Γεωμετρική ανάλυση ανισοτήτων Sobolev

Διπλωματική Εργασία

Αθανάσιος Ζαχαρόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Οι συναρτησιακές ανισότητες παίζουν θεμελιώδη ρόλο στα μαθηματικά, λόγω της σύνδεσής τους με διάφορους τομείς, όπως για παράδειγμα:

(i) Πιθανότητες: οι Ledoux, Talagrand και άλλοι, απέδειξαν αποτελέσματα συγκέντρωσης του μέτρου χρησιμοποιώντας συναρτησιακές ανισότητες.

(ii) Γεωμετρία: Η απόδειξη του Perelman για την εικασία του Poincaré χρησιμοποιεί γεωμετρικές συναρτησιακές ανισότητες.

(iii) Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις: Οι περισσότερες εφαρμογές είναι για παραβολικού τύπου εξισώσεις, αλλά μπορούν να εμφανιστούν και σε ελλειπτικές ή και μη-γραμμικές περιπτώσεις.

Προς τιμήν του John Forbes Nash (1928-2015) και ως πρώτο αξιοσημείωτο παράδειγμα αναφέρουμε την συναρτησιακή ανισότητα που φέρει το όνομά του. Ισχυρίζεται ότι στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το μέτρο Lebesgue, υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει

$$\|f\|_2^{1+2/n} \leqslant C\|\nabla f\|_2 \|f\|_1^{2/n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος $L^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ εμφυτεύεται συνεχώς στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Παρόλο που η ανισότητα αυτή αποδείχθηκε το 1958, η βέλτιστη σταθερά προσδιορίστηκε το 1992.

1.1 Περιγραφή της εργασίας

Σε αυτή την εργασία μελετάμε συναρτησιακές ανισότητες χρησιμοποιώντας εργαλεία από τις ημιομάδες Markov. Συγκεκριμένα, το **Κεφάλαιο 2** είναι εισαγωγικό και παρουσιάζει την έννοια της ημιομάδας Markov. Σε έναν χώρο σ-πεπερασμένου μέτρου $(E, \mathcal{F}, \mu)$, με τον όρο ημιομάδα Markov εννοούμε μια οικογένεια γραμμικών τελεστών $\{P_t\}_{t\geq 0}$ που ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών μετρήσιμων συναρτήσεων και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) για κάθε $t \geq 0$, $P_t : L^\infty(E, \mu) \to L^\infty(E, \mu)$.

(ii) $P_t 1 = 1$, όπου 1 η σταθερή συνάρτηση.

(iii) $P_0 = Id$.

(iv) αν $f \geq 0$, τότε $P_t f \geq 0$.

(v) για κάθε $t, s \geq 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.

(vi) το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο, δηλαδή για κάθε φραγμένη μη αρνητική συνάρτηση f και για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\int_E P_t f \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

(vii) για κάθε $f \in L^2(E, \mu)$, $P_t f \to f$ στον $L^2(E, \mu)$ καθώς $t \to 0$.

Από τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι η P_t είναι συστολή σε κάθε χώρο L^p και από τη θεωρία Hille-Yosida έπεται ότι υπάρχουν πυκνός γραμμικός υπόχωρος $D(\mathcal{L}) \subset L^2(E, \mu)$ και ένας γραμμικός τελεστής $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \to L^2(E, \mu)$ ώστε, για κάθε $f \in D(\mathcal{L})$,

$$\mathcal{L} f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

όπου η σύγκλιση είναι στον $L^2(E, \mu)$. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ καλείται γεννήτορας της ημιομάδας. Περιοριζόμενοι σε μία άλγεβρα $\mathcal{A} \subset D(\mathcal{L})$, η οποία είναι πυκνή σε κάθε $L^p(E, \mu)$, για κάθε $p \geq 1$ ορίζουμε τον τελεστή carré du champ του γεννήτορα

$$\Gamma(f, g) := \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}(fg) - f \mathcal{L} g - g \mathcal{L} f \right),$$

και αποδεικνύουμε, εφοδιάζοντας την ημιομάδα με την ιδιότητα της συμμετρίας, δηλαδή

$$\int_E P_t f g \, d\mu = \int_E P_t g f \, d\mu$$

για κάθε $f, g \in L^2(E, \mu)$, ότι ισχύει ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = - \int_E f \mathcal{L} g \, d\mu.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ένα νέο διγραμμικό τελεστή

$$\Gamma_2(f, g) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L} \Gamma(f, g) - \Gamma(f, \mathcal{L} g) - \Gamma(g, \mathcal{L} f) \right),$$

και για απλότητα γράφουμε με $\Gamma(f)$ και $\Gamma_2(f)$ όταν $f = g$. Ο συμμετρικός διγραμμικός τελεστής

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = - \int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu,$$

που ορίζεται στην $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, καλείται μορφή Dirichlet της ημιομάδας.

Το 1985, οι Bakry κι Émery διατύπωσαν τη συνθήκη καμπυλότητας διάστασης: σε μία τριάδα Markov (E, μ, Γ) θα λέμε ότι η ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geq 0}$ ικανοποιεί τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$, όπου $\rho \in \mathbb{R}$ και $n \geq 1$, αν για κάθε $f \in \mathcal{A}$ ισχύει η ανισότητα

$$\Gamma_2(f) \geq \rho \Gamma(f) + \frac{1}{n} (\mathcal{L} f)^2,$$

και τη συνθήκη $CD(\rho,\infty)$ αν $\Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f)$.

Στο **Κεφάλαιο 3** αποδεικνύουμε διάφορα αποτελέσματα για ανισότητες Sobolev. Αρχικά δείχνουμε ότι η ανισότητα Sobolev, που στο πλαίσιο των τριάδων Markov (E,μ,Γ) γράφεται ως

$$\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f),$$

συνεπάγεται την ανισότητα Poincaré $\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C\mathcal{E}(f)$, για μετρήσιμη $f \in D(\mathcal{E})$. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής αποτελεί η ισοδυναμία των ανισοτήτων Sobolev, λογαριθμικής ανισότητας εντροπίας-ενέργειας και Nash, όπως διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν ισχύει η ανισότητα Sobolev $\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)$ με $A \geq 0, C > 0$, για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\|f\|_2^2 = 1$, τότε ισχύει η λογαριθμική ανισότητα εντροπίασ-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln(A + C\mathcal{E}(f)).$$

(ii) *Αν ισχύει η παραπάνω λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας, τότε για κάθε συνάρτηση $f \in D(\mathcal{E})$ ισχύει η ανισότητα του Nash*

$$\|f\|_2^{n+2} \leqslant \left(A \cdot \|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)\right)^{n/2} \|f\|_1^2.$$

(iii) *Αν ισχύει η ανισότητα Nash, τότε ισχύει και η ανισότητα Sobolev*

$$\|f\|_p^2 \leqslant A_1\|f\|_2^2 + C_1\mathcal{E}(f)$$

με $A_1 \geq 0, C_1 > 0$. Επιπλέον, αν $A = 0$, τότε έχουμε και $A_1 = 0$.

Στην απόδειξη της παραπάνω πρότασης εμφανίζεται η ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική του τεμαχισμού (slicing). Το τελευταίο αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 3 είναι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev για το μέτρο του Gauss. Στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος φαίνεται η ευκολία στους υπολογισμούς με το μέτρο του Gauss, καθώς επίσης και η χρησιμότητα της ημιομάδος Ornstein-Uhlenbeck, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\, d\gamma_n(y).$$

Το θεώρημα οφείλεται στον L. Gross και αποδείχθηκε το 1975.

Θεώρημα 1.1.2. *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στο χώρο Dirichlet $D(\mathcal{E})$ με το συνήθη τελεστή carré du champ $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$ ισχύει ανισότητα*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\, d\gamma_n,$$

και η σταθερά 2 είναι βέλτιστη.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\gamma_n(dx) = \frac{1}{2\pi^{n/2}}e^{-|x|^2/2}dx$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Gross για τη συνάρτηση $f(x)(2\pi)^{n/4}e^{|x|^2/4}$, αποδεικνύουμε και τη βέλτιστη Ευκλείδεια λογαριθμική ανισότητα Sobolev, η οποία παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{n\pi e} \cdot \mathcal{E}(f)\right)$$

για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στο $D(\mathcal{E})$ με $\int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx = 1$.

Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα ούλτρα-συσταλτότητας για ημιομάδες Markov, δηλαδή εξετάζουμε το ρυθμό με τον οποίο φθίνουν οι νόρμες $\|P_t\|_{1,\infty}$ σαν συναρτήσεις του t, αν υποθέσουμε την ισχύ κάποιας συναρτησιακής ανισότητας. Αρχικά δίνουμε μια σύντομη απόδειξη για την ισοδυναμία της ούλτρα-συσταλτότητας και της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev, και στη συνέχεια αποδεικνύουμε το εξής σημαντικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1.3 (θεώρημα ούλτρα-συσταλτότητας)**.** *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geq 0}$. Έστω $n > 2$ η διάσταση Sobolev. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ισχύει η ανισότητα Sobolev $\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)$ με σταθερές $A \geq 0, C > 0$.*

(ii) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $0 < t \leqslant 1$,*

$$\|P_t\|_{1,2} \leqslant \frac{C}{t^{n/4}}.$$

(iii) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $0 < t \leqslant 1$,*

$$\|P_t\|_{1,\infty} \leqslant \frac{C}{t^{n/2}}.$$

Η ισοδυναμία των (ii) και (iii) βασίζεται στο θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin. Για την ισοδυναμία των (i) και (ii) χρησιμοποιούνται η ανισότητα του Nash και ένα επιχείρημα κυρτότητας για τη συνάρτηση $\ln\|P_t f\|_2^2$.

Μέσω του προηγούμενου θεωρήματος δείχνουμε ότι ο χώρος $D(\mathcal{E})$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^2(E, \mu)$. Ειδικότερα, περιοριζόμενοι στα φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, παρουσιάζουμε και μια απόδειξη του θεωρήματος Rellich-Kondrachov:

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω $\mathcal{O}$ ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$\|f\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 := \int_{\mathcal{O}} f^2\, dx + \int_{\mathcal{O}} |\nabla f|^2\, dx,$$

όπου η f είναι διαφορίσιμη με συμπαγή φορέα στο $\mathcal{O}$, και $H^1(\mathcal{O})$ είναι η πλήρωση αυτής της κλάσης συναρτήσεων θεωρούμενη ως υπόχωρος του $L^2(\mathcal{O}, dx)$. Τότε, η εμφύτευση του $H^1(\mathcal{O})$ στον $L^2(\mathcal{O}, dx)$ είναι συμπαγής.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ούλτρα-συσταλτότητας δείχνουμε ότι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev διατηρείται σε χώρους γινόμενα και προσδιορίζουμε τις νέες σταθερές.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω $(E_1,\mu_1,\Gamma_1),(E_2,\mu_2,\Gamma_2)$ τριάδες Markov. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι λογαριθμικές ανισότητες Sobolev $LS(C_1,D_1),LS(C_2,D_2)$ στις παραπάνω τριάδες αντίστοιχα. Τότε, στο χώρο γινόμενο $(E_1\times E_2,\mu_1\otimes\mu_2,\Gamma_1\otimes\Gamma_2)$ ικανοποιείται η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(\max(C_1,C_2),D_1+D_2)$.*

Παράλληλα, ως συνέπεια της προηγούμενης πρότασης, παίρνουμε ότι και η λογαριθμική ανισότητα Sobolev εξακολουθεί να ισχύει σε χώρους γινόμενα τριάδων Markov, λόγω της ισοδυναμίας της με τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev. Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου περιοριζόμαστε σε 1-Lipschitz συναρτήσεις και μέσω αυτών παίρνουμε πληροφορίες για τη διάμετρο μιας τριάδας Markov. Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε είναι το εξής.

Πρόταση 1.1.6. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov, όπου το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι ισχύει η αυστηρή λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\leqslant\frac{n}{2}\cdot\ln(1+C\cdot\mathcal{E}(f)),$$

για $f\in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\,d\mu=1$. Τότε, η διάμετρος $D=D(E,\mu,\Gamma)$ είναι πεπερασμένη.

Το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε αφορά τη σχέση Lipschitz-συναρτήσεων με όγκους μπαλών υπό την ισχύ της ανισότητας Sobolev. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1.7. *Έστω f θετική και 1-Lipschitz συνάρτηση στην τριάδα Markov (E,μ,Γ). Ορίζουμε $V(r)=\mu([f\leqslant r])$ για $r\geq 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ με $A\geq 0$, $C>0$ και ότι για κάποιο $r_0>0$ είναι $V(r_0)<\infty$. Τότε, αν ισχύει η συνθήκη*

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\ln V(r)}{\ln r}<\infty,$$

υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε

$$V(r)\geq c\cdot r^n$$

για κάθε $0\leqslant r\leqslant 1$.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζουμε τοπικές ανισότητες Sobolev. Το πρώτο αποτέλεσμα. το οποίο στηρίζεται σε ασθενή και ισχυρά φράγματα κλίσης που παρουσιάζονται στην αρχή της παραγράφου καθώς και στην ιδιότητα διάχυσης, είναι το εξής.

Θεώρημα 1.1.8 (τοπική λογαριθμική ανισότητα Sobolev με διάσταση)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geq 0}$ και γεννήτορα $\mathcal{L}$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητασ-διάστασης $CD(0,n)$.*

(ii) *Για κάθε συνάρτηση f στο $\mathcal{A}_0^{',+}$ και κάθε $t\geq 0$,*

$$P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf)\geq P_t(f\mathcal{L}(\ln f))\left(1+\frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_tf)\right). \tag{1.1.1}$$

(iii) *Για κάθε συνάρτηση f στο $\mathcal{A}_0^{',+}$ και κάθε $t\geq 0$,*

$$P_t(f\ln f)-P_tf\ln P_tf\leqslant t\mathcal{L}P_tf+\frac{n}{2}P_tf\ln\left(1-\frac{2t}{n}\frac{P_t(f\mathcal{L}(\ln f))}{P_tf}\right). \tag{1.1.2}$$

(iv) *Για κάθε συνάρτηση f στο $\mathcal{A}_0^{',+}$ και κάθε $t \geq 0$,*

$$P_t(f \ln f) - P_t f \ln P_t f \geq t\mathcal{L}P_t f - \frac{n}{2} P_t f \ln\left(1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_t f)\right). \tag{1.1.3}$$

Ως πόρισμα του παραπάνω Θεωρήματος παρουσιάζουμε μια ιδιαίτερα χρήσιμη μορφή της ανισότητας Harnack, υπό την ισχύ της συνθήκης $CD(0,n)$, σε μια πολλαπλότητα Riemann (M,g): για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in M$ και $t, s > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P_t f(x) \leqslant P_{t+s} f(y) \left(\frac{t+s}{t}\right)^{n/2} e^{\frac{d(x,y)^2}{4s}}.$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου αποτελεί μια συνθήκη ούλτρα-συσταλτότητας αν ο χώρος μας έχει μηδενική καμπυλότητα και διάσταση n. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα, η απόδειξή του οποίου στηρίζεται στο προηγούμενο θεώρημα και μεθόδους διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 1.1.9 (τοπική υπερσυσταλτότητα με διάσταση)**.** *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geq 0}$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,n)$.*

(ii) *Για κάθε $1 < q_1 < q_2 < \infty$, $u_1, u_2 > 0$ και $\sigma = q_2 u_2 - q_1 u_1 \geq 0$, και για κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση f στο E, έχουμε*

$$\left[P_{u_1}\left((P_\sigma f)^{q_2}\right)\right]^{\frac{1}{q_2}} \leqslant M^{\frac{n}{2}} \left[P_{u_2}(f^{q_1})\right]^{\frac{1}{q_1}}, \tag{1.1.4}$$

όπου $M = \left(\frac{q_1-1}{u_1}\right)^{1-\frac{1}{q_1}} \left(\frac{q_2-1}{u_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-1} \left(\frac{\sigma}{q_2-q_1}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}$.

Στη συνέχεια δείχνουμε διάφορα αποτελέσματα από τα οποία γίνεται σαφές πόσο ισχυρή είναι η συνθήκη καμπυλότητας- διάστασης. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι σε μια τριάδα Markov ισχύει η συνθήκη $CD(\rho, n)$, αποδεικνύουμε ότι ισχύουν συναρτησιακές ανισότητες τύπου Sobolev με σταθερές που εξαρτώνται από τα ρ, n. Αν μάλιστα περιοριστούμε σε χώρους με γνωστή καμπυλότητα και διάσταση, παίρνουμε τις ανισότητες αυτές με βέλτιστες σταθερές. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι το εξής:

Θεώρημα 1.1.10. *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov, όπου μ είναι μέτρο πιθανότητας. Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$, όπου $\rho > 0$ και $1 \leqslant n < \infty$, τότε ικανοποιείται αυστηρά η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \log\left(1 + \frac{4}{\rho n}\mathcal{E}(f)\right) \tag{1.1.5}$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\, d\mu = 1$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος εξασφαλίζουμε φράγματα για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $\Lambda(t) = \mathrm{Ent}_\mu(P_t f)$ και από αυτά προκύπτει η ισοδύναμη μορφή της παραπάνω ανισότητας για την $\sqrt{f}$ αντί για την f.

Το επόμενο αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε δείχνει ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη $CD(\rho, n)$ τότε ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.11 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev υπό τη συνθήκη $CD(\rho,n)$)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov, όπου $\mu(E)=1$. Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho,n)$ για $\rho>0$ και $n>1$, τότε ικανοποιείται η λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $C=\frac{n-1}{\rho n}$.*

Για την απόδειξη υπολογίζουμε τους τελεστές Γ,Γ_2 για τη συνάρτηση $e^{\alpha g}$ και εφαρμόζοντας τη συνθήκη $CD(\rho,n)$ για τη συνάρτηση αυτή παίρνουμε την ισοδύναμη μορφή $\int_E f\Gamma(\ln f)\,d\mu \leqslant \frac{n-1}{\rho n}\int_E f\Gamma_2(\ln f)\,d\mu$ της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev.

Όταν δουλεύουμε με την ανισότητα Sobolev, η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος, στην περίπτωση που υπάρχουν ακραίες συναρτήσεις. Διαφορετικά, προσεγγίζουμε το πρόβλημα με εργαλεία ούλτρα-συσταλτότητας από το Κεφάλαιο 4, και έτσι παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.1.12. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov διάχυσης, όπου $\mu(E)=1$, στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho,n)$ με $\rho>0$ και $2<n<\infty$, τότε ικανοποιείται η ανισότητα Sobolev $S_n(C)$ με βέλτιστη σταθερά $C=\frac{4(n-1)}{\rho n(n-2)}$. Δηλαδή, ισχύει η ανισότητα*

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{4(n-1)}{\rho n(n-2)}\mathcal{E}(f) \tag{1.1.6}$$

για κάθε $f\in D(\mathcal{E})$ όπου $p=\frac{2n}{n-2}$.

Τέλος, δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο, δείχνουμε ότι υπό την ισχύ της συνθήκης καμπυλότητας-διάστασης ισχύει η ανισότητα Poincaré.

Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου 5 εισάγουμε την έννοια της n-σύμμορφης αναλλοίωτης απεικόνισης. Συγκεκριμένα, μια αναλλοίωτη n-σύμμορφη απεικόνιση είναι η $S=S(\mu,\Gamma):E\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε συνάρτηση $c=e^\tau\in\mathcal{A}$,

$$S(c^{-n}\mu,c^2\Gamma)=c^2\left[S(\mu,\Gamma)+\frac{n-2}{2}\left(\mathcal{L}\tau-\frac{n-2}{2}\Gamma(\tau)\right)\right]. \tag{1.1.7}$$

Δουλεύοντας σε τοπικές συντεταγμένες, δείχνουμε αρχικά το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1.13. *Έστω $p=\frac{2n}{n-2}$, $n>2$ και $S(\mu,\Gamma)$ μια n-σύμμορφη αναλλοίωτη απεικόνιση. Τότε, η ανισότητα Sobolev*

$$\|f\|_p^2 \leqslant C\left[\int_E S(\mu,\Gamma)f^2\,d\mu+\mathcal{E}(f)\right] \tag{1.1.8}$$

για κάποια σταθερά $C>0$ και $f\in D(\mathcal{E})$, είναι αναλλοίωτη στην n-σύμμορφη κλάση (E,μ,Γ). Δηλαδή, αν ισχύει για ένα ζευγάρι (μ,Γ) τότε ισχύει με την ίδια σταθερά C για το ζευγάρι $(C^{-n}\mu,C^2\Gamma)$ για κάθε θετική συνάρτηση $c\in\mathcal{A}$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η βαθμωτή καμπυλότητα, οποία σε τοπικές συντεγμένες γράφεται $sc_g(x)=\sum_{i,j}^n g^{ij}(x)Ric_{ij}(x)$, αποτελεί n-σύμμορφα αναλλοίωτη απεικόνιση και έτσι σε συνδυασμό με την προηγούμενη Πρόταση δείχνουμε τις βέλτιστες ανισότητες Sobolev στον $\mathbb{R}^n$, στη σφαίρα και τον υπερβολικό χώρο. Συγκεκριμένα, αν ω_n ο όγκος της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ έχουμε:

Θεώρημα 1.1.14. *Στους τρεις χώρους $\mathbb{R}^n,\mathbb{S}^n$ και $\mathbb{H}^n$ για το μέτρο μ και $n>2$ ισχύουν οι ακόλουθες βέλτιστες ανισότητες Sobolev για $p=\frac{2n}{n-2}$:*

(i) *Στον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

(ii) *Στη σφαίρα* $\mathbb{S}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{1}{\omega_n^{\frac{2}{n}}}\int_{\mathbb{S}^n} f^2\,d\mu + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

(iii) *Στον υπερβολικό χώρο* $\mathbb{H}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant -\frac{1}{\omega^{\frac{2}{n}}}\int_{\mathbb{H}^n} f^2\,d\mu + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

Το **Κεφάλαιο 6** αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μελετάμε ανισότητες Gagliardo-Nirenberg. Στο πλαίσιο των τριάδων Markov δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 1.1.15. Έστω $n > 2$, $p = \frac{2n}{n-2}$ και q, s τέτοια ώστε $1 \leqslant s \leqslant q \leqslant p$. Θα λέμε ότι στην τριάδα Markov (E, μ, Γ) ικανοποιείται η ανισότητα Gagliardo-Nirenberg $GN_n(q, s; A, C)$ με διάσταση n, παραμέτρους q, s και σταθερές $A \geq 0$, $C > 0$ αν για κάθε συνάρτηση $f \in D(\mathcal{E}) \cap L^s(\mu)$ ισχύει

$$\|f\|_q \leqslant \left[A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right]^{\frac{\vartheta}{2}} \|f\|_s^{1-\vartheta}, \tag{1.1.9}$$

όπου ο $\vartheta \in [0, 1]$ ορίζεται από την $\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{s}$.

Για το πρώτο αποτέλεσμα που μελετάμε στηριζόμαστε στην κυρτότητα της συνάρτησης $r :\rightarrow \ln\left(\|f\|_{1/r}\right)$ και την τεχνική του τεμαχισμού για τις $f_k = \min\{(f - 2^k)_+, 2^k\}$. Αποδεικνύουμε ότι από τις παραπάνω ανισότητες έπονται ανισότητες τύπου Sobolev. Επιπλέον, παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη για βέλτιστες ανισότητες Gagliardo-Nirenberg χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Legendre

$$W^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - W(x)\}$$

μιας κυρτής συνάρτησης $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.16 (κυρτές ανισότητες). *Έστω $n \geq 1$ και $\alpha \geq n$ (με $\alpha > 1$ όταν $n = 1$). Έστω επίσης $W : \mathbb{R}^n \mapsto (0, \infty)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\,dx < +\infty$. Τότε, για κάθε θετική και λεία συνάρτηση g τέτοια ώστε να ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g)g^{-\alpha}\,dx < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx < \infty$ και $\int_{\mathbb{R}^n} g^{-\alpha}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} W^{-\alpha}\,dx = 1$, έχουμε*

$$(\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g)g^{-\alpha}\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\,dx, \tag{1.1.10}$$

με την ισότητα να πιάνεται όταν $g = W$ και κυρτές.

Έτσι, το δεύτερο βασικό αποτέλεσμα που δείχνουμε είναι το εξής:

Θεώρημα 1.1.17 (ανισότητες Gagliardo-Nirenberg). *Έστω $n \geq 1$ και $\alpha > n$. Τότε,*

(i) *Για κάθε $1 < p < \alpha$, η ανισότητα*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}} \leqslant D^{+}_{n,p,\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx\right)^{\frac{\vartheta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\right)^{\frac{\alpha-p}{p(\alpha-1)}(1-\vartheta)}$$

ισχύει για κάθε λεία συνάρτηση f για την οποία αυτές οι ποσότητες είναι καλά ορισμένες. Ο $\vartheta \in [0,1]$ είναι η μοναδική λύση της

$$\frac{\alpha-p}{\alpha} = \vartheta\frac{n-p}{n} + (1-\vartheta)\frac{\alpha-p}{\alpha-1},$$

και $D^{+}_{n,p,\alpha}$ είναι η βέλτιστη σταθερά, που πιάνεται στις ακραίες συναρτήσεις $x \mapsto (1+\|x\|^q)^{\frac{p-\alpha}{p}}$.

(ii) *Αν $p > \alpha$ όταν $\alpha \geq n+1$, ή $p \in (\alpha, \frac{n}{n+1-\alpha})$ όταν $\alpha \in [n, n+1)$, τότε η ανισότητα*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\right)^{\frac{\alpha-p}{p(\alpha-1)}} \leqslant D^{-}_{n,p,\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx\right)^{\frac{\vartheta'}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}(1-\vartheta')}$$

ισχύει για κάθε λεία συνάρτηση f για την οποία οι παραπάνω ποσότητες είναι καλά ορισμένες. Εδώ, ο $\vartheta' \in [0,1]$ είναι η μοναδική λύση της $\frac{p-\alpha}{\alpha-1} = \vartheta'\frac{p-n}{n} + (1-\vartheta')\frac{p-\alpha}{\alpha}$ και $D^{+}_{n,p,\alpha}$ είναι η βέλτιστη σταθερά, που πιάνεται για την $x \mapsto (1+\|x\|^q)^{\frac{p-\alpha}{p}}$. Σε αυτή την περίπτωση οι εκθέτες των ολοκληρωμάτων είναι αρνητικοί.

Η περίπτωση (i) του παραπάνω θεωρήματος είναι η οικογένεια Del Pino-Dolbeault των βέλτιστων ανισοτήτων Gagliardo-Nirenberg.

Το δεύτερο κομμάτι του κεφαλαίου αφορά κάποιες νέες ανισότητες τύπου Sobolev-Kantorovich, που προέκυψαν σε μελέτη των F. Otto και E. Cinti, οι οποίοι δούλευαν στον n-διάστατο τόρο ξεκινώντας από μοντέλα φυσικής. Εμείς στηριζόμαστε στη δουλειά του M. Ledoux, που το 2015 απέδειξε τις ανισότητες αυτές στο γενικό πλαίσιο των πολλαπλοτήτων Riemann υπό τη συνθήκη $CD(0,N)$ για $N > 2$. Συγκεκριμένα, το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 1.1.18. *Έστω (M,g,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας, όπου M πολλαπλότητα Riemann και $d\mu = e^{-V}dx$ για μια λεία θετική πυκνότητα $V : M \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,N)$ για $N \geq 1$. Τότε, αν $p,q \geq 1$, υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από τα p,q,N τέτοια ώστε, για κάθε μέτρο πιθανότητας $d\nu = f d\mu$ με λεία πυκνότητα f ως προς το μ,*

$$\|(f-C)_+\|_r^{\vartheta} \leqslant C\|\nabla f\|_q \cdot W_p(\mu,\nu), \tag{1.1.11}$$

όπου $r = \frac{1+1/p+1/N}{1/p+1/q} > 1$ και $\vartheta = r(1/p+1/q) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.

Στο προηγούμενο θεώρημα, $W_p(\mu,\nu) = \inf\left(\int_{M\times M} d(x,y)^p\,d\pi(x,y)\right)^{1/p}$ είναι η απόσταση Wasserstein. Για την απόδειξη δουλεύουμε με τις συναρτήσεις $f_k = \min\{(f-2^k)_+, 2^k\}, k \in \mathbb{Z}$ και στηριζόμαστε στις επόμενες δύο βασικές προτάσεις. Η πρώτη αποτελεί μία ψευδο-Poincaré τύπου ανισότητα.

Πρόταση 1.1.19. *Έστω (M, g, μ) με M πολλαπλότητα Riemann στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, N)$. Τότε, για κάθε λεία συνάρτηση f στη M και για κάθε $t > 0$,*

$$\|f - P_t f\|_q \leqslant B\sqrt{t}\|\nabla f\|_q, \tag{1.1.12}$$

όπου $B > 0$ απόλυτη σταθερά (π.χ. $B = \sqrt{2}$) για $1 \leqslant q \leqslant 2$, ενώ για $q \geq 2$ η σταθερά B εξαρτάται μόνο από το N.

Η απόδειξη στηρίζεται στο χαρακτηρισμό της q-νόρμας και στην παρατήρηση ότι η κλίση είναι άνω φραγμένη από τη συνδιακύμανση της ημιομάδας. Το δεύτερο βασικό εργαλείο είναι το εξής.

Πρόταση 1.1.20. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.18, υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από τα p, q, N τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\sup_{u \geq C} u^{\vartheta} \mu(f \geq u)^{\vartheta/r} \leqslant C\|\nabla f\|_q W_p(\mu, \nu)$$

όπου $\vartheta = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.

Για την απόδειξη, αρκεί να φράξουμε την ποσότητα $\mu(f \geq 2u)$. Σε αυτό μας βοηθούν η προηγούμενη πρόταση και το δυϊκό θεώρημα Kantorovich για τη συνάρτηση κόστους $\frac{d^p(x,y)}{\varepsilon}$ και τη συνέλιξη

$$\widehat{Q}_{\varepsilon} P_t(\mathbf{1}_F)(x) = \sup_{y \in M} [P_t(\mathbf{1}_F)(y) - \frac{1}{\varepsilon} d(x, y)^p],$$

καθώς και η ανισότητα Harnack.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τριάδες Markov

2.1 Ημιομάδες Markov

Γενικά, μια ημιομάδα τελεστών είναι μια οικογένεια $(P_t)_{t\geqslant 0}$ τελεστών που δρουν σε κάποιο χώρο συναρτήσεων και ικανοποιούν τις ιδιότητες της ημιομάδας, δηλαδή $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ για $t, s \geqslant 0$ και $P_0 = \mathrm{Id}$.

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της ημιομάδας Markov, η οποία είναι θεμελιώδης τόσο για να ορίσουμε τις τριάδες Markov όσο και στη συνέχεια για τα θέματα που θα μελετήσουμε.

Ορισμός 2.1.1 (ημιομάδα Markov)**.** Έστω $(E, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ μια οικογένεια γραμμικών τελεστών που ορίζονται στην κλάση των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο και αναλλοίωτο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε φραγμένη, μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει

$$\int_E P_t f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

(γράφουμε τότε $P_t^* \mu = \mu$). Η $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ λέγεται ημιομάδα Markov αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες (i)-(vi):

(i) Για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f, η $P_t f$ είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Δηλαδή, ο γραμμικός τελεστής P_t στέλνει φραγμένες μετρήσιμες σε φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) $P_0 = \mathrm{Id}$, ο ταυτοτικός τελεστής.

(iii) $P_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, όπου $\mathbf{1}$ η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1.

(iv) Αν $f \geqslant 0$ τότε $P_t f \geqslant 0$ για κάθε $t \geqslant 0$.

(v) Για κάθε $t, s \geqslant 0$ ισχύει $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.

Όταν ικανοποιούνται οι ιδιότητες (iii) και (iv) ο P_t καλείται τελεστής Markov. Για την ιδιότητα (vi) θα χρειαστεί να ορίσουμε μία επιπλέον έννοια.

Παρατήρηση 2.1.2. Αν η f παίρνει τιμές στο $[-1,1]$ τότε $P_t(1+f) \geqslant 0$ και $P_t(\mathbf{1}-f) \geqslant 0$. Δηλαδή, $-\mathbf{1} = P_t(-\mathbf{1}) \leqslant P_t f \leqslant P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Έπεται ότι $\|P_t f\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε $t \geqslant 0$. Λόγω γραμμικότητας συμπεραίνουμε ότι $\|P_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ για κάθε $t \geqslant 0$ και κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση.

Αν ο P_t είναι τελεστής Markov τότε για κάθε κυρτή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει

$$P_t(\varphi(f)) \geqslant \varphi(P_t f).$$

Πράγματι, αν η f είναι απλή με κανονική αναπαράσταση $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, όπου $a_i \in \mathbb{R}$ και $A_i \in \mathcal{F}$, τότε $P_t(\mathbf{1}_{A_i}) \geqslant 0$ για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\sum_{i=1}^n P_t(\mathbf{1}_{A_i}) = P_t\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}\right) = P_t(\mathbf{1}_E) = \mathbf{1}$$

και

$$P_t\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n a_i P_t(\mathbf{1}_{A_i}),$$

οπότε από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\varphi(P_t f) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i P_t(\mathbf{1}_{A_i})\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) P_t(\mathbf{1}_{A_i}) = P_t(\varphi(f)).$$

Για τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη f θεωρούμε αύξουσα ακολουθία (g_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $g_n \uparrow f$ και χρησιμοποιώντας την $P_t(g_n) \to P_t(f)$ (που ισχύει γιατί η P_t είναι συνεχής στον L^∞ και $\|P_t f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$) βλέπουμε ότι

$$\varphi(P_t f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(P_t g_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} P_t(\varphi(g_n)) = P_t(\varphi(f)).$$

Παρακάτω θα δούμε άλλη μία απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

Ειδικότερα, θεωρώντας την $\varphi(r) = |r|^p$, $1 \leqslant p < \infty$, βλέπουμε ότι

$$|P_t f|^p \leqslant P_t(|f|^p),$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μ είναι αναλλοίωτο παίρνουμε

$$\int_E |P_t f|^p \, d\mu \leqslant \int_E P_t(|f|^p) \, d\mu = \int_E |f|^p \, d\mu,$$

δηλαδή

$$\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f. Τώρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p$ για κάθε $f \in L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$ και ότι ο τελευταίος χώρος είναι πυκνός στον $L^p(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, συμεραίνουμε ότι η $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ επεκτείνεται σε κάθε $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ειδικότερα, παίρνουμε μια ισχυρότερη μορφή του αναλλοίωτου του μ: ισχύει

$$\int_E P_t f \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

για κάθε $f \in L^1(\mu)$.

Για λόγους πληρότητας αποδεικνύουμε ότι $L^p(\mu) = \overline{L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)}$. Θεωρούμε $f \in L^p(\mu)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n(x) = f(x)$ αν $\frac{1}{n} \leqslant |f(x)| \leqslant n$ και $f_n(x) = 0$ αλλιώς. Τότε, $f_n \in L^\infty(\mu)$ και $|f_n|^p \leqslant |f|^p$ για κάθε n, οπότε

$$\int_E |f_n|\, d\mu \leqslant n^{p-1} \int_E |f_n|^p\, d\mu \leqslant n^{p-1} \int_E |f|^p\, d\mu < \infty,$$

δηλαδή $f_n \in L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$. Αφού $f_n \to f$ κατά σημείο, έχουμε $|f_n - f|^p \to 0$ και $|f_n - f|^p \leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant 2^p |f|^p$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο $L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mu)$.

Συνοψίζοντας, μια ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ στον χώρο μέτρου $(E, \mathcal{F}, \mu)$, όπου το μ είναι σ-πεπερασμένο, είναι μια οικογένεια γραμμικών τελεστών που είναι φραγμένοι στον $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ και ικανοποιούν τις ιδιότητες (i)-(v). Υποθέτουμε επιπλέον ότι το μ είναι αναλλοίωτο. Η τελευταία συνθήκη που απαιτούμε από μια ημιομάδα Markov είναι η ακόλουθη συνθήκη *συνέχειας*:

(vi) Για κάθε $f \in L^2(\mu)$ απαιτούμε να ισχύει $P_t f \to f$ στον $L^2(\mu)$ καθώς $t \to 0$, δηλαδή

$$\lim_{t \to 0} \|P_t f - f\|_2 = 0.$$

Ορισμός 2.1.3. Μια οικογένεια $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ φραγμένων τελεστών που ορίζονται σε έναν χώρο Banach $\mathcal{B}$ και ικανοποιούν τις $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ για κάθε $t, s \geqslant 0$ και $\lim_{t \to 0} P_t f = f$ για κάθε $f \in \mathcal{B}$ (με τη σύγκλιση ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}$) καλείται ημιομάδα γραμμικών τελεστών στο χώρο $\mathcal{B}$. Ωστόσο, αυτό που θα μας απασχολήσει είναι οι ημιομάδες Markov, και ο χώρος Banach $\mathcal{B}$ σε αυτή την περίπτωση θα είναι πάντα ο χώρος Hilbert $L^2(\mu)$.

Ορισμός 2.1.4. Έστω $(P_t)_{t \geqslant 0}$ ημιομάδα Markov στον $(E, \mathcal{F}, \mu)$, όπου το μ είναι σ-πεπερασμένο και αναλλοίωτο. Ο *γεννήτορας* $\mathcal{L}$ της $(P_t)_{t \geqslant 0}$ στον $L^2(\mu)$ ορίζεται από την

$$\mathcal{L} f = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

για όλες τις $f \in L^2(\mu)$ για τις οποίες το όριο αυτό υπάρχει στον $L^2(\mu)$. Η κλάση $D(\mathcal{L})$ όλων αυτών των συναρτήσεων είναι το πεδίο ορισμού του $\mathcal{L}$ και ο $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \to L^2(\mu)$ είναι γραμμικός τελεστής. Αποδεικνύεται ότι ο $D(\mathcal{L})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2(\mu)$. Επίσης, αν $f \in D(\mathcal{L})$ τότε ισχύει

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = P_t \mathcal{L}(f) = \mathcal{L} P_t(f). \tag{2.1.1}$$

Πράγματι,

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_{t+h} f - P_t f}{h} = \lim_{h \to 0^+} P_t \left(\frac{P_h f - f}{h} \right) = P_t \mathcal{L}(f) \tag{2.1.2}$$

και

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_{t+h} f - P_t f}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_h(P_t f) - P_t f}{h} = \mathcal{L} P_t(f). \tag{2.1.3}$$

Όταν $\mathcal{B} = L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$ στον ορισμό, θα μιλάμε για το $L^p(\mu)$-πεδίο ορισμού του $\mathcal{L}$.

