ein gegebener sind, und doch nicht *allen überhaupt* zukommt; so giebt es jederzeit irgend einen *größten* Werth u, von dem behauptet werden kann, daß alle i, die $<u$ sind, die Eigenschaft M besitzen. Für diesen Werth von i selbst kann nun $f(\alpha + u)$ nicht $<\varphi(\alpha + u)$ seyn; weil sonst nach dem Gesetze der Stetigkeit auch noch $f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega)$ wäre, wenn man ω nur klein genug annähme. Und folglich wäre es nicht wahr, daß u der größte von den Werthen ist, von welchen die Behauptung gilt, daß alle unter ihm stehenden Werthe von $i, f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ machen; sondern $u + \omega$ wäre ein noch größerer Werth, von dem dasselbe gilt. Noch weniger aber kann $f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u)$ seyn; indem sonst auch $f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha + u - \omega)$ seyn müßte, wenn man ω klein genug annimmt, und folglich wäre es nicht wahr, daß für alle Werthe von i, die $<u$ sind $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$ sey. So muß denn also $f(\alpha + u) = \varphi(\alpha + u)$ seyn; d. h. es giebt einen zwischen α und β liegenden Werth von x, nämlich $\alpha + u$, für welchen die Functionen fx und φx einander gleich werden. Es handelt sich nur noch um den Beweis des erwähnten *Lehrsatzes*. Diesen erweisen wir nun, indem wir zeigen, daß jene Werthe von i, von welchen behauptet werden kann, daß alle kleineren die Eigenschaft M besitzen, und jene, von denen sich dieß nicht mehr behaupten läßt, einander so nahe gebracht werden können, als man nur immer will: woraus sich für Jeden, der einen richtigen Begriff von *Größe* hat, ergiebt, daß der Gedanke eines i, welches das *größte* derjenigen ist, von denen gesagt werden mag, daß alle unter ihm stehenden die Eigenschaft M besitzen, der Gedanke einer reellen *wirklichen* Größe sey.

Je mehr wir in Allem diesem eine eigenthümliche und interessante Darstellung des fraglichen Theorems erkennen: mit desto größerer Theilnahme und Überzeugung fordern wir den Vf. auf, sein vorzügliches Talent auch fernerhin zur Entdeckung oder schärferen Begründung mathematischer Lehren nicht unbenutzt zu lassen.

NOTES

1. First published in 1902 by Sylow. See Ore [1957, 96].

2. Grattan-Guinness's suggestion that Cauchy read Bolzano relies therefore on circumstancial evidence; see Grattan-Guinness [1969/1970].

3. See the impressive list of his publications in [Hoffmann 1856, 11–20].

4. Or, more exactly, he studied the disciplines of the "Philosophische Vorbereitungsschule," which was an equivalent to the propaedeutic studies in the philosophical faculty at other universities.

5. Only after 1847–1849, the Lyzeen were restricted to preparing for theological studies, while the philosophical faculties were liberated from propaedeutic functions and allowed to specialize; see Müller [1986, 162 and 266–268].

6. See the yearly published "Jahres-Bericht über die Königlichen Studien-Anstalten zu Aschaffenburg," sometimes also titled: "Jahres-Bericht über das Königliche Lyceum und Gymnasium zu Aschaffenburg."

7. A copy of this catalogue produced by the auctioneer Asher for a public sale has been preserved at the Deutsche Staatsbibliothek zu Berlin, Preußischer Kulturbesitz. I am grateful to Wolfgang Eccarius (Erfurt) for having drawn my attention to it. Although the catalogue mixes the library of Crelle with that of A.-L. Busch, director of the observatory at Köngisberg, it is obvious that the Bolzano books did not belong to this astronomer.

8. sic! It should read "Formeln."

9. Since the following text is copied from Bolzano's own introduction, pages xviii to xxii, it is not reprinted here.

10. sic! it should read "$> \pm 1$."

REFERENCES

Bulling, K. 1962. *Die Rezensenten der Jenaischen Allgemeinen Literaturzeitung im ersten Jahrzehnt ihres Bestehens, 1804–1813.* Weimar: H. Böhlaus Nachf.

——— 1963. *Die Rezensenten der Jenaischen Allgemeinen Literaturzeitung im zweiten Jahrzehnt ihres Bestehens, 1814–1823.* Weimar: H. Böhlaus Nachf.

——— 1965. *Die Rezensenten der Jenaischen Allgemeinen Literaturzeitung im dritten Jahrzehnt ihres Bestehens, 1824–1833.* Weimar: H. Böhlaus Nachf.

Catalogue des Livres Scientifiques, Cartes et Autographes composant les biblioteques de feu M. A.-L. Crelle, . . . , et de feu M. A.-L. Busch, . . . , en vente aux prix marqués chez A. Asher et Co. Berlin 1856.

Grattan-Guinness, I. 1969/1970. Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century. *Archive for the History of Exact Sciences* **6,** 372–400.

——— 1970. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann.* Cambridge, MA: MIT Press.

Hoffmann, J. J. I. 1807. *Critik der Parallelen-Theorie, welche die Darstellung und Prüfung von siebenzehn verschiedenen Systemen enthält.* Jena: Cröker.

——— 1817. *Grundlehren der Algebra, höheren Geometrie und der Infinitesimalrechnung, zur Erleichterung dieses Studiums faßlich vorgetragen.* Gießen: Tasche.

Hoffmann, J. J. I. von. 1856. *Biographische Skizze.* Programm des Königlich Bayerischen Lyceums zu Aschaffenburg für 1855 in 1856. Aschaffenburg.

Müller, Rainer A. 1986. *Akademische Ausbildung zwischen Staat und Kirche: Das bayerische Lyzealwesen 1773–1849.* 2 vols. Paderborn: Schoeningh.

Ore, O. 1957. *Niels Henrik Abel: Mathematician extraordinary.* Minneapolis: Univ. of Minnesota Press.

Scherg, Th. J. 1939. *Das Schulwesen unter Karl Theodor von Dalberg.* 2 vols. München: Herold.

Schubring, G. 1983. Das mathematische Leben in Berlin. Zu einer entstehenden Profession an Hand von Briefen des aus Erlangen stammenden Martin Ohm an seinen Bruder Georg Simon, *Erlanger Bausteine zur Fränkischen Heimatforschung.* Jahrbuch 30, 221–249.

——— 1991. Spezialschulmodell versus Universitätsmodell: Die Institutionalisierung von Forschung. In *'Einsamkeit und Freiheit' neu besichtigt. Universitätsreformen und Disziplinenbildung in Preussen als Modell für Wissenschaftspolitik im Europa des 19. Jahrhunderts,* G. Schubring, Ed., pp. 276–326. Stuttgart: F. Steiner Verlag.

Winter, E. *et al.* (Eds.). 1972. *Bernard—Bolzano—Gesamtausgabe,* Einleitungsband, zweiter Teil, erste Abteilung: Bolzano-Bibliographie. Stuttgart: F. Frommann.