Αντίστροφα, ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ και το πεδίο ορισμού $D(\mathcal{L})$ προσδιορίζουν την ημιομάδα, με την έννοια ότι υπάρχει μοναδική ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ στον $L^2(\mu)$ που ικανοποιεί την (2.1.1).

Επίσης, μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση ανάμεσα στο γεννήτορα και την ημιομάδα μέσω της σχέσης $P_t = e^{t\mathcal{L}}$, και αν $D(\mathcal{L}) = L^2(\mu)$ τότε η ισότητα γίνεται σαφής αν αναλύσουμε τον $e^{t\mathcal{L}}$ σαν δυναμοσειρά $e^{t\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathcal{L}^k}{k!}$.

Παρατήρηση 2.1.5. Αν η f ανήκει στο $L^1(\mu)$-πεδίο ορισμού του $\mathcal{L}$ τότε $\int \mathcal{L}(f)\, d\mu = 0$. Πράγματι, αφού το μ είναι αναλλοίωτο, έχουμε

$$\int P_t f\, d\mu = \int f\, d\mu$$

για κάθε $f \in L^1(\mu)$, άρα

$$\int \frac{P_t f - f}{t}\, d\mu = 0$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Όμως η f ανήκει στο $L^1(\mu)$-πεδίο ορισμού του $\mathcal{L}$, και έτσι

$$\mathcal{L} f = \lim_{t\to 0^+} \frac{P_t f - f}{t}$$

στον $L^1(\mu)$, δηλαδή

$$\int \left| \mathcal{L} f - \frac{P_t f - f}{t} \right| d\mu \to 0$$

καθώς το $t \to 0^+$. Συνεπώς,

$$\left| \int \mathcal{L} f\, d\mu \right| = \left| \int \mathcal{L} f\, d\mu - \int \frac{P_t f - f}{t}\, d\mu \right| \leqslant \int \left| \mathcal{L} f - \frac{P_t f - f}{t} \right| d\mu \to 0,$$

καθώς το $t \to 0^+$, το οποίο αποδεικνύει ότι $\int \mathcal{L} f\, d\mu = 0$.

Ορισμός 2.1.6 (συμμετρική ημιομάδα Markov)**.** Μια ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ λέγεται *συμμετρική* (ή αντιστρέψιμη) ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ αν για κάθε $f, g \in L^2(\mu)$ και κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει

$$\int f \cdot P_t g\, d\mu = \int P_t f \cdot g\, d\mu.$$

Θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle_\mu = \int f \cdot g\, d\mu$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση στη μορφή

$$\langle f, P_t g\rangle_\mu = \langle P_t f, g\rangle_\mu.$$

Η αντιστρεψιμότητα είναι λοιπόν ισοδύναμη με το γεγονός ότι κάθε P_t είναι αυτοσυζυγής τελεστής. Επίσης, αφού $P_t = e^{t\mathcal{L}}$, αυτό ισοδυναμεί με το να είναι ο $\mathcal{L}$ αυτοσυζυγής.

Η μέση τιμή της $f \in L^1(\mu)$ ορίζεται από την

$$\mathbb{E}_\mu(f) = \int_E f\, d\mu.$$

Ορισμός 2.1.7 (εργοδική ημιομάδα Markov)**.** Μια ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ λέγεται εργοδική αν το μ είναι πεπερασμένο και

$$\lim_{t\to\infty} \|P_t f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_2 = 0$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$.

2.2 Ο τελεστής carré du champ

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια ενός πολύ βασικού διγραμμικού τελεστή. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ ημιομάδα Markov με γεννήτορα $\mathcal{L}$ και $L^2(\mu)$-πεδίο ορισμού το $D(\mathcal{L})$. Έστω $\mathcal{A}$ διανυσματικός υπόχωρος του $D(\mathcal{L})$ τέτοιος ώστε για κάθε $f, g \in \mathcal{A}$ να ισχύει $f \cdot g \in D(\mathcal{L})$. Η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

Για παράδειγμα, αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μια τέτοια άλγεβρα $\mathcal{A}$ μπορεί να αποτελείται από διαφορίσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο E ή αν το E είναι πολλαπλότητα τότε η $\mathcal{A}$ να αποτελείται από λείες συναρτήσεις.

Ορισμός 2.2.1 (τελεστής carré du champ)**.** Η διγραμμική απεικόνιση

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}(fg) - f\cdot\mathcal{L}g - g\cdot\mathcal{L}f\Big)$$

που ορίζεται στην $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ ονομάζεται *τελεστής carré du champ* του γεννήτορα $\mathcal{L}$.

Ο τελεστής carré du champ θα παίξει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: αν πάρουμε στον $\mathbb{R}^n$ ως γεννήτορα $\mathcal{L} = \Delta$ τη Λαπλασιανή, τότε έχουμε

$$\Gamma(f,g) = \langle \nabla f, \nabla g\rangle,$$

για f, g διαφορίσιμες στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, αν $f = g$ έχουμε

$$\Gamma(f,f) = |\nabla f|^2.$$

Πρόταση 2.2.2. *Έστω Γ ο τελεστής carré du champ που προέρχεται από τον γεννήτορα $\mathcal{L}$ μιας συμμετρικής ημιομάδας Markov. Τότε, $\Gamma(f,f) \geqslant 0$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\Gamma(f,f) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(f^2) - 2f\cdot\mathcal{L}f].$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι αν $f \in \mathcal{A}$ τότε $P_t(f^2) \geqslant (P_tf)^2$ για κάθε $t \geqslant 0$. Άρα,

$$\mathcal{L}(f^2) = \lim_{t\to 0}\frac{P_t(f^2) - f^2}{t} \geqslant \lim_{t\to 0}\frac{(P_tf)^2 - f^2}{t} = \frac{d}{dt}(P_tf)^2\Big|_{t=0}.$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt}(P_tf)^2 = 2P_tf\,\frac{d}{dt}P_tf = 2P_tf\cdot\mathcal{L}P_tf.$$

Έπεται ότι

$$\frac{d}{dt}(P_tf)^2\Big|_{t=0} = 2P_0f\cdot\mathcal{L}P_0f = 2f\cdot\mathcal{L}f.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\mathcal{L}(f^2) \geqslant 2f\cdot\mathcal{L}f$, που είναι ακριβώς ισοδύναμο με την $\Gamma(f,f) \geqslant 0$. □

Στη συνέχεια θέτουμε $\Gamma(f) := \Gamma(f,f)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$. Από τη διγραμμικότητα του Γ και την Πρόταση 2.2.2 παίρνουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 2.2.3. *Για κάθε $f, g \in \mathcal{A}$ ισχύει*

$$\Gamma(f,g)^2 \leqslant \Gamma(f)\Gamma(g).$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $\Gamma(f+tg, f+tg) \geqslant 0$, δηλαδή

$$\Gamma(f) + 2t\Gamma(f,g) + t^2\Gamma(g) \geqslant 0.$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4\Gamma(f,g)^2 - 4\Gamma(f)\Gamma(g)$ πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από 0, δηλαδή $\Gamma(f,g)^2 \leqslant \Gamma(f)\Gamma(g)$. □

Παρατήρηση 2.2.4. Είδαμε ότι αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση και $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ είναι ημιομάδα Markov τότε, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$P_t(\varphi(f)) \geqslant \varphi(P_t f).$$

Για μια άλλη απόδειξη αυτής της ανισότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η φ μπορεί να γραφεί ως το supremum μιας ακολουθίας αφφινικών συναρτήσεων, δηλαδή υπάρχουν $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\varphi(x) = \sup_n (a_n x + b_n).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a_n P_t f + b_n = P_t(a_n f + b_n) \leqslant P_t(\varphi(f)),$$

και παίρνοντας supremum ως προς n βλέπουμε ότι

$$\varphi(P_t f) = \sup_n (a_n P_t f + b_n) \leqslant P_t(\varphi(f)).$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση δείχνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Για κάθε $f \in D(\mathcal{L})$ με την ιδιότητα ότι η $\varphi(f)$ ανήκει επίσης στο $D(\mathcal{L})$, έχουμε*

$$\mathcal{L}(\varphi(f)) \geqslant \varphi'(f)\mathcal{L}f.$$

Απόδειξη. Αφού η φ είναι κυρτή έχουμε $\varphi(P_t f) \leqslant P_t(\varphi(f))$. Άρα,

$$\frac{\varphi(P_t f) - \varphi(f)}{t} \leqslant \frac{P_t(\varphi(f)) - \varphi(f)}{t}$$

για κάθε $t > 0$. Παίρνοντας το όριο καθώς $t \to 0^+$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\varphi(P_t f)\Big|_{t=0} \leqslant \mathcal{L}(\varphi(f)),$$

δηλαδή

$$\varphi'(P_0 f) \cdot \frac{d}{dt}(P_t f)\Big|_{t=0} \leqslant \mathcal{L}(\varphi(f)).$$

Με άλλα λόγια,

$$\varphi'(f)\mathcal{L}P_0 f \leqslant \mathcal{L}(\varphi(f)),$$

που είναι ακριβώς η $\varphi'(f)\mathcal{L}f \leqslant \mathcal{L}(\varphi(f))$. □

Παρατήρηση 2.2.6. Η ανισότητα της Πρότασης 2.2.5 είναι χαρακτηριστική για τους γεννήτορες μιας ημιομάδας Markov. Μάλιστα, αν η $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή, το μ είναι αναλλοίωτο μέτρο, και για $f \geqslant 0$ ορίσουμε

$$\Lambda(t) = \int_E \varphi(P_t f)\, d\mu, \qquad t \geqslant 0$$

τότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$\Lambda'(t) = \frac{d}{dt}\int_E \varphi(P_t f)\, d\mu = \int_E \varphi'(P_t f)\mathcal{L}P_t f\, d\mu \leqslant \int_E \mathcal{L}(\varphi(P_t f))\, d\mu$$

από την Πρόταση 2.2.5. Όμως, αν $\varphi(P_t f) \in D(\mathcal{L})$ έχουμε δείξει ότι

$$\int_E \mathcal{L}(\varphi(P_t f))\, d\mu = 0.$$

Έπεται ότι $\Lambda'(t) \leqslant 0$, άρα η Λ είναι φθίνουσα. Ειδικότερα, $\Lambda(t) \leqslant \Lambda(0)$ για κάθε $t \geqslant 0$, δηλαδή

$$\int_E \varphi(P_t f)\, d\mu \leqslant \int_E \varphi(f)\, d\mu.$$

Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για τη μη αρνητική κυρτή συνάρτηση $\varphi(r) = |r|$, για κάθε $f \geqslant 0$ έχουμε

$$0 \leqslant \int_E |P_t f|\, d\mu \leqslant \int_E |f|\, d\mu = \int_E f\, d\mu = \int_E P_t f\, d\mu,$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f \geqslant 0$ και το αναλλοίωτο του μ. Άρα, $\int_E P_t f\, d\mu \geqslant 0$ και έπεται ότι $P_t f \geqslant 0$ μ-σχεδόν παντού αν $f \geqslant 0$. Με άλλα λόγια, η $\varphi'(f)\mathcal{L}f \leqslant \mathcal{L}(\varphi(f))$ αποτελεί χαρακτηρισμό της ιδιότητας του P_t να διατηρεί την θετικότητα.

Μία ακόμα βασική ιδιότητα που μας ενδιαφέρει είναι αυτή της *διάχυσης*. Ουσιαστικά μας λέει ότι ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ είναι ένας διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης.

Ορισμός 2.2.7. Ένας τελεστής $\mathcal{L}$, ο οποίος είναι γεννήτορας μιας ημιομάδας Markov, λέγεται τελεστής διάχυσης αν

$$\mathcal{L}(\psi(f)) = \psi'(f)\mathcal{L}f + \psi''(f)\Gamma(f)$$

για κάθε C^2-συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $f \in \mathcal{A}$, όπου Γ είναι ο τελεστής carré du champ του $\mathcal{L}$. Μέσω της παραπάνω εξίσωσης βλέπουμε ότι για κάθε $f, g, h \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\Gamma(fg, h) = f\Gamma(g, h) + g\Gamma(f, h).$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι ο Γ είναι διαφορικός τελεστής πρώτης τάξης ως προς κάθε h.

2.3 Τριάδες Markov

Έχουμε δει πότε μια ημιομάδα Markov είναι συμμετρική ως προς το αναλλοίωτο μέτρο μ. Αν $\mathcal{L}$ είναι ο γεννήτορας της ημιομάδας $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ τότε η ιδιότητα αυτή εκφράζεται από τη σχέση

$$\int_E f \cdot \mathcal{L}g\, d\mu = \int_E g \cdot \mathcal{L}f\, d\mu \tag{2.3.1}$$

για κάθε $f, g \in D(\mathcal{L})$. Η σχέση αυτή προκύπτει με παραγώγιση της

$$\int_E f \cdot P_t g \, d\mu = \int_E P_t f \cdot g \, d\mu$$

στο $t = 0$. Έτσι, ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι αυτοσυζυγής. Ωστόσο, είναι μη φραγμένος στον $L^2(\mu)$.

Όταν έχουμε συμμετρικό μέτρο μ, ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ και η ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ περιγράφονται πλήρως από το μέτρο μ και τον τελεστή carré du champ Γ. Πράγματι, για όλες τις συναρτήσεις f, g στην άλγεβρα $\mathcal{A} \subset D(\mathcal{L})$ όπου ορίζεται ο Γ, έχουμε

$$\int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = -\int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu.$$

Αυτό προκύπτει από τον ορισμό του Γ: γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E \Gamma(f, g) \, d\mu &= \frac{1}{2} \int_E (\mathcal{L}(fg) - f \cdot \mathcal{L} g - g \cdot \mathcal{L} f) \, d\mu \\
&= \frac{1}{2} \int_E \mathcal{L}(fg) \, d\mu - \frac{1}{2} \int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu - \frac{1}{2} \int_E g \cdot \mathcal{L} f \, d\mu \\
&= -\frac{1}{2} \int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu - \frac{1}{2} \int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu \\
&= -\int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την $\int_E \mathcal{L}(fg) \, d\mu = 0$ και την (2.3.1). Φυσικά, η υπόθεση ότι το μέτρο μ είναι συμμετρικό χρησιμοποιείται ουσιαστικά στα παραπάνω και είναι απαραίτητη.

Αφού ο Γ είναι διγραμμικός και $\Gamma(f) \geqslant 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E f(-\mathcal{L} f) \, d\mu = \int_E \Gamma(f) \, d\mu \geqslant 0$$

για όλες τις f για τις οποίες η $\mathcal{L} f$ είναι καλά ορισμένη. Συνεπώς, ο $-\mathcal{L}$ είναι θετικός τελεστής.

Ορισμός 2.3.1 (τριάδα Markov)**.** Τριάδα Markov καλούμε μια τριάδα (E, μ, Γ) η οποία αποτελείται από ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{F})$ και έναν τελεστή carré du champ Γ ορισμένο σε μια κλάση $\mathcal{A}$ συναρτήσεων στον E.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το μέτρο Lebesgue $\mu = \lambda$ στον $E = \mathbb{R}^n$ με την Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και τον τελεστή

$$\Gamma(f, g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

στην κλάση $\mathcal{A}$ των λείων συναρτήσεων του $\mathbb{R}^n$.

Έχοντας μια συμμετρική ημιομάδα Markov μπορούμε, μέσω του τελεστή Γ, να ορίσουμε πολύ φυσιολογικά τη μορφή Dirichlet της ημιομάδας.

Ορισμός 2.3.2 (μορφή Dirichlet)**.** Έστω $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ μια συμμετρική ημιομάδα Markov με γεννήτορα $\mathcal{L}$, αναλλοίωτο μέτρο μ και τελεστή carré du champ Γ στην κλάση $\mathcal{A}$. Ο συμμετρικός διγραμμικός τελεστής

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = -\int_E f \cdot \mathcal{L} g \, d\mu,$$

που ορίζεται στην $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, καλείται μορφή Dirichlet της ημιομάδας.

Ο παραπάνω τύπος ισχύει μόνον όταν $f, g \in D(\mathcal{L})$. Σημειώνουμε ότι αν $f \in D(\mathcal{L})$ τότε η

$$\mathcal{E}(f,f) := \mathcal{E}(f) = -\int_E f \cdot \mathcal{L}f \, d\mu$$

παίζει το ρόλο της μέσης τιμής του τετραγώνου της κλίσης της f που εμφανίζεται στην ανισότητα Poincaré.

Η διγραμμική μορφή $\mathcal{E}$ μπορεί στην πραγματικότητα να οριστεί σε μια κλάση συναρτήσεων μεγαλύτερη από την $\mathcal{A}$. Παρατηρούμε αρχικά ότι η

$$\mathcal{E}(f) = -\int_E f \cdot \mathcal{L}f \, d\mu$$

ορίζεται για κάθε $f \in D(\mathcal{L})$. Επίσης, για κάθε $f \in L^2(\mu)$ και $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} -2\mathcal{E}(P_t f) &= 2\int_E P_t f \cdot \mathcal{L}P_t f \, d\mu = 2\int_E P_t f \cdot \frac{d}{dt}(P_t f)\, d\mu \\ &= \frac{d}{dt}\int_E (P_t f)^2 d\mu = \partial_t\left(\int_E (P_t f)^2 d\mu\right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\partial_t := \frac{d}{dt}$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E}(P_t f) &= -\partial_t \int_E P_t f \cdot \mathcal{L}P_t f \, d\mu = -\int_E \partial_t(P_t f) \cdot \mathcal{L}P_t f \, d\mu - \int_E P_t f \cdot \partial_t(\mathcal{L}P_t f)\, d\mu \\ &= -\int_E (\mathcal{L}P_t f)^2 d\mu - \int_E P_t f \cdot \mathcal{L}^2 P_t f \, d\mu = -\int_E (\mathcal{L}P_t f)^2 d\mu - \int_E (\mathcal{L}P_t f)^2 d\mu \\ &= -2\int_E (\mathcal{L}P_t f)^2 d\mu \leqslant 0, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\partial_t(P_t f) = \mathcal{L}P_t f$, $\partial_t(\mathcal{L}P_t f) = \partial_t^2(P_t f) = \mathcal{L}^2 P_t f$ και το γεγονός ότι

$$\int_E P_t f \cdot \mathcal{L}^2 P_t f \, d\mu = \int_E (\mathcal{L}P_t f)(\mathcal{L}P_t f)\, d\mu = \int_E (\mathcal{L}P_t f)^2 d\mu$$

λόγω της συμμετρίας του μ. Ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι $\partial_t \mathcal{E}(P_t f) \leqslant 0$, άρα η $t \mapsto \mathcal{E}(P_t f)$ είναι φθίνουσα.

Θεωρούμε την $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$h(t) = 2\int_0^t \mathcal{E}(P_s f)\, ds.$$

Η h είναι συνεχής και διαφορίσιμη, με $h'(t) = 2\mathcal{E}(P_t f)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\xi \in (0,t)$ ώστε

$$2\mathcal{E}(P_\xi f) = \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{E}(P_s f)\, ds.$$

Αφού $\xi < t$ έχουμε $P_\xi f \leqslant P_t f$, άρα $2\mathcal{E}(P_\xi f) \geqslant 2\mathcal{E}(P_t f)$. Συνεπώς,

$$\int_0^t \mathcal{E}(P_s f)\, ds \geqslant 2t\mathcal{E}(P_t f).$$

Όμως,

$$2\mathcal{E}(P_s f) = -\partial_s \int_E (P_s f)^2 d\mu.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} 2\int_0^t \mathcal{E}(P_s f)\,ds &= -\int_0^t \partial_s \left(\int_E (P_s f)^2 d\mu\right) ds \\ &= -\int_E (P_t f)^2 d\mu + \int_E (P_0 f)^2 d\mu = \int_E f^2 d\mu - \int_E (P_t f)^2 d\mu. \end{aligned}$$

Τελικά, δείξαμε ότι

$$2t \cdot \mathcal{E}(P_t f) \leqslant \int_E f^2 d\mu - \int_E (P_t f)^2 d\mu.$$

Θέτοντας όπου t το $t/2$ παίρνουμε

$$\mathcal{E}(P_{t/2} f) \leqslant \frac{1}{t}\left(\int_E f^2 d\mu - \int_E (P_{t/2} f)^2 d\mu\right),$$

δηλαδή η $t \mapsto \frac{1}{t}\left(\int_e f^2 d\mu - \int_E (P_{t/2} f)^2 d\mu\right)$ είναι φθίνουσα. Όμως, αφού το μ είναι συμμετρικό έχουμε

$$\begin{aligned} \int_E (P_{t/2} f)^2 d\mu &= \int_E P_{t/2} f \cdot P_{t/2} f\, d\mu = \int_E f \cdot P_{t/2}(P_{t/2} f)\, d\mu \\ &= \int_E f \cdot P_{t/2+t/2} f\, d\mu = \int_E f \cdot P_t f\, d\mu. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{t}\left(\int_E f^2 d\mu - \int_E (P_{t/2} f)^2 d\mu\right) = \frac{1}{t}\int_E f(f - P_t f)\, d\mu,$$

και αν $f \in D(\mathcal{L})$ τότε

$$\frac{1}{t}\int_E f(f - P_t f)\, d\mu \xrightarrow{t \to 0} \mathcal{E}(f).$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό της $\mathcal{E}(f)$ σε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων.

Ορίζουμε λοιπόν $D(\mathcal{E})$ να είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f \in L^2(\mu)$ για τις οποίες η ποσότητα $\frac{1}{t}\int_E f(f - P_t f)\, d\mu$ είναι πεπερασμένη και φθίνει στην $\mathcal{E}(f)$ καθώς το $t \to 0$. Έτσι, ορίζουμε τη μορφή Dirichlet σε γενικότερο πλαίσιο.

Ορισμός 2.3.3. Για μια συμμετρική ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ με αναλλοίωτο μέτρο μ, η ενέργεια Dirichlet ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{E}(f) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\int_E f(f - P_t f)\, d\mu,$$

για όλες τις $f \in L^2(\mu)$ για τις οποίες υπάρχει αυτό το όριο. Την κλάση αυτή την συμβολίζουμε με $D(\mathcal{E})$.

Αν $f, g \in D(\mathcal{L})$ τότε

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_E f(-\mathcal{L}g)\, d\mu = \int_E g(-\mathcal{L}f)\, d\mu \qquad \text{και} \qquad \mathcal{E}(f) = -\int_E f\cdot \mathcal{L}f\, d\mu,$$

και δουλεύουμε με αυτή τη μορφή. Επίσης, αν $f, g \in \mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ η κλάση στην οποία ορίζεται ο Γ, τότε

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_E \Gamma(f,g)\, d\mu.$$

Έτσι, έχουμε τους εγκλεισμούς

$$D(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{E}) \subseteq L^2(\mu).$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους ορισμούς τριάδων Markov που έχουν πρόσθετες ιδιότητες.

Ορισμός 2.3.4. Μια τριάδα (E, μ, Γ) αποτελείται από έναν χώρο μέτρου $(E, \mathcal{F}, \mu)$, όπου μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο, έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{A}_0$ φραγμένων (πραγματικών) συναρτήσεων, ο οποίος είναι πυκνός σε κάθε $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, και είναι άλγεβρα με την έννοια ότι αν $f, g \in \mathcal{A}_0$ τότε $f \cdot g \in \mathcal{A}_0$, και τέλος μια συμμετρική διγραμμική απεικόνιση $\Gamma : \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ (τελεστή carré du champ) τέτοια ώστε $\Gamma(f,f) \geqslant 0$ για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$. Η θεμελιώδης ταυτότητα

$$\int_E \Gamma(g, f^2)\, d\mu + 2\int_E g\,\Gamma(f,f)\, d\mu = 2\int_E \Gamma(fg, f)\, d\mu \tag{2.3.2}$$

ισχύει για κάθε $f, g \in \mathcal{A}_0$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{A}_0$ που συγκλίνει σχεδόν παντού στη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$.

Ορισμός 2.3.5 (ιδιότητα διάχυσης)**.** Έστω (E, μ, γ) τριάδα όπως παραπάνω, δηλαδή ο $\Gamma : \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ ορίζεται σε μια άλγεβρα $\mathcal{A}_0$ από C^∞-συναρτήσεις. Λέμε ότι ο τελεστής Γ έχει την ιδιότητα της διάχυσης αν για κάθε $f_1, \ldots, f_k, g \in \mathcal{A}_0$ και κάθε C^∞-συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\Gamma(\psi(f_1,\ldots,f_k), g) = \sum_{i=1}^k \partial_i\psi(f_1,\ldots,f_k)\Gamma(f_i, g).$$

Αν ισχύει η ιδιότητα της διάχυσης τότε βλέπουμε ότι ισχύει η θεμελιώδης ταυτότητα (2.3.2). Το ανάλογο της ιδιότητας διάχυσης στις πολλές μεταβλητές είναι η

$$\mathcal{L}\psi(f_1,\ldots,f_k) = \sum_{i=1}^k \partial_i\psi(f_1,\ldots,f_k)\mathcal{L}f_i + \sum_{i,j=1}^k \partial_{ij}\psi(f_1,\ldots,f_k),$$

όπου $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι C^∞-συνάρτηση με $\psi(0) = 0$, για κάθε $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}_0$.

Έχοντας μια τριάδα (E, μ, Γ) με την ιδιότητα της διάχυσης, μπορούμε να ορίσουμε τον συμμετρικό τελεστή $\mathcal{L}$ στην $\mathcal{A}_0$ ολοκληρώνοντας κατά μέρη ως εξής:

$$\int_E g\cdot \mathcal{L}f\, d\mu = -\int_E \Gamma(f,g)\, d\mu, \qquad f, g \in \mathcal{A}_0,$$

όπως δηλαδή ορίστηκε και για τριάδες Markov.

Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$ υπάρχει σταθερά $C(f)$ τέτοια ώστε, για κάθε $g \in \mathcal{A}_0$,

$$\left| \int_E \Gamma(f,g)\, d\mu \right| \leqslant C(f) \|g\|_2.$$

Τότε, η $g \mapsto \int_E \Gamma(f,g)\, d\mu$ επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή στον $L^2(\mu)$, και έτσι ο τελεστής $\mathcal{L}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Επίσης απαιτούμε για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$ να ισχύει $\mathcal{L}f \in \mathcal{A}_0$. Τότε, από την (2.3.2) παίρνουμε

$$\mathcal{L}(f^2) = 2f \cdot \mathcal{L}f + 2\Gamma(f),$$

και από αυτήν έχουμε

$$\mathcal{L}(fg) = f \cdot \mathcal{L}g + g \cdot \mathcal{L}f + 2\Gamma(f,g)$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{A}_0$. Λόγω συμμετρίας του Γ, ο $\mathcal{L}$ είναι συμμετρικός ως προς το μέτρο μ, δηλαδή

$$\int_E g \cdot \mathcal{L}f\, d\mu = \int_E f \cdot \mathcal{L}g\, d\mu$$

για κάθε $(f,g) \in \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0$. Τέλος, θεωρούμε ότι οι σταθερές συναρτήσεις δεν ανήκουν στην $\mathcal{A}_0$.

Φυσικό επακόλουθο του προηγούμενου ορισμού για μια τριάδα (E, μ, Γ), με τον τελεστή carré du champ ορισμένο στην άλγεβρα $\mathcal{A}_0$, είναι να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού του τελεστή $\mathcal{L}$, ο οποίος ορίζεται στην $\mathcal{A}_0$. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζουμε τη μορφή Dirichlet $\mathcal{E}$ και το πεδίο ορισμού της, $D(\mathcal{E})$, από το οποίο θα προκύψει το πεδίο ορισμού $D(\mathcal{L})$ του γεννήτορα $\mathcal{L}$.

Ορισμός 2.3.6 (τριάδα Markov διάχυσης)**.** Τριάδα Markov διάχυσης είναι μια τριάδα (E, μ, Γ), όπου το μ είναι σ-πεπερασμένο, εφοδιασμένη με μια άλγεβρα $\mathcal{A}_0$ φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων με την ιδιότητα $\overline{\mathcal{A}_0} = L^p(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, και έναν τελεστή carré du champ $\Gamma : \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ με $\Gamma(f,f) \geqslant 0$. Επιπλέον, η τριάδα έχει την ιδιότητα διάχυσης και ο γεννήτορας $\mathcal{L} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ ικανοποιεί την

$$\int_E g\mathcal{L}f\, d\mu = -\int_E \Gamma(f,g)\, d\mu$$

για κάθε $f, g \in \mathcal{A}_0$. Το μέτρο μ είναι επίσης συμμετρικό και αναλλοίωτο ως προς τον $\mathcal{L}$.

Η μορφή Dirichlet εδώ ορίζεται ως εξής: για κάθε $f, g \in \mathcal{A}_0$,

$$\mathcal{E}(f,g) = \int_E \Gamma(f,g)\, d\mu.$$

Το πεδίο ορισμού $D(\mathcal{E})$ της μορφής Dirichlet $\mathcal{E}$ είναι η πλήρωση της $\mathcal{A}_0$ ως προς τη νόρμα

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = \left(\|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f) \right)^{1/2},$$

και λόγω συνέχειας η $\mathcal{E}$ και ο τελεστής Γ επεκτείνονται στο $D(\mathcal{E})$.

Η ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ με γεννήτορα τον $\mathcal{L}$ και $L^2(\mu)$-πεδίο $D(\mathcal{L})$ διατηρεί την θετικότητα, είναι όμως ημι-Markov και όχι Markov, αφού ισχύει μόνον η $P_t(\mathbf{1}) \leqslant \mathbf{1}$.

2.4 Αναπαράσταση με πυρήνες

Ορισμός 2.4.1. Ένας πυρήνας πιθανότητας σε έναν μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{F})$ είναι μια συνάρτηση $p : E \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ τέτοια ώστε:

(i) για καθε $x \in E$ το $p(x, \cdot)$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{F})$.

(ii) για κάθε $A \in \mathcal{F}$ η $x \mapsto p(x, A)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Ο χώρος $(E, \mathcal{F})$ είναι «καλός» μετρήσιμος χώρος με την έννοια ότι αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον χώρο γινόμενο $(E \times E, \mathcal{F} \times \mathcal{F})$ τότε μπορεί να αναλυθεί ως

$$\mu(dx, dy) = \mu_1(dx)p(x, dy),$$

όπου μ_1 είναι μέτρο πιθανότητας στο E (η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη) και ο p είναι πυρήνας πιθανότητας. Για παράδειγμα, αν ο E είναι Πολωνικός χώρος και $\mathcal{F}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα του E τότε ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $(E, \mathcal{F})$ καλός μετρήσιμος χώρος και έστω $\nu : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, \infty)$ μια απεικόνιση τέτοια ώστε για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ οι απεικονίσεις $C \mapsto \nu(A, C)$ και $B \mapsto \nu(C, B)$ να είναι μέτρα. Τότε, υπάρχει μέτρο ν_1 στον χώρο γινόμενο $(E\times E, \mathcal{F}\otimes\mathcal{F})$ τέτοιο ώστε $\nu(A, B) = \nu_1(A\times B)$ για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$.*

Στους (καλούς) χώρους στους οποίους ισχύει η παραπάνω ιδιότητα ανάλυσης του μέτρου, κάθε τελεστής Markov είναι ολοκληρωτικός τελεστής ως προς κάποιον πυρήνα πιθανότητας.

Πρόταση 2.4.3. *Έστω $(E, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, όπου το μ είναι σ-πεπερασμένο και ισχύει η ιδιότητα ανάλυσης. Έστω P γραμμικός τελεστής Markov (δηλαδή ισχύουν οι (iii) και (iv) στον ορισμό της ημιομάδας Markov) ο οποίος είναι και φραγμένος στον $L^1(\mu)$. Τότε, υπάρχει πυρήνας πιθανότητας p στον $(E, \mathcal{F})$ τέτοιος ώστε: για κάθε θετική μετρήσιμη $f \in L^\infty(\mu)$ ισχύει*

$$Pf(x) = \int_E f(y)p(x, dy)$$

μ-σχεδόν παντού στο E.

Απόδειξη. Αρχικά, κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Για κάθε $(A, B) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ ορίζουμε

$$\nu(A, B) = \int_E \mathbf{1}_A \cdot P\mathbf{1}_B \, d\mu.$$

Τότε, τα $\nu(A, \cdot)$ και $\nu(\cdot, B)$ είναι μέτρα. Ελέγχουμε πρώτα ότι είναι πεπερασμένα προσθετικά μέτρα. Πράγματι, αν $(A_n)_{n=1}^m$ είναι πεπερασμένη ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$, τότε

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=1}^m A_n, B\right) &= \int_E \mathbf{1}_{\cup_{n=1}^m A_n} \cdot P\mathbf{1}_B \, d\mu = \int_E \sum_{n=1}^m \mathbf{1}_{A_n} P(\mathbf{1}_B) \, d\mu \\ &= \sum_{n=1}^m \int_E \mathbf{1}_{A_n} P(\mathbf{1}_B) \, d\mu = \sum_{n=1}^m \mu(A_n, B).\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι το $\nu(A,\cdot)$ είναι πεπερασμένα προσθετικό, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας και τη γραμμικότητα του P. Από γνωστή πρόταση της θεωρίας μέτρου, για να δείξουμε ότι τα $\nu(A,\cdot)$ και $\nu(\cdot,B)$ είναι μέτρα, αρκεί τώρα να δείξουμε ότι αν $(A_k)_{k\geqslant 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{F}$ με $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=\emptyset$, τότε $\lim_{k\to\infty}\nu(A_k,B)=0$ (και τον αντίστοιχο ισχυρισμό για το $\nu(A,\cdot)$). Γράφουμε

$$\nu(A_k,B)=\int_E \mathbf{1}_{A_k}P(\mathbf{1}_B)\,d\mu,$$

όπου $P(\mathbf{1}_B)\geqslant 0$ και $\mathbf{1}_{A_k}\to\mathbf{1}_{\cap A_k}=\mathbf{1}_{\emptyset}=0$. Έχουμε λοιπόν $\mathbf{1}_{A_k}P(\mathbf{1}_B)\to 0$ για κάθε $t\geqslant 0$. Αφού $\int_E \mathbf{1}_{A_1}\,d\mu=\mu(A_1)<\infty$, από το δυϊκό θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\nu(A_k,B)=\int_E \mathbf{1}_{A_k}P(\mathbf{1}_B)\,d\mu\to 0.$$

Άρα, το $\nu(\cdot,B)$ είναι μέτρο. Για το $\nu(A,\cdot)$, όμοια θεωρούμε φθίνουσα ακολουθία $(B_k)_{k\geqslant 1}$ στην $\mathcal{F}$ με $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k=\emptyset$. Τότε,

$$0\leqslant \nu(A,B_k)=\int_E \mathbf{1}_A\cdot P(\mathbf{1}_{B_k})\,d\mu\leqslant \int_E P(\mathbf{1}_{B_k})\,d\mu\to 0,$$

διότι ο P είναι φραγμένος τελεστής στον $L^1(\mu)$ και $\|\mathbf{1}_{B_k}\|_{L^1(\mu)}\to 0$. Άρα, το $\nu(A,\cdot)$ είναι μέτρο.

Από το Θεώρημα 2.4.2 υπάρχει μέτρο $\nu_1:E\times E\to[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\nu_1(A\times B)=\int_E \mathbf{1}_A\cdot P(\mathbf{1}_B)\,d\mu.$$

Από την ιδιότητα ανάλυσης του μέτρου έχουμε

$$\nu_1(dx,dy)=p(x,dy)\cdot\nu_2(dx).$$

Όμως,

$$\nu_1(A\times B)=\int_E \mathbf{1}_A\cdot P(\mathbf{1}_B)\,d\mu=\int_E \mathbf{1}_A(x)\left(\int_E \mathbf{1}_B(y)p(x,dy)\right)\nu_2(dx). \tag{2.4.1}$$

Θέτοντας $B=E$ παίρνουμε

$$\nu_2(A)=\int_E \mathbf{1}_A\cdot P(\mathbf{1}_E)\,d\mu\leqslant\int_E \mathbf{1}_A d\mu=\mu(A),$$

δηλαδή το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και $\frac{d\nu_2}{d\mu}=P\mathbf{1}=\mathbf{1}$. Παίρνοντας υπόψη το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f προσεγγίζεται από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, από την (2.4.1) συμπεραίνουμε ότι για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f και κάθε $A\in\mathcal{F}$ ισχύει

$$\int_E \mathbf{1}_A(x)Pf(x)\,\mu(dx)=\int_E \mathbf{1}_a(x)\int_E f(y)p(x,dy)\mu(dx),$$

και αφού το $A\in\mathcal{F}$ είναι τυχόν έπεται ότι

$$Pf(x)=\int_E f(y)p(x,dy).$$

Θεωρούμε τώρα ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(A_n)_{n\geqslant 1}$ στην $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε n. Θεωρούμε το πεπερασμένο μέτρο $\mu_n : \mu|_{A_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το προηγούμενο βήμα της απόδειξης, για κάθε n μπορούμε να βρούμε πυρήνα p_n ώστε, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$P(f \cdot \mathbf{1}_{A_n})(x) = \int_E f \cdot \mathbf{1}_{A_n} p_n(x, dx)$$

μ_n-σχεδόν παντού. Ορίζουμε

$$p(x, B) = \lim_{n\to\infty} p_n(x, B), \qquad B \in \mathcal{F}.$$

Το όριο αυτό υπάρχει διότι η (A_n) είναι αύξουσα και η $P(f \cdot \mathbf{1}_{A_n})$ αυξάνει προς την Pf. Αφού $f \cdot \mathbf{1}_{A_n} \cdot p_n(x, dx) \to f \cdot \mathbf{1}_E \cdot p(x, dx)$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(f \cdot \mathbf{1}_{A_n})(x) = Pf(x) = \int_E f \cdot p(x, dy)$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f. □

Ορισμός 2.4.4. Λέμε ότι μια ημιομάδα Markov $\{P-t\}_{t\geqslant 0}$ στον $(E, \mathcal{F})$ δέχεται πυκνούς πυρήνες ως προς ένα σ-πεπερασμένο μέτρο m στην $\mathcal{F}$ αν για κάθε $t > 0$ υπάρχει θετική μετρήσιμη συνάρτηση $p_t(x, y)$ στον $E \times E$ τέτοια ώστε

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, y) dm(y)$$

m-σχεδόν παντού στο E, για κάθε φραγμένη ή θετική μετρήσιμη $f : E \to \mathbb{R}$. Τότε, ισχύει

$$\int_E p_t(x, y) dm(y) = 1$$

m-σχεδόν παντού στο E.

Συμβολίζουμε με $\|P_t\|_{p,q}$ τη νόρμα του τελεστή P_t από τον $L^p(\mu)$ στον $L^q(\mu)$.

Πρόταση 2.4.5 (ύπαρξη πυκνών πυρήνων). *Έστω $(E, \mathcal{F}, m)$ χώρος μέτρου όπως παραπάνω, με το m σ-πεπερασμένο. Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ τελεστής Markov, $P_t : L^1(m) \to L^\infty(\mu)$, τέτοιος ώστε*

$$\|P_t\|_{1,\infty} \leqslant M < \infty$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $p : E \times E \to [0, \infty]$, πυκνός πυρήνας, με $|p_t(x, y)| \leqslant M$ $m \otimes m$-σχεδόν παντού στο $E \times E$, ο οποίος ικανοποιεί, για κάθε $f \in L^1(m)$ και για κάθε $t \geqslant 0$, την

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x, y) dm(y)$$

m-σχεδόν παντού στο E.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $m(E) = 1$. Έχουμε $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$, όπου οι $\mathcal{F}_n$ είναι πεπερασμένες σ-άλγεβρες και ισχύει $m(A) > 0$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_n$ και κάθε n.

Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε τον τελεστή Markov $\{P_t^n\}_{t\geqslant 0}$ στο χώρο $(E, \mathcal{F}_n, m)$ που ορίζεται από την

$$P_t^n f = \mathbb{E}(P_t f|\mathcal{F}_n)$$

για κάθε $f \in L^1(m)$. Τότε, $\|P_t^n\|_{1,\infty} \leqslant M$, δηλαδή ο P_t^n είναι φραγμένος στον $L^1(m)$.

Τότε, από την προηγούμενη πρόταση, για κάθε n βρίσκουμε πυρήνα $p_t^n(x,y)$ που είναι $\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{F}_n$ μετρήσιμος, με $\|p_t^n\|_\infty \leqslant M$, και ικανοποιεί την

$$P_t^n f(x) = \int f(y) p_t^n(x,y) dm(y)$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}_n$ και x. Δηλαδή, ο p_t^n είναι πυρήνας του τελεστή $\mathbb{E}(P_t(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n))\,|\,\mathcal{F}_n)$. Αφού το $P_t^n f$ είναι φραγμένο martingale, στέλνοντας το $n \to \infty$ αυτό συγκλίνει στο $P_t f$ m-σχεδόν παντού.

Σταθεροποιούμε το x. Τοτε το $p_t^n(x,\cdot)$ είναι φραγμένο martingale αφού για κάθε $A, B \in \mathcal{F}_n$ ισχύει

$$\int_{A\times B} p_t^{n+1} d(m\otimes m) = \int \mathbf{1}_A (P_t^{n+1}\mathbf{1}_B) dm = \int \mathbf{1}_A (P_t^n \mathbf{1}_B) dm = \int_{A\times B} p_n d(m\otimes m)$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Έτσι, $p_t^n \to p_t$ $m\otimes m$-σχεδόν παντού στο $E \times E$. Αφού $\|p_t\|_\infty \leqslant M$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int f(y) p_t^n(x,y) dm(y) \to \int f(y) p_t(x,y) dm(y) = P_t f$$

για κάθε $f \in L^\infty(m)$. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} P_t^n f = P_t f$$

για κάθε $t \geqslant 0$.

Αν το m είναι σ-πεπερασμένο, η απόδειξη είναι σχεδόν όμοια. Γράφουμε $E = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ με$m(A_n) < \infty$, ορίζουμε $m_n = m|_{A_n}$ και γι' αυτά ικανοποιούνται τα προηγούμενα. $\square$

Παρατήρηση 2.4.6. Αν $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ είναι μια ημιομάδα Markov στον $L^2(\mu)$, τότε η ιδιότητα $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ μεταφράζεται στην αναπαράσταση με πυρήνες ως εξής: για κάθε $t, s \geqslant 0$ και $x \in E$ ισχύει

$$p_{t+s}(x, dy) = \int_{z\in E} p_t(z, dy) p_s(x, dz).$$

Αυτή είναι η εξίσωση Chapman-Kolmogorov. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι

$$p_{2t}(x,y)^2 \leqslant p_{2t}(x,x) p_{2t}(y,y).$$

2.4.1 Η ημιομάδα της θερμότητας

Ο τελεστής Laplace Δ, με το μέτρο Lebesgue λ_n στον $\mathbb{R}^n$, ορίζει μια ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ με πυκνούς πυρήνες

$$p_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4t}, \qquad t > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Δηλαδή, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) p_t(x,y)\, dy, \qquad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Η $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ είναι συμμετρική ημιομάδα Markov στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Όταν ο τελεστής Δ δρά στο x ή το y, οι πυρήνες αυτοί επιλύουν την εξίσωση της θερμότητας

$$\partial_t p_t = \Delta p_t.$$

Επιπλέον, μπορούμε να εκφράσουμε την ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ με όρους θεωρίας πιθανοτήτων, ως εξής:

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(x + \sqrt{2t}G)), \qquad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

όπου G είναι κανονικό διάνυσμα τυ Gauss στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/2}$.

2.4.2 Ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck

Έστω γ_n το μέτρο του Gauss στον $\mathbb{R}^n$. Η ημιομάδα Ornstein–Uhlenbeck ορίζεται στον $L^p(\gamma_n)$ ως εξής. Για κάθε $f \in L^p(\gamma_n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ορίζουμε

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\, d\gamma_n(y).$$

Η $P_t f$ είναι καλά ορισμένη: παρατηρούμε πρώτα ότι το γ_n είναι η εικόνα του $\gamma_n \otimes \gamma_n$ μέσω της

$$(x,y) \mapsto e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y.$$

Συνεπώς, αν $f \in L^1(\gamma_n)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z) d\gamma_n(z) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y)\, d\gamma_n(y) d\gamma_n(x).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι: αφού

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right)\right|^p d\gamma_n(x) \right) d\gamma_n(y),$$

η συνάρτηση $P_t f$ ανήκει στον $L^p(\gamma_n)$ και, από την ανισότητα του Hölder,

$$\|P_t f\|_{L^p(\gamma_n)} \leqslant \|f\|_{L^p(\gamma_n)}.$$

Δουλεύουμε στον χώρο $W^{2,1}(\gamma_n)$, ο οποίος είναι η πλήρωση του $C_0(\mathbb{R}^n)$ ως προς τη νόρμα Sobolev

$$\|f\|_{2,1} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\gamma_n(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 d\gamma_n(x) \right)^{1/2}.$$

Βασικές ιδιότητες, οι οποίες ελέγχονται άμεσα από τον ορισμό, είναι οι εξής:

(i) Για κάθε f,

$$P_0 f = f, \qquad P_{t+s} f = P_t(P_s f), \qquad P_\infty f = \lim_{t\to\infty} P_t f \equiv \int f\, d\gamma_n.$$

(ii) Για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t f \, d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\gamma_n.$$

(iii) Για κάθε $t \geqslant 0$,

$$[\, P_t(fg)\,]^2 \leqslant P_t(f^2) \cdot P_t(g^2).$$

(iv) Αν $f \leqslant g$ τότε $P_t f \leqslant P_t g$.

(v) Για κάθε f, g και $a, b \in \mathbb{R}$, $P_t(af + bg) = aP_t(f) + bP_t(g)$. Επίσης, $P_t(\mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$.

(vi) Αν ορίσουμε $P_t(g_1, \ldots, g_n) = (P_t(g_1), \ldots, P_t(g_n))$ τότε

$$\nabla P_t(f) = e^{-t} P_t(\nabla f).$$

Ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ της ημιομάδας ορίζεται στον $W^{2,2}(\gamma_n)$ από την

$$(\mathcal{L}f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t}$$

και ικανοποιεί τις

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = \mathcal{L} P_t f = P_t \mathcal{L} f$$

και

$$(\mathcal{L}f)(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle.$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_t f) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y) \, d\gamma_n(y) \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y), e^{-t}x \rangle \, d\gamma_n(y) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} y \right\rangle d\gamma_n(y), \end{aligned}$$

και παίρνουμε $t \to 0^+$. Ο πρώτος όρος τείνει στο

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), x \rangle \, d\gamma_n(y) = - \langle \nabla f(x), x \rangle,$$

ενώ ο δεύτερος γράφεται στη μορφή

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla g_t(y), \nabla h(y) \rangle \, dy,$$

όπου

$$h(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|y\|_2^2/2} \quad \text{και} \quad g_t(y) = f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y),$$

άρα ισούται με

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta g_t(y) \, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\|y\|_2^2/2} \, dy \to \int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) \, d\gamma_n(y) = \Delta f(x)$$

καθώς το $t \to 0^+$. Έπεται ότι

$$(\mathcal{L}f)(x) = \lim_{t\to 0}\big(\mathcal{L}(P_t f)\big)(x) = \Delta f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle.$$

Μια άλλη ιδιότητα του $\mathcal{L}$, η οποία προκύπτει από την προηγούμενη με εφαρμογή του τύπου του Green, είναι η εξής: για κάθε $f \in W^{2,2}(\gamma_n)$ και $g \in W^{2,1}(\gamma_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}f \cdot g\, d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g\rangle\, d\gamma_n.$$

2.5 Πλήρεις τριάδες Markov

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από έναν χώρο E με ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ και τον συνήθη τελεστή carré du champ Γ που δρά σε μια άλγεβρα συναρτήσεων $\mathcal{A}_0$, θα ορίσουμε την πλήρη τριάδα Markov (E, μ, Γ) η οποία είναι η βασική και τελική κατασκευή μας. Αυτή η τριάδα είναι το πλαίσιο στο οποίο θα δουλέψουμε στη συνέχεια. Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathcal{A}_0$ δεν περιέχει σταθερές συναρτήσεις.

Ορισμός 2.5.1. Μια τριάδα (E, μ, Γ) αποτελείται από έναν καλό μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{F})$ με ένα σ-πεπερασμένο μέτρο μ, έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{A}_0$ φραγμένων συναρτήσεων ο οποίος είναι πυκνός σε κάθε $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, και είναι άλγεβρα (με την έννοια ότι αν $f, g \in \mathcal{A}_0$ τότε $fg \in \mathcal{A}_0$) και έναν συμμετρικό διγραμμικό τελεστή carré du champ $\Gamma : \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$.

Είχαμε επίσης δεί την ιδιότητα της διάχυσης. Ο Γ έχει την ιδιότητα της διάχυσης αν για κάθε $f_1, \ldots, f_k, g \in \mathcal{A}_0$ και κάθε C^∞-συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με $\psi(0) = 0$ ισχύει

$$\Gamma(\psi(f_1, \ldots, f_k), g) = \sum_{i=1}^{k} \partial_i \psi(f_1, \ldots, f_k)\Gamma(f_i, g). \tag{2.5.1}$$

Μέσω του Γ μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $\mathcal{L}$, ο οποίος είναι γεννήτορας της ημιομάδας Markov, ως εξής:

$$\int_E g\mathcal{L}f\, d\mu = -\int_E \Gamma(f, g)\, d\mu \quad \text{και} \quad \mathcal{E}(f, g) = \int_E \Gamma(f, g)\, d\mu.$$

Απαιτούμε να ισχύει

$$\int_E \mathcal{L}f\, d\mu = 0$$

για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$, λόγω του αναλλοίωτου του μέτρου μ. Έχουμε $\mathcal{A}_0 \subseteq D(\mathcal{L}) \subseteq D(\mathcal{E})$ και αποδεικνύεται ότι $\overline{\mathcal{A}_0} = D(\mathcal{E})$. Επίσης, το $D(\mathcal{E})$ ίναι η πλήρωση του $\mathcal{A}_0$ ως προς τη νόρμα

$$\|f\| = \big(\|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f)\big)^{1/2}$$

και έτσι αποδεικνύεται πως ό,τι έχουμε δεί μέχρι τώρα ισχύει και για την $\mathcal{A}_0$.

Ορισμός 2.5.2. Τριάδα Markov διάχυσης είναι μια τριάδα (E, μ, Γ) που έχει την ιδιότητα διάχυσης.

Το ανάλογο της ιδιότητας αυτής στις πολλές μεταβλητές είναι ο εξής τύπος αλλαγής μεταβλητής. Για κάθε C^2 συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}_0$ ισχύει

$$\mathcal{L}\psi(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(f_1, \ldots, f_n)\mathcal{L}f_i + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(f_1, \ldots, f_n)\Gamma(f_i, f_j). \tag{2.5.2}$$

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η περίπτωση $n = 1$ για $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου τότε η (2.5.2) γίνεται

$$\mathcal{L}\psi(f) = \psi'(f)\mathcal{L}f + \psi''(f)\Gamma(f)$$

και

$$\Gamma(\psi(f), g) = \psi'(f)\Gamma(f, g), \Gamma(\psi(f)) = (\psi'(f))^2\Gamma(f).$$

Ορισμός 2.5.3. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ μιας τριάδας Markov διάχυσης (E, μ, Γ) καλείται εργοδικός αν για κάθε $f \in D(\mathcal{L})$ με $\mathcal{L}f = 0$ ισχύει ότι η f είναι σταθερή. Ισοδύναμα, αν για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\Gamma(f) = 0$ ισχύει ότι η f είναι σταθερή.

Ορίζουμε τώρα την άλγεβρα $\mathcal{A}$ με την οποία θα δουλέψουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 2.5.4. Η $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα μετρήσιμων συναρτήσεων στον E με $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$. Η $\mathcal{A}$ περιέχει επιπλέον τις σταθερές συναρτήσεις και ικανοποιεί τα εξής·

(i) Αν $f \in \mathcal{A}$ και $h \in \mathcal{A}_0$ τότε $f \cdot h \in \mathcal{A}_0$.

(ii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την $\int_E hf \, d\mu \geqslant 0$ για κάθε θετική $h \in \mathcal{A}_0$, έχουμε $f \geqslant 0$.

(iii) Αν $f \in \mathcal{A}$ και $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι C^∞-συνάρτηση, τότε $\psi \circ f \in \mathcal{A}$.

(iv) Ο $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι επέκταση του $\mathcal{L} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ και η

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(fg(-f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f] \in \mathcal{A}, \qquad f, g \in \mathcal{A}$$

είναι επέκταση του Γ.

(v) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ ισχύει $\Gamma(f) \geqslant 0$.

(vi) Ισχύουν η ιδιότητα διάχυσης και ο τύπος αλλαγής μεταβλητής (2.5.2).

(vii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ και $g \in \mathcal{A}_0$ ισχύει ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = -\int_E g\mathcal{L}f \, d\mu = -\int_E f\mathcal{L}g \, d\mu.$$

(viii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$ και $t \geqslant 0$ ισχύει $P_t f \in \mathcal{A}$.

Άρα, όσα έχουμε δείξει ως τώρα εξακολουθούν να ισχύουν για την κλάση συναρτήσεων $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.5.5. Όταν το μ είναι πεπερασμένο και οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στο $D(\mathcal{L})$ τότε η $\mathcal{A}_0$ μπορεί να αντικατασταθεί από τη μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων $\mathcal{A}_0' = \{f + c : f \in \mathcal{A}_0, c \in \mathbb{R}\}$ και επεκτείνουμε τους Γ και $\mathcal{L}$ ορίζοντας

$$\Gamma(f, \mathbf{1}) = 0 \qquad \text{και} \qquad \mathcal{L}(\mathbf{1}) = 0.$$

Επίσης ορίζουμε $\mathcal{A}_0^{\prime,+} = \{f + c : f \in \mathcal{A}_0, f \geqslant 0, c > 0\}$.

Ορισμός 2.5.6. Έστω $f \in L^2(\mu)$ και $\mathcal{L}$ γεννήτορας μιας ημιομάδας Markov με συζυγή $\mathcal{L}^*$. Η f ανήκει στο $D(\mathcal{L}^*)$ αν υπάρχει $C(f) < \infty$ τέτοια ώστε

$$\left| \int_E f \mathcal{L} g \, d\mu \right| \leqslant C(f) \, \|g\|_2$$

για κάθε $g \in \mathcal{A}_0$. Τότε, η $\mathcal{L}^* f$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $L^2(\mu)$ με την ιδιότητα

$$\int_E f \mathcal{L} g \, d\mu = \int_E g \mathcal{L}^* f \, d\mu.$$

Ορισμός 2.5.7. Ο τελεστής $\mathcal{L}$ καλείται ουσιωδώς αυτοσυζυγής αν $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^*)$.

Ορισμός 2.5.8. Μια τριάδα Markov διάχυσης (E, μ, Γ) καλείται συνεκτική αν για κάθε $f \in \mathcal{A}$ με $\Gamma(f) = 0$ ισχύει ότι η f είναι σταθερή.

Ορισμός 2.5.9. Μια κανονική τριάδα Markov (E, μ, Γ) είναι μια τριάδα Markov διάχυσης με άλγεβρα την $\mathcal{A}_0$ που είναι επιπλέον εργοδική και ικανοποιεί την $P_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ για κάθε $t \geqslant 0$ και κάθε ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$.

Δίνουμε τώρα τον ορισμό πάνω στον οποίο θα δουλέψουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 2.5.10 (πλήρης τριάδα Markov)**.** Μια πλήρης τριάδα Markov είναι μια κανονική τριάδα Markov στην οποία έχει οριστεί μια επεκτεταμένη άλγεβρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$ (χωρίς περιορισμούς για την ολοκληρωσιμότητα των στοιχείων της $\mathcal{A}$) που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Αν $f \in \mathcal{A}$ και $h \in \mathcal{A}_0$ τότε $f \cdot h \in \mathcal{A}_0$.

(ii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ που ικανοποιεί την $\int_E hf \, d\mu \geqslant 0$ για κάθε θετική $h \in \mathcal{A}_0$, έχουμε $f \geqslant 0$.

(iii) Αν $f \in \mathcal{A}$ και $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι C^∞-συνάρτηση, τότε $\psi \circ f \in \mathcal{A}$.

(iv) Ο τελεστής $\mathcal{L} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι επέκταση του $\mathcal{L} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ και ο τελεστής carré du champ ορίζεται στον $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ με τη γνωστή ταυτότητα

$$\Gamma(f, g) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(fg(-f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f].$$

(v) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ ισχύει $\Gamma(f) = \Gamma(f, f) \geqslant 0$.

(vi) Οι τελεστές Γ και $\mathcal{L}$ ικανοποιούν τους τύπους αλλαγής μεταβλητής (2.5.1) και (2.5.2).

(vii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ και $g \in \mathcal{A}_0$ ισχύει ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_E \Gamma(f, g) \, d\mu = -\int_E g \mathcal{L} f \, d\mu = -\int_E f \mathcal{L} g \, d\mu.$$

(viii) Για κάθε $f \in \mathcal{A}_0$ και $t \geqslant 0$ ισχύει $P_t f \in \mathcal{A}$.

(ix) Η τριάδα Markov είναι συνεκτική: αν $f \in \mathcal{A}$ και $\Gamma(f) = 0$ τότε η f είναι σταθερή.

(x) Ο $\mathcal{L}$ είναι ουσιωδώς αυτοσυζυγής.

2.6 Συνθήκη Καμπυλότητας-Διάστασης

Θα εισάγουμε τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης μέσω ενός νέου διγραμμικού τελεστή Γ_2. Η συνθήκη αυτή έχει κεντρικό ρόλο στη μελέτη των συναρτησιακών ανισοτήτων που σχετίζονται με ημιομάδες και τελεστές Markov.

Έστω $\{P_t\}_{t\geq 0}$ συμμετρική ημιομάδα Markov με αναλλοίωτο κι αντιστρέψιμο μέτρο μ και γεννήτορα $\mathcal{L}$. Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής carré du champ Γ, ο οποίος ορίζεται στην άλγεβρα $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$, όπου $\mathcal{A}$ η άλγεβρα των συναρτήσεων στο $L^2(\mu)$-πεδίο ορισμού $D(\mathcal{L})$ του $\mathcal{L}$, δίνεται από τον τύπο

$$\Gamma(f,g) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(f\cdot g) - f\cdot \mathcal{L}g - g\cdot\mathcal{L}f].$$

Για να ορίζουμε τον Γ_2 η «ιδέα» είναι να επαναλάβουμε τον ορισμό αυτόν αντικαθιστώντας με Γ όπου έχουμε πράξη πολλαπλασιασμού μεταξύ συναρτήσεων. Έτσι προκύπτει ο νέος διγραμμικός τελεστής που περιγράφεται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.6.1. *Για $f,g\in\mathcal{A}$ ορίζουμε*

$$\Gamma_2(f,g) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\mathcal{L}g) - \Gamma(\mathcal{L}f,g)]$$

και συμφωνούμε να γράφουμε $\Gamma_2(f,f)=\Gamma_2(f)=\frac{1}{2}\mathcal{L}\Gamma(f)-\Gamma(f,\mathcal{L}f)$.

Λόγω συμμετρίας του $\mathcal{L}$ ως προς το μέτρο μ και καθώς οι $f,\mathcal{L}f,g,\mathcal{L}g$ και $\Gamma(f,g)$ ανήκουν στο $L^2(\mu)$-πεδίο ορισμού του $\mathcal{L}$, και η $\Gamma(f,g)$ στο $L^1(\mu)$-πεδίο ορισμού, η ολοκλήρωση κατά μέρη για τον Γ_2 δίνει

$$\begin{aligned}\int_E \Gamma_2(f,g)\,d\mu &= \frac{1}{2}\int_E \mathcal{L}\Gamma(f,g)\,d\mu - \frac{1}{2}\int_E \Gamma(f,\mathcal{L}g)\,d\mu - \frac{1}{2}\int_E\Gamma(g,\mathcal{L}f)\,d\mu\\ &= \frac{1}{2}\int_E \mathcal{L}f\mathcal{L}g\,d\mu + \frac{1}{2}\int_E\mathcal{L}f\mathcal{L}g\,d\mu = \int_E \mathcal{L}f\mathcal{L}g\,d\mu,\end{aligned}$$

δηλαδή ισχύει

$$\int_E \Gamma_2(f,g)\,d\mu = \int_E (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)\,d\mu.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης για τον Γ οδηγούμαστε σε έναν τύπο αλλαγής μεταβλητής για τον Γ_2. Πράγματι, αν η $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, από την

$$\mathcal{L}\psi(f) = \psi'(f)\mathcal{L}f + \psi''(f)\Gamma(f)$$

και

$$\Gamma(\psi(f),g) = \psi'(f)\Gamma(f,g)$$

παίρνουμε

$$\Gamma_2(\psi(f)) = (\psi'(f))^2\Gamma_2(f) + \psi'(f)\psi''(f)\Gamma\left(f,\Gamma(f)\right) + (\psi''(f))^2\Gamma(f)^2. \tag{2.6.1}$$

Σε αντίθεση με τον τελεστή Γ, ο νέος τελεστής Γ_2 δεν είναι πάντοτε θετικός. Για παράδειγμα, για τη Λαπλασιανή Δ_g σε μια πολλαπλότητα Riemann (M,g), ο τελεστής Γ_2 είναι θετικός αν και μόνον αν η καμπυλότητα Ricci Ric_g είναι θετική.

Κίνητρο για να οριστεί η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης αποτέλεσαν οι ελλειπτικοί τελεστές $\mathcal{L}$, καθώς υπάρχει πάντοτε μία συνάρτηση $\rho(x)$ τέτοια ώστε για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f να ισχύει $\Gamma_2(f) \geq \rho(x)\Gamma(f)$ για κάθε x. Πολλές συναρτησιακές ανισότητες μπορούν να θεωρηθούν ως συνέπεια μια ανισότητας της μορφής $\Gamma_2(f) \geq \rho \cdot \Gamma(f)$, η οποία θα λέμε ότι αποτελεί συνθήκη καμπυλότητας $CD(\rho, \infty)$. Δίνουμε λοιπόν τον εξής γενικότερο ορισμό.

Ορισμός 2.6.2 (συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης)**.** *Έστω $\mathcal{L}$ τελεστής διάχυσης. Λέμε ότι ο $\mathcal{L}$ ικανοποιεί τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ για $\rho \in \mathbb{R}$ και $n \in [1, \infty]$, αν για κάθε συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ στην κλάση συναρτήσεων $\mathcal{A}$ ισχύει*

$$\Gamma_2(f) \geq \rho \cdot \Gamma(f) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

μ-σχεδόν παντού.

Παράδειγμα 2.6.3 (ημιομάδα θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$)**.** *Έχουμε δει ότι η ημιομάδα της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$ αποτελεί ημιομάδα Markov διάχυσης με γεννήτορα $\mathcal{L} = \Delta$ τη Λαπλασιανή, ορισμένη στις δύο φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ από την*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

με αναλλοίωτο και αντιστρέψιμο το μέτρο Lebesgue dx στον $\mathbb{R}^n$. Ο τελεστής carré du champ δίνεται από την

$$\Gamma(f, g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f \partial_i g,$$

άρα $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$. Ο τελεστής Γ_2 της Λαπλασιανής Δ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται στις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ από την

$$\Gamma_2(f, g) = \frac{1}{2}[\Delta(\langle \nabla f, \nabla g \rangle) - \langle \nabla f, \nabla \Delta g \rangle - \langle \nabla g, \nabla \Delta f \rangle] = \langle \nabla\nabla f, \nabla\nabla g \rangle,$$

όπου με $\nabla\nabla f = (\partial_{i,j} f)_{1 \leqslant ij \leqslant n}$ συμβολίζουμε τον Εσσιανό πίνακα της f. Ειδικότερα,

$$\Gamma_2(f) = |\nabla\nabla f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij}^2 f)^2.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση f έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{ij} f)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 f \right)^2 = \frac{1}{n}(\Delta f)^2 = \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2.$$

Άρα,

$$\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2.$$

Συνεπώς, ο τελεστής Laplace Δ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, n)$ και αυτές είναι οι βέλτιστες τιμές για τις οποίες ισχύει η συνθήκη.

Παράδειγμα 2.6.4 (ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck)**.** *Ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck στο χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$, όπου $\mathcal{L}f = \Delta f - \langle x, \nabla f\rangle$ για κάθε f στον $\mathbb{R}^n$, ικανοποιεί τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(1, \infty)$. Πράγματι, έχουμε $\Gamma(f,g) = \langle \nabla f, \nabla g\rangle$, άρα*

$$\begin{aligned} 2\Gamma_2(f,g) &= 2\langle \nabla\nabla f, \nabla\nabla g\rangle - \langle x, \nabla\langle \nabla f, \nabla g\rangle\rangle \\ &\quad + \langle \nabla f, \nabla\langle x, \nabla g\rangle\rangle + \langle \nabla g, \nabla\langle x, \nabla f\rangle\rangle \\ &= 2\langle \nabla\nabla f, \nabla\nabla g\rangle + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle. \end{aligned}$$

Ειδικότερα,

$$\Gamma_2(f) = |\nabla\nabla f|^2 + |\nabla f|^2 \geq |\nabla f|^2 = \Gamma(f).$$

Επομένως, ικανοποιείται η συνθήκη $CD(1, \infty)$.

2.7 Αντιστρέψιμα μέτρα διαφορικών τελεστών-Τελεστής Laplace-Beltrami

Στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων πάνω σε μια πολλαπλότητα, ο τελεστής

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{w}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(w g^{ij}\partial_j f)$$

όπου w λεία και αυστηρά θετική συνάρτηση, είναι συμμετρικός τελεστής στον $L^2(\mu)$, όπου $d\mu = wdx$ είναι το μέτρο με πυκνότητα w ως προς το μέτρο Lebesgue dx. Όταν ο $\mathcal{L}$ είναι ο γνωστός γεννήτορας μιας ημιομάδας Markov, γράφεται

$$\mathcal{L}f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial^2_{ij} f + \sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i f$$

όπου $g = g(x) = (g^{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $n\times n$-συμμετρικός πίνακας στον $\mathbb{R}^n$ και $b = b(x) = (b^i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, για f, g λείες συναρτήσεις, ο τελεστής carré du champ σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται

$$\Gamma(f,g) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i f\partial_j g,$$

και τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\mathcal{L}g\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\partial_i f\partial_j g\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(f,g)\, d\mu.$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε το μέτρο Lebesgue για να υπολογίσουμε πυκνότητες, σε γενικές περιπτώσεις είναι προτιμότερο το μέτρο Riemann μ_g με πυκνότητα $w_g = det(g)^{-1/2}$ ως προς το μέτρο Lebesgue dx. Στην περίπτωση αυτή, εισάγουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami ο οποίος έχει το μ_g ως αντιστρέψιμο μέτρο και σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται

$$\Delta_g = \frac{1}{w_g}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(w_g g^{ij}\partial_j)$$

Τότε, $\mathcal{L} = \Delta_g + Z$ όπου το Z είναι διανυσματικό πεδίο. Ο τελεστής Δ_g καλείται τελεστής Laplace-Beltrami (ή Λαπλασιανή) ως προς τη μετρική Riemann $g = g(x)$ η οποία λέγεται co-metric και ισούται με τον αντίστροφο του πίνακα $G(x) = \big(g^{ij}(x)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ Ο $\mathcal{L} = \Delta_g + Z$ παραμένει αναλλίωτος κάτω από αλλαγές συντεταγμένων και είναι συμμετρικός ως προς το μέτρο $d\mu = w d\mu_g$ αν $Zf = \Gamma(\log w, f)$, δηλαδή

$$Zf = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \log w}{\partial x_j}.$$

Ο τελεστής $f \mapsto \Gamma(\log w, f)$ συχνά ταυτίζεται με $\langle \nabla \log w, \nabla f \rangle$ και στην περίπτωση αυτή ο Z καλείται διανυσματικό πεδίο κλίσης. Το αναλλοίωτο μέτρο γράφεται $d\mu = e^{-W} d\mu_g$ με $w = e^{-W}$ (και τότε $Z = -\nabla W$) και μ_g το μέτρο Riemann. Τότε, η αναπαράσταση σε τοπικές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L} = \Delta_g - \Gamma(W, \cdot) = \Delta_g - \langle \nabla W, \nabla \rangle.$$

Όταν έχουμε έναν τελεστή $\mathcal{L} = \Delta_g - \langle \nabla W, \nabla \rangle$ συμμετρικό ως προς το $d\mu = e^{-W} d\mu_g$ στην πολλαπλότητα Riemann (M, g) με μέτρο μ_g, η M καλείται πολλαπλότητα Riemann με βάρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανισότητες Sobolev

3.1 Κλασικές ανισότητες Sobolev

Το θεμελιώδες παράδειγμα ανισότητας Sobolev είναι στο πλαίσιο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue dx και τον συνήθη carré du champ τελεστή $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$. Η ανισότητα Sobolev ισχυρίζεται ότι για κάθε ομαλή συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, με συμπαγή φορέα,

$$\|f\|_p^2 \leqslant C_n \| \, |\nabla f| \, \|_2^2 = C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, dx, \tag{3.1.1}$$

όπου $p = \frac{2n}{n-2}$ και $C_n > 0$ είναι μια σταθερά της οποίας η βέλτιστη τιμή είναι γνωστή (και θα την υπολογίσουμε ακριβώς στη συνέχεια). Οι νόρμες είναι ως προς το μέτρο Lebesgue. Για απλότητα στο συμβολισμό θα γράφουμε $\|\nabla f\|_2$ αντί για $\| \, |\nabla f| \, \|_2$.

Ο εκθέτης p έχει την τιμή $\frac{2n}{n-2}$ όταν $n > 2$ και υπάρχει λόγος γι' αυτό. Μόνο γι' αυτή την τιμή του p η ανισότητα Sobolev (3.1.1) είναι αναλλοίωτη ως προς διαστολές, δηλαδή εξακολουθεί να ισχύει αν αλλάξουμε την $f(x)$ σε $f_s(x) = f(sx)$ για $s > 0$. Πράγματι, έχουμε $\|f_s\|_p = s^{-n/p}\|f\|_p$ ενώ $\|\nabla f_s\|_2^2 = s^{2-n}\|\nabla f\|_2^2$, άρα πρέπει να έχουμε $\frac{2n}{p} = n - 2$ αφού κάθε άλλη τιμή του p θα οδηγούσε σε άτοπο όταν $s \to 0$ ή $s \to \infty$. Μάλιστα, οι διαστολές παίζουν γενικότερα κεντρικό ρόλο στην ανάλυση των ανισοτήτων Sobolev στον Ευκλείδειο χώρο όπως θα δούμε σε πολλά σημεία στη συνέχεια.

Στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^n$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, με το κανονικοποιημένο ομοιόμορφο μέτρο μ και τον σφαιρικό carré du champ τελεστή Γ, ισχύει πάλι μια ανισότητα Sobolev η οποία έχει κάπως διαφορετική μορφή, αλλά τον ίδιο εκθέτη $p = \frac{2n}{n-2}$. Για κάθε ομαλή συνάρτηση f στην $\mathbb{S}^n$, που ανήκει στο πεδίο Dirichlet,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{4}{n(n-2)} \int_{\mathbb{S}^n} \Gamma(f) \, d\mu. \tag{3.1.2}$$

Οι νόρμες εδώ είναι οι νόρμες στον $L^r(\mu)$, $r \geqslant 1$. Σε αυτή τη μορφή, η ανισότητα Sobolev είναι πιο κοντά στην λογαριθμική ανισότητα Sobolev και την ανισότητα Poincaré, και μπορεί να γενικευτεί για ευρείες οικογένειες τριάδων Markov. Δεδομένου οτι εδώ δεν έχουμε διαστολές, η τιμή $p = \frac{2n}{n-2}$ δεν εξηγείται τόσο άμεσα όσο στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου. Λόγω μονοτονίας μπορούμε να θεωρήσουμε κι άλλες τιμές $2 \leqslant p \leqslant \frac{2n}{n-2}$ του p, οι οποίες όμως δεν μπορούν να ξεπεράσουν την κρίσιμη τιμή $\frac{2n}{n-2}$. Σημειώνουμε επίσης ότι η (3.1.2) είναι ακριβής με την έννοια ότι έχει σαν συνέπεια το γεγονός ότι οι μόνες συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει $\Gamma(f) = 0$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

Τέλος, υπάρχει επίσης ανισότητα Sobolev στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^n$, η οποία παίρνει τη μορφή

$$\|f\|_p^2 \leqslant -A\|f\|_2^2 + C_n \int_{\mathbb{H}^n} \Gamma(f)\, d\mu \tag{3.1.3}$$

για κάποιες γνωστές σταθερές $A > 0$ και $C_n > 0$, και κάθε ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τις παραπάνω ανισότητες και θα συζητήσουμε τη βαθιά σχέση ανάμεσα στις τρεις ανισότητες Sobolev, στον Ευκλείδειο, σφαιρικό και υπερβολικό χώρο, καθώς και τις ακριβείς τιμές των σταθερών και τις ακραίες συναρτήσεις σε κάθε περίπτωση.

3.2 Ανισότητες Sobolev

Αρχίζουμε εισάγοντας την έννοια της *ανισότητας Sobolev* σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Οι τριάδες Markov στις οποίες θα δουλεύουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα είναι πάντοτε πλήρεις.

Ορισμός 3.2.1 (ανισότητα Sobolev)**.** Λέμε ότι μια τριάδα Markov (E, μ, Γ) ικανοποιεί την ανισότητα Sobolev $S(p; A, C)$ με εκθέτη $p > 2$ και σταθερές $A \in \mathbb{R}$ και $C > 0$ αν για όλες τις συναρτήσεις f στο πεδίο Dirichlet $\mathcal{D}(\mathcal{E})$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f) \tag{3.2.1}$$

Θα λέμε ότι η ανισότητα Sobolev ικανοποιείται αυστηρά όταν $A = 1$ και θα γράφουμε ότι ισχύει η $S(p; C)$.

Ορισμός 3.2.2 (ανισότητα Poincaré)**.** Λέμε ότι μια τριάδα Markov (E, μ, Γ), όπου μ μέτρο πιθανότητας, λέμε ότι ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $C > 0$, και θα γράφουμε ότι ισχύει η $P(C)$, αν για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται στο $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ισχύει:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C \cdot \mathcal{E}(f) \tag{3.2.2}$$

όπου $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_E f^2\, d\mu - \left(\int_E f\, d\mu\right)^2$.

Πρόταση 3.2.3. *Έστω (E, μ, Γ) πλήρης τριάδα Markov, όπου μ μέτρο πιθανότητας, και $p > 2$. Η αυστηρή ανισότητα Sobolev συνεπάγεται την ανισότητα Poincaré $P(\frac{C}{p-2})$. Επιπλέον, η $S(p; A, C)$ σε συνδυασμό με την $P(C')$ συνεπάγονται μια αυστηρή ανισότητα Sobolev $S(p; (p-1)(AC' + C))$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ικανοποιείται η $S(p; C)$ και θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(\frac{C}{p-2})$. Έχουμε ότι ισχύει:

$$\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2 \leqslant C \cdot \mathcal{E}(f). \tag{3.2.3}$$

Έστω $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ με $\int_E g\,d\mu = 0$ και $\varepsilon > 0$. Θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Sobolev για τη συνάρτηση $f = 1 + \varepsilon g$. Έχουμε:

$$\|1+\varepsilon g\|_2^2 = \int_E |1+\varepsilon g|^2\,d\mu = \int_E (1 + 2\varepsilon g + \varepsilon^2 g^2)\,d\mu = \mu(E) + \varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu = 1 + \varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu,$$

αφού το μ είναι μέτρο πιθανότητας κι επίσης είναι $\|1+\varepsilon g\|_p^2 = \left(\int_E |1+\varepsilon g|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}}$.

Για τον υπολογισμό της $\|1+\varepsilon g\|_p^2$ θα χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 για τη συνάρτηση $\varphi(x) = |1+x|^p$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor παίρνουμε

$$\varphi(x) = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Άρα, $\varphi(\varepsilon g) = 1 + p\varepsilon g + \frac{p(p-1)}{2}\varepsilon^2 g^2 + o(\varepsilon^2)$ και αφού $\int_E g\,d\mu = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|1+\varepsilon g\|_p^2 &= \left(1 + \frac{p(p-1)}{2}\varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}} + o(\varepsilon^2)\\ &= \|1+\varepsilon g\|_p^2 = 1 + (p-1)\varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu + o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2 = \|1+\varepsilon g\|_p^2 - \|1+\varepsilon g\|_2^2 = (p-2)\varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu + o(\varepsilon^2).$$

Επίσης είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f) &= -\int_E f\mathcal{L}f\,d\mu = -\int_E (1+\varepsilon g)\mathcal{L}(1+\varepsilon g)\,d\mu\\ &= -\int_E (1+\varepsilon g)\varepsilon\mathcal{L}g\,d\mu = -\varepsilon \int_E \mathcal{L}g\,d\mu - \varepsilon^2 \int_E g\mathcal{L}g\,d\mu\\ &= -\varepsilon^2 \int_E g\mathcal{L}g\,d\mu = \varepsilon^2\mathcal{E}(g).\end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση (3.2.3) συνεπάγεται ότι

$$(p-2)\varepsilon^2 \int_E g^2\,d\mu \leqslant C\varepsilon^2\mathcal{E}(g) + o(\varepsilon^2).$$

Διαιρώντας με ε^2 και στέλνοντας το ε στο 0 παίρνουμε ότι $\int_E g^2\,d\mu \leqslant \frac{C}{p-2}\cdot\mathcal{E}(g)$ και αφού $\int_E g\,d\mu = 0$ αυτό ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{Var}_\mu(g) \leqslant \frac{C}{p-2}\cdot\mathcal{E}(g).$$

δηλαδή τη ζητούμενη $P(\frac{C}{p-2})$.

Για το δεύτερο: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $S(p;A,C)$ και $P(C')$ και θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η αυστηρή ανισότητα Sobolev $S\left(p;(p-1)(AC'+C)\right)$. Καταρχάς θα δείξουμε ότι για $p > 2$ και κάθε $f \in L^p(\mu)$ ισχύει:

$$\|f\|_p^2 \leqslant \left(\int_E f\,d\mu\right)^2 + (p-1)\|\widehat{f}\|_p^2, \tag{3.2.4}$$

όπου $\widehat{f} = f - \int_E f\,d\mu$. Θεωρούμε f φραγμένη με $\int_E f\,d\mu = 1$. Τότε η f θα έχει αναπαράσταση της μορφής $f = 1 + r\cdot g$ όπου $r \in \mathbb{R}$, η g είναι φραγμένη με $\int_E g\,d\mu = 0$ και $\int_E g^2\,d\mu = 1$. Τότε, αφού $\mu(E) = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_p^2 &= \left(\int_E \left|1 + rg - \int_E (1+rg)\,d\mu\right|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= \left(\int_E \left|rg - r\int_E g\,d\mu\right|^p d\mu\right)^{\frac{2}{p}} = \left(\int_E |rg|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}} \\
&= r^2\left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}} = r^2\|g\|_p^2.
\end{aligned}$$

Άρα, η (3.2.4) ισοδυναμεί με την ανισότητα

$$\psi(r) = \|1 + rg\|_p^2 \leqslant 1 + (p-1)r^2\|g\|_p^2. \tag{3.2.5}$$

Για να δείξουμε αυτήν την ανισότητα, παραγωγίζουμε ως προς r την $\psi(r)$ κι έχουμε:

$$\psi'(r) = 2\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}-1}\cdot\int_E g\cdot|1+rg|^{p-1}\,d\mu$$

και

$$\begin{aligned}
\psi''(r) &= 2(2-p)\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}-2}\left(\int_E g\cdot|1+rg|^{p-1}\,d\mu\right)^2 \\
&\quad + 2(p-1)\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}-1}\cdot\int_E g^2\cdot|1+rg|^{p-2}\,d\mu.
\end{aligned}$$

Όμως $p > 2$, άρα ο πρώτος όρος αυτού του αθροίσματος είναι μικρότερος ή ίσος από 0. Συνεπώς,

$$\psi''(r) \leqslant 2(p-1)\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}-1}\cdot\int_E g^2\cdot|1+rg|^{p-2}\,d\mu. \tag{3.2.6}$$

(Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω παραγωγίσεις δικαιολογούνται αυστηρά χρησιμοποιώτας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Είναι $\frac{p-2}{p} + \frac{2}{p} = 1$ και $\frac{p}{p-2}, \frac{p}{2} \geqslant 1$ άρα είναι συζυγείς εκθέτες. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder στην $\int_E g^2\cdot|1+rg|^{p-2}\,d\mu$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_E g^2\cdot|1+rg|^{p-2}\,d\mu &\leqslant \left(\int_E g^p\,d\mu\right)^{\frac{2}{p}}\cdot\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{2}{p}} \\
&= \|g\|_p^2\cdot\left(\int_E |1+rg|^p\,d\mu\right)^{-(\frac{2}{p}-1)}.
\end{aligned}$$

Έτσι η ανισότητα (3.2.6) τελικά γίνεται

$$\psi''(r) \leqslant 2(p-1)\|g\|_p^2.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση δύο φορές ως προς r παίρνουμε $\psi(r) \leqslant C + (p-1)r^2\|g\|_p^2$ και για $r = 0$ παίρνουμε $C \geqslant 1$. Άρα, ισχύει

$$\psi(r) \leqslant 1 + (p-1)r^2\|g\|_p^2,$$

δηλαδή ισχύει η (3.2.5). Οπότε, ισχύει ισοδύναμα και η (3.2.4).

Είναι $\widehat{f} = f - \int_E f\,d\mu$, άρα $\int_E \widehat{f}\,d\mu = 0$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Sobolev $S(p; A, C)$ για την $\widehat{f}$ κι έχουμε

$$\|\widehat{f}\|_p^2 \leqslant A \cdot \|\widehat{f}\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(\widehat{f}), \tag{3.2.7}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{f}) &= -\int_E \left(f - \int_E f\right) \cdot \mathcal{L}\left(f - \int_E f\right) d\mu \\
&= -\int_E f\mathcal{L}(f)\,d\mu + \int_E f\mathcal{L}\left(\mathbb{E}_\mu(f)\right)\,d\mu + \int_E \left(\mathbb{E}_\mu(f)\right)\mathcal{L}f\,d\mu - \mathbb{E}_\mu(f)\int_E \mathcal{L}\mathbb{E}_\mu(f)\,d\mu \\
&= -\int_E f\mathcal{L}f\,d\mu = \mathcal{E}(f),
\end{aligned}$$

διότι $\mathcal{L}$ γραμμική και $\mathcal{L}\mathbb{E}_\mu(f) = 0$. Τώρα η (3.2.4) λόγω της (3.2.7) γίνεται

$$\|f\|_p^2 \leqslant \left(\int_E f\,d\mu\right)^2 + (p-1)\left[A \cdot \|\widehat{f}\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)\right]. \tag{3.2.8}$$

Επίσης, από την ανισότητα Poincaré $P(C')$ για την $\widehat{f}$ έχουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(\widehat{f}) = \int_E (\widehat{f})^2\,d\mu = \|\widehat{f}\|_2^2 \leqslant C'\mathcal{E}(\widehat{f}) = C'\mathcal{E}(f),$$

και αντικαθιστώντας στην (3.2.8) παίρνουμε

$$\|f\|_p^2 \leqslant \left(\int_E f\,d\mu\right)^2 + (p-1)(A \cdot C' + C) \cdot \mathcal{E}(f).$$

Η $x \mapsto x^2$ είναι κυρτή, άρα από ανισότητα Jensen έχουμε:

$$\left(\int_E f\,d\mu\right)^2 \leqslant \int_E f^2\,d\mu = \|f\|_2^2,$$

κι έτσι η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + (p-1) \cdot (AC' + C) \cdot \mathcal{E}(f),$$

δηλαδή ικανοποιείται η αυστηρή ανισότητα Sobolev $S(p; (p-1)(AC'+C))$. □

3.3 Λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας – ανισότητα Nash

Υπενθυμίζουμε αρχικά τον ορισμό της εντροπίας.

Ορισμός 3.3.1. Έστω $(E, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, με το μ όχι απαραίτητα πεπερασμένο. Τότε, για κάθε μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, η εντροπία της f ως προς μ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_E f \cdot \ln f\,d\mu - \int_E f\,d\mu \cdot \ln \int_E f\,d\mu$$

αν $\int_E f|\ln f|\,d\mu < \infty$ (που είναι ισοδύναμη με την $\int_E f\ln(1+f)\,d\mu < \infty$) και $\mathrm{Ent}_\mu(f) = \infty$ αλλιώς. Στη συνέχεια ακολουθούμε τη σύμβαση $0 \cdot \ln 0 = 0$.

Αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή αν $\mu(E)=1$, τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{Ent}_\mu(f)\geqslant 0.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: θεωρούμε την $g(x)=x\ln x$, $x>0$, η οποία είναι κυρτή αφού $g'(x)=\ln x+1$ και $g''(x)=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$. Επίσης έχουμε $\mathbb{E}|f|=\int_E|f|\,d\mu<\infty$ αφού η f είναι ολοκληρώσιμη. Έτσι, εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen παίρνουμε

$$g(\mathbb{E}(f))\leqslant\mathbb{E}\left(g(f)\right)\quad\text{δηλαδή}\quad\mathbb{E}(f)\cdot\ln\mathbb{E}(f)\leqslant\mathbb{E}\left(f\ln f\right),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\mathrm{Ent}_\mu(f)=\int_E f\cdot\ln f\,d\mu-\int_E f\,d\mu\cdot\ln\int_E f\,d\mu\geqslant 0.$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά την παρατήρηση ότι $\mathrm{Ent}_\mu(f)=0$ όταν η f είναι σταθερή.

Θα χρειαστούμε επίσης το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $f\geqslant 0$ μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(X,\mathcal{A},\mu)$. Τότε,*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f)=\sup\left\{\int fg\,d\mu:\ \int e^g\,d\mu\leqslant 1\right\}.$$

Απόδειξη. Η σχέση είναι ομογενής, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int f\,d\mu=1$. Από την ανισότητα του Young έχουμε

$$uv\leqslant u\ln u-u+e^v,\ u\geqslant 0,\ v\in\mathbb{R}$$

άρα, αν g είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση στον X με $\int e^g\,d\mu\leqslant 1$, τότε

$$\int fg\,d\mu\leqslant\int f\ln f\,d\mu-\int f\,d\mu+\int e^g\,d\mu\leqslant\int f\ln f\,d\mu.$$

Παίρνοντας το supremum βλέπουμε ότι

$$\sup\left\{\int fg\,d\mu:\ \int e^g\,d\mu\leqslant 1\right\}\leqslant\int f\ln f\,d\mu=\mathrm{Ent}_\mu(f),$$

χρησιμοποιώντας και πάλι την υπόθεση ότι $\int f\,d\mu=1$. Τέλος, αφού $\int e^{\ln f}\,d\mu=\int f\,d\mu=1$, έχουμε

$$\sup\left\{\int fg\,d\mu:\ \int e^g\,d\mu\leqslant 1\right\}\geqslant\int f\ln f\,d\mu,$$

το οποίο μας δίνει την ισότητα. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.3. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ με σταθερές $A\geqslant 0$, $C>0$ για κάθε συνάρτηση $f\in D(\mathcal{E})$ με $\|f\|_2=1$, τότε ισχύει η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\leqslant\frac{n}{2}\ln(A+C\cdot\mathcal{E}(f)).\tag{3.3.1}$$

(ii) *Αν ισχύει η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας* (3.3.1) *τότε για κάθε συνάρτηση* $f \in D(\mathcal{E})$ *ισχύει η ανισότητα Nash*

$$\|f\|_2^{n+2} \leqslant \big(A \cdot \|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)\big)^{n/2} \|f\|_1^2. \tag{3.3.2}$$

(iii) *Αντιστρόφως, αν ισχύει η ανισότητα Nash* (3.3.2) *τότε ισχύει η ανισότητα Sobolev* $S_n(A_1, C_1)$ *με σταθερές* $A_1 \geqslant 0$ *και* $C_1 > 0$ *οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα* n, A *και* C. *Επιπλέον,* $A_1 = 0$ *όταν* $A = 0$.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(r) = \ln(\|f\|_{\frac{1}{r}})$ είναι κυρτή. Πράγματη, $\varphi(r) = \psi(1/r)$, όπου $\psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση $\psi(p) = \ln(\|f\|\|_p)$. Η ψ είναι αύξουσα και κυρτή, από την ανισότητα Hölder. Έχουμε $\varphi'(r) = -\frac{1}{r^2}\psi'(1/r)$ και $\varphi''(r) = \frac{2}{r^3}\psi'(1/r) + \frac{1}{r^4}\psi''(1/r) \geqslant 0$, άρα η φ είναι κυρτή.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\varphi'(r) = \left(r \ln \int_E |f|^{1/r} d\mu\right)' = \ln \int_E |f|^{1/r} d\mu - \frac{1}{r} \frac{1}{\int_E |f|^{1/r} d\mu} \int_E |f|^{1/r} \ln |f| \, d\mu,$$

άρα

$$\begin{aligned}\varphi'(1/2) &= \ln \int_E |f|^2 d\mu - \frac{2}{\int_E |f|^2 d\mu} \int_E |f|^2 \ln |f| \, d\mu = -\int_E f^2 \ln(f^2) \, d\mu \\ &= -\left(\int_E f^2 \ln(f^2) \, d\mu \int_E f^2 d\mu \cdot \ln \int_E f^2 d\mu\right) = -\mathrm{Ent}_\mu(f^2),\end{aligned}$$

διότι $\int_E |f|^2 d\mu = 1$ από την υπόθεση.

Έχουμε $p = \frac{2n}{n-2} > 2$ άρα $\frac{1}{2} > \frac{1}{p}$, και $\frac{1}{n} = \frac{p-2}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} > 0$. Η φ είναι κυρτή, άρα σε κάθε σημείο της είναι πάνω από την εφαπτομένη στο $\left(\frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Ειδικότερα,

$$\varphi(1/p) \geqslant \varphi(1/2) + \varphi'(1/2)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) = \varphi(1/2) - \frac{1}{n}\varphi'(1/2),$$

ή ισοδύναμα,

$$-\mathrm{Ent}_\mu(f^2) = \varphi'(1/2) \geqslant n\left(\varphi(1/2) - \varphi(1/p)\right) = n\left(\ln \|f\|_2 - \ln \|f\|_p\right) = -n \ln \|f\|_p$$

(γιατί $\ln \|f\|_2 = 0$) απ' όπου έπεται ότι

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant n \ln \|f\|_p = \frac{n}{2} \ln \|f\|_p^2.$$

Έχουμε υποθέσει ότι ισχύει η $S_n(A,C)$, δηλαδή $\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)$, και είναι $\|f\|_2^2 = 1$ άρα $\|f\|_p^2 \leqslant A + C \cdot \mathcal{E}(f)$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η $\ln$ είναι αύξουσα παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \ln \|g\|_p^2 \leqslant \frac{n}{2} \ln(A + C \cdot \mathcal{E}(f)),$$

που είναι η ζητούμενη λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας.

(ii) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_2 = 1$. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι η $\varphi(r) = \ln \|f\|_{\frac{1}{r}}$ είναι κυρτή, γράφουμε

$$\varphi(1) - \varphi(1/2) \geqslant \varphi'(1/2)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \varphi'(1/2)\frac{1}{2},$$

ή ισοδύναμα
$$\varphi'(1/2) \leqslant 2\left(\varphi(1) - \varphi(1/2)\right).$$
Αφού $\varphi(1) = \ln\|f\|_1$, $\varphi(1/2) = \ln\|f\|_2 = 0$ και $\varphi'(1/2) = -\mathrm{Ent}_\mu(f^2)$, έπεται ότι
$$-\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\ln\|f\|_1 = -\ln\|f\|_1^{-2},$$
δηλαδή,
$$\ln\left(\frac{1}{\|f\|_1^2}\right) \leqslant \mathrm{Ent}_\mu(f^2).$$
Όμως, από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln(A + C\cdot\mathcal{E}(f)) = \ln\left((A + c\cdot\mathcal{E}(f))^{n/2}\right)$. Άρα,
$$\frac{1}{\|f\|_1^2} \leqslant (A + C\cdot\mathcal{E}(f))^{n/2},$$
απ' όπου έπεται ότι
$$\|f\|_2^{n+2} = 1 \leqslant (A + C\cdot\mathcal{E}(f))^{n/2}\|f\|_1^2 = (A\|f\|_2^2 + C\cdot\mathcal{E}(f))^{n/2}\|f\|_1^2.$$

(iii) Υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα του Nash, $\|f\|_2^{n+2} \leqslant (A\|f\|_2^2 + C\cdot\mathcal{E}(f))^{n/2}\|f\|_1^2$, και θα δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A_1, C_1)$ με $p = \frac{2n}{n-2}$ και σταθερές $A_1 \geqslant 0$ και $C_1 > 0$, δηλαδή ότι ισχύει
$$\|f\|_p^2 \leqslant A_1\|f\|_2^2 + C\cdot\mathcal{E}(f).$$
Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική τεμαχισμού (slicing) η οποία βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω (E,μ,Γ) πλήρης τριάδα Markov και $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Θεωρούμε $f : E \to \mathbb{R}^+$ και για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k := (f - a_k)_+ \wedge (a_{k+1} - a_k)$. Τότε, για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ έχουμε*
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}(f_k) \leqslant \mathcal{E}(f).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι
$$\mathcal{E}(f_k) = \int_E \Gamma(f_k)\,d\mu \leqslant \int_{\{a_k\leqslant f\leqslant a_{k+1}\}} \Gamma(f)\,d\mu = \int_{\{a_k< f< a_{k+1}\}} \Gamma(f)\,d\mu,$$
διότι $\int_{\{f=a\}} \Gamma(f)\,d\mu = 0$. Συνεπώς,
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}(f_k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\{a_k< f< a_{k+1}\}} \Gamma(f)\,d\mu = \int_E \Gamma(f)\,d\mu = \mathcal{E}(f).$$
□

Συνέχεια της απόδειξης του (iii): Η ιδέα είναι να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Nash για την ακολουθία συναρτήσεων $f_k = (f - 2^k)_+ \wedge 2^k$, $k\in\mathbb{Z}$, οι οποίες ανήκουν στο $D(\mathcal{E})$ αφού $f \in D(\mathcal{E})$.

Θεωρούμε τα σύνολα $N_k = \{f > 2^k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, τα οποία είναι μετρήσιμα αφού η f είναι μετρήσιμη. Η ακολουθια $\{N_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φθίνουσα. Παρατηρούμε ότι $f_k = \min\{(f - 2^k)_+, 2^k\} = 2^k$ όταν

$f-2^k \geqslant 2^k$ δηλαδή όταν $x \in N_{k+1}$. Με άλλα λόγια, $f_k \geqslant 2^k \cdot \mathbf{1}_{N_{k+1}}$. Επίσης, $f_k(x) = \min\{(f_k(x)-2^k)_+, 2^k\} \leqslant 2^k \cdot \mathbf{1}_{N_k}(x)$, διότι αν $x \notin N_k$ τότε $f(x) < 2^k$ και έπεται ότι $f_k(x) = 0$ ενώ αν $x \in N_k$ είναι φανερό ότι $f_k(x) \leqslant 2^k$ από τον ορισμό της f_k. Συνεπώς,

$$2^k \cdot \mathbf{1}_{N_{k+1}} \leqslant f_k \leqslant 2^k \cdot \mathbf{1}_{N_k} \quad \Longrightarrow \quad 2^{2k} \cdot \mathbf{1}_{N_{k+1}} \leqslant f_k^2 \leqslant 2^{2k} \cdot \mathbf{1}_{N_k}.$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$2^{2k}\mu(N_{k+1}) \leqslant \int_E f_k^2 d\mu \leqslant 2^{2k}\mu(N_k)$$

και

$$\int_E f_k d\mu \leqslant 2^k \mu(N_k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Nash για κάθε f_k έχουμε

$$\|f_k\|_2^{n+2} \leqslant \big(A\|f_k\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f_k)\big)^{n/2} \|f_k\|_1^2$$

και

$$\begin{aligned}\big(A\|f_k\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f_k)\big)^{n/2} \|f_k\|_1^2 &= \big(A\|f_k\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f_k)\big)^{n/2} \left(\int_E |f_k| d\mu\right)^2 \\ &\leqslant \big(A \cdot 2^{2k}\mu(N_k) + C \cdot \mathcal{E}(f_k)\big)^{n/2} 2^{2k}\mu(N_k)^2 \\ &= \beta_k^{n/2} 2^{2k}\mu(N_k)^2,\end{aligned}$$

όπου $\beta_k = A \cdot 2^{2k}\mu(N_k) + C \cdot \mathcal{E}(f)$. Επίσης,

$$\|f_k\|_2^{n+2} = \left(\int_E |f_k|^2 d\mu\right)^{\frac{n}{2}+1} \geqslant \big(2^{2k}\mu(N_{k+1})\big)^{\frac{n+2}{2}}.$$

Άρα,

$$2^{2k}\mu(N_{k+1}) \leqslant \beta_k^{\frac{n}{n+2}} 2^{\frac{4k}{n+2}} \mu(N_k)^{\frac{4}{n+2}}.$$

Αν θέσουμε $\alpha_k = 2^{pk}\mu(N_k)$, όπου $p = \frac{2n}{n-2}$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\alpha_{k+1} = 2^{pk}2^p\mu(N_{k+1}) \leqslant 2^p \beta_k^{\frac{n}{n+2}} 2^{\frac{4pk}{n+2}} \mu(N_k)^{\frac{4}{n+2}} = 2^p \beta_k^{\frac{n}{n+2}} \big(2^{pk}\mu(N_k)\big)^{\frac{4}{n+2}},$$

άρα

$$\alpha_{k+1} \leqslant 2^p \beta_k^{\frac{n}{n+2}} \alpha_k^{\frac{4}{n+2}}.$$

Παρατηρήστε ότι οι $\frac{n+2}{n}$ και $\frac{n+2}{2}$ είναι συζυγείς εκθέτες. Αθροίζοντας ως προς $k \in \mathbb{Z}$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder, από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \leqslant 2^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k^{\frac{n}{n+2}} (\alpha_k^2)^{\frac{2}{n+2}}\right) \leqslant 2^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k\right)^{\frac{n}{n+2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2\right)^{\frac{2}{n+2}}.$$

Όμως είναι

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2 \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^2.$$

Άρα,
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k \leqslant 2^p\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\right)^{\frac{n}{n+2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\right)^{\frac{4}{n+2}}.$$
Έπεται ότι
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\right)^{\frac{n-2}{n+2}} \leqslant 2^{\frac{2n}{n-2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\right)^{\frac{n}{n+2}},$$
ή ισοδύναμα,
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant 2^{\frac{2(n+2)}{n-2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\right).$$
Τώρα, από την Πρόταση 3.3.4 παίρνουμε
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{E}(f_k)\leqslant\mathcal{E}(f).$$
Όμως, αφού $f^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f^2\cdot\mathbf{1}_{N_k\setminus N_{k+1}}$, από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε
$$\begin{aligned}\int_E f^2d\mu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_E f^2\cdot\mathbf{1}_{N_k\setminus N_{k+1}}\,d\mu \geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\int_{N_k\setminus N_{k+1}}\mathbf{1}\,d\mu\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\mu(N_k\setminus N_{k+1}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}(\mu(N_k)-\mu(N_{k+1}))\\ &= \frac{3}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\mu(N_k).\end{aligned}$$
Αφού $\beta_k = A\cdot 2^{2k}\mu(N_k)+C\cdot\mathcal{E}(f_k)$, έχουμε
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\leqslant A\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\mu(N_k)+C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{E}(f_k)\leqslant\frac{4}{3}A\int_E f^2d\mu + C\cdot\mathcal{E}(f).$$
Επιπλέον, έχουμε
$$\begin{aligned}\int_E f^pd\mu &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_E f^p\cdot\mathbf{1}_{N_k\setminus N_{k+1}}\,d\mu \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{(k+1)p}\int_{N_k\setminus N_{k+1}}\mathbf{1}\,d\mu\\ &= 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}\mu(N_k\setminus N_{k+1}) \leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{kp}\mu(N_k)\\ &= 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k.\end{aligned}$$
Όμως έχουμε δείξει ότι
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant 2^{\frac{2(n+2)}{n-2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k,$$
άρα
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k \leqslant 2^{\frac{2(n+2)n}{(n-2)^2}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\right)^{\frac{n}{n-2}},$$

δηλαδή

$$2^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \leqslant 2^p \cdot 2^{p\frac{n+2}{n-2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k\right)^{\frac{n}{n-2}}.$$

Άρα,

$$\int_E f^p d\mu = \|f\|_p^p \leqslant 2^p (2^{\frac{n+2}{n-2}})^p \left(\frac{4}{3} A \int_E f^2 d\mu + C \cdot \mathcal{E}(f)\right)^{p/2},$$

διότι $\frac{n}{n-2} = \frac{p}{2}$. Έπεται ότι

$$\|f\|_p^2 \leqslant 2^{\frac{4n}{n-2}} \left(\frac{4}{3} A \int_E f^2 d\mu + C \cdot \mathcal{E}(f)\right) = 2^{2p} \frac{4}{3} A \|f\|_2^2 + 2^{2p} C \cdot \mathcal{E}(f),$$

δηλαδή

$$\|f\|_p^2 \leqslant A_1 \|f\|_2^2 + C_1 \cdot \mathcal{E}(f),$$

με $A_1 = 2^{2p} \cdot \frac{4}{3} A$ και $C_1 = 2^{2p} C$. Συνεπώς, ικανοποιείται η $S_n(A_1, C_1)$.

Τέλος, από την $A_1 = 2^{2p} \cdot \frac{4}{3} A$ βλέπουμε ότι αν $A = 0$ τότε είναι και $A_1 = 0$. □

Ορισμός 3.3.5 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev)**.** Έστω (E, μ, Γ) πλήρης τριάδα Markov, όπου μ μέτρο πιθανότητας. Λέμε ότι η τριάδα (E, μ, Γ) ικανοποιεί τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερές $C > 0, D \geqslant 0$ – για συντομία θα γράφουμε ότι ισχύει η $LS(C, D)$ – αν για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ στο $D(\mathcal{E})$ ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2C \cdot \mathcal{E}(f) + D \cdot \int_E f^2 \, d\mu.$$

Όταν $D = 0$, η λογαριθμική ανισότητα Sobolev καλείται αυστηρή και θα συμβολίζεται με $LS(C)$.

Παρατήρηση 3.3.6. Στην Πρόταση 3.3.3 (i) είδαμε την ανισότητα εντροπίας–ενέργειας

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln(A + C \cdot \mathcal{E}(f)).$$

Αφού η συνάρτηση ln είναι κοίλη, συμπεραίνουμε ότι η $\varphi(r) = \frac{n}{2} \cdot \ln(A + Cr), r > 0$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο. Έτσι, έχουμε

$$\varphi(\mathcal{E}(f)) = \frac{n}{2} \cdot \ln(A + C \cdot \mathcal{E}(f)) \leqslant \varphi'(r)(\mathcal{E}(f) - r) + \varphi(r),$$

δηλαδή

$$\varphi(\mathcal{E}(f)) \leqslant \varphi'(r) \cdot \mathcal{E}(f) + \psi(r),$$

όπου $\psi(r) = \varphi(r) - r\varphi'(r), r > 0$ και $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2 \, d\mu = 1$. Άρα, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \varphi'(r) \cdot \mathcal{E}(f) + \psi(r)$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2 \, d\mu = 1$, δηλαδή η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας ισοδυναμεί με μια οικογένεια λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev.

Όταν το μ είναι μέτρο πιθανότητας, λέμε ότι η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας και η ανισότητα του Nash ικανοποιούνται αυστηρά αν $A = 1$.

Πρόταση 3.3.7. *Η αυστηρή λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας συνεπάγεται την αυστηρή λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS\left(\frac{Cn}{4}\right)$. Επιπλέον, η αυστηρή ανισότητα Nash συνεπάγεται την ανισότητα Poincaré $P\left(\frac{Cn}{2}\right)$.*

Απόδειξη. Για το πρώτο: Από την υπόθεση έχουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln(1 + C \cdot \mathcal{E}(f))$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\, d\mu = 1$. Από την ανισότητα $e^x \geqslant 1 + x$ έχουμε

$$\begin{aligned} e^{C\mathcal{E}(f)} \geqslant 1 + C\mathcal{E}(f) \Longrightarrow \quad & C\mathcal{E}(f) \geqslant \ln(1 + C\mathcal{E}(f)) \\ \Longrightarrow \quad & \frac{n}{2}C\mathcal{E}(f) \geqslant \frac{n}{2}\ln(1 + C\mathcal{E}(f)) \geqslant \mathrm{Ent}_\mu(f^2). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2 \cdot \frac{Cn}{4} \cdot \mathcal{E}(f),$$

δηλαδή ικανοποιείται η $LS\left(\frac{Cn}{4}\right)$.

Για το δεύτερο: Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ ισχύει η ανισότητα

$$\|f\|_2^{n+2} \leqslant \left[\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right]^{\frac{n}{2}} \cdot \|f\|_1^2.$$

Εφαρμόζουμε αυτήν την ανισότητα για την $f = 1 + \varepsilon \cdot g$, όπου $\varepsilon > 0$ και $g \in D(\mathcal{E})$. Έχουμε

$$\|f\|_2^{n+2} = \left[\|1 + \varepsilon g\|_2^2\right]^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\int_E (1 + \varepsilon g)^2\, d\mu\right),$$

άρα, από την ανισότητα του Nash προκύπτει:

$$\int_E (1 + \varepsilon g)^2\, d\mu \leqslant \left[1 + C\varepsilon^2 \frac{\mathcal{E}(g)}{\|1 + \varepsilon g\|_2^2}\right]^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\int_E (1 + \varepsilon g)\, d\mu\right)^2, \tag{3.3.3}$$

αφού $\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(1 + \varepsilon g) = \varepsilon^2 \mathcal{E}(g)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor γύρω από το 0 για την $(1 + x)^{\frac{n}{2}}$ και για $x = C\varepsilon^2 \frac{\mathcal{E}(g)}{\|1+\varepsilon g\|_2^2}$, από την (3.3.3) μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_E (1 + 2\varepsilon g + \varepsilon^2 g^2)\, d\mu \leqslant & \left(\int_E (1 + \varepsilon g)\, d\mu\right)^2 + \frac{Cn}{2} \frac{\mathcal{E}(g)\varepsilon^2}{\int_E (1 + \varepsilon g)^2\, d\mu} \left(\int_E (1 + \varepsilon g)\, d\mu\right)^2 \\ & + \frac{\varepsilon^4}{\|1 + \varepsilon g\|_2^4} \cdot B \cdot \left(\int_E (1 + \varepsilon g)\, d\mu\right)^2 + o(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

όπου $B = \frac{n(n-2)}{4} C^2 \mathcal{E}^2(g)$. Αφού είμαστε σε χώρο πιθανότητας, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε $\left(\int_E (1 + \varepsilon g)\, d\mu\right)^2 \leqslant \int_E (1 + \varepsilon g)^2\, d\mu$ κι έτσι η παραπάνω ανισότητα μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς γίνεται:

$$\varepsilon^2 \int_E g^2\, d\mu \leqslant \varepsilon^2 \left(\int_E g\, d\mu\right)^2 + \frac{Cn}{2}\mathcal{E}(g)\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \frac{B}{\|1 + \varepsilon g\|_2^2} + o(\varepsilon^2).$$

Επομένως,

$$\varepsilon^2 \left(\int_E g^2\, d\mu - \left(\int_E g\, d\mu\right)^2\right) \leqslant \varepsilon^2 \frac{Cn}{2}\mathcal{E}(g) + \varepsilon^4 \frac{B}{\|1 + \varepsilon g\|_2^2} + o(\varepsilon^2)$$

Διαιρώντας με ε^2 και στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(g) \leqslant \frac{Cn}{2}\,\mathcal{E}(g),$$

δηλαδή ικανοποιείται η $P\left(\frac{C\cdot n}{2}\right)$. □

Παρατήρηση 3.3.8. Θεωρούμε $B \subseteq E$ και μια συνάρτηση $f \in D(\mathcal{E})$ με $\mathrm{supp}(f) \subseteq B$, όπου $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$ είναι ο φορέας της f. Τότε, αν $\mu(B) \leqslant (2A)^{-\frac{n}{2}}$ η ανισότητα Nash συνεπάγεται ότι

$$\int_B f^2\,d\mu \leqslant 2C \cdot \mu(B)^{\frac{2}{n}} \cdot \mathcal{E}(f).$$

Πράγματι, αφού $f = 0$ έξω από το B, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\|f\|_1^2 = \left(\int_B f\,d\mu\right)^2 \leqslant \int_B 1\,d\mu \cdot \int_B f^2\,d\mu = \mu(B)\int_B f^2\,d\mu = \mu(B)\|f\|_2^2$$

και από την ανισότητα Nash παίρνουμε

$$\|f\|_2^n \leqslant \left[A \cdot \|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)\right]^{\frac{n}{2}} \cdot \mu(B).$$

Άρα, αφού $A \leqslant \frac{1}{2\mu(B)^{\frac{2}{n}}}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &\leqslant \mu(B)^{\frac{2}{n}} \cdot \left[A \cdot \|f\|_2^2 + C \cdot \mathcal{E}(f)\right]\\ &\leqslant \frac{\mu(B)^{\frac{2}{n}}}{2\mu(B)^{\frac{2}{n}}}\|f\|_2^2 + \mu(B)^{\frac{2}{n}} C\mathcal{E}(f)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \|f\|_2^2 + C \cdot \mu(B)^{\frac{2}{n}} \cdot \mathcal{E}(f)\end{aligned}$$

Κι έτσι έχουμε το ζητούμενο $\int_B f^2\,d\mu \leqslant 2C \cdot \mu(B)^{\frac{2}{n}} \cdot \mathcal{E}(f)$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την Ευκλείδεια λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την οποία θα χρειαστούμε πρώτα την λογαριθμική ανισότητα Sobolev στο χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$. Το μέτρο γ_n έχει πυκνότητα $g_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ είναι

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}}\,dx.$$

Πρόταση 3.3.9 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev για το μέτρο του Gauss)**.** *Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στο χώρο Dirichlet $D(\mathcal{E})$ με το συνήθη τελεστή carré du champ $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$ ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(f^2) \leqslant 2\mathcal{E}(f) = 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\,d\gamma_n \tag{3.3.4}$$

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $f \geqslant c > 0$. Θέτουμε $\varphi = f^2$, οπότε $\nabla f = \frac{\nabla\varphi}{2\sqrt{\varphi}}$ και η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \ln\varphi\,d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,d\gamma_n \cdot \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,d\gamma_n\right) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\,d\gamma_n. \tag{3.3.5}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_0\varphi \cdot \ln P_0\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} P_\infty\varphi \cdot \ln P_\infty\varphi,$$

μπορούμε λοιπόν να το γράψουμε στη μορφή

$$-\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t\varphi \cdot \ln P_t\varphi \, d\gamma_n \right] \right) dt.$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t\varphi \cdot \ln P_t\varphi \, d\gamma_n \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \mathcal{L}P_t\varphi \cdot \ln P_t\varphi + \frac{d}{dt} P_t\varphi \right\} d\gamma_n$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}(P_t\varphi) d\gamma_n \, dt &= \int_{\mathbb{R}^n} P_\infty\varphi \, d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} P_0\varphi \, d\gamma_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\gamma_n \right) d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\gamma_n = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το αριστερό μέλος της (3.3.5) είναι ίσο με

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}P_t f \cdot \ln P_t\varphi \, d\gamma_n &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla P_t\varphi, \nabla \ln P_t\varphi \rangle \, d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla P_t\varphi|^2}{P_t\varphi} \, d\gamma_n \, dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$|P_t(\partial_{x_i}\varphi)|^2 = \left| P_t \left(\sqrt{\varphi} \cdot \frac{\partial_{x_i}\varphi}{\sqrt{\varphi}} \right) \right|^2 \leqslant P_t\varphi \cdot P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\varphi)^2}{\varphi} \right),$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} |\nabla P_t\varphi|^2 = e^{-2t} |P_t(\nabla\varphi)|^2 &= e^{-2t} \sum_{i=1}^n |P_t(\partial_{x_i}\varphi)|^2 \\ &\leqslant e^{-2t} P_t\varphi \cdot \sum_{i=1}^n P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\varphi)^2}{\varphi} \right). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla P_t\varphi|^2}{P_t\varphi} \, d\gamma_n \, dt &\leqslant \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\varphi)^2}{\varphi} \right) d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} P_t \left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \right) d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \, d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \, dt \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \, d\gamma_n \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \, d\gamma_n, \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 3.3.10 (Ευκλείδεια λογαριθμική ανισότητα Sobolev)**.** *Στον $\mathbb{R}^n$, για το μέτρο Lebesgue dx, το συνήθη τελεστή carré du champ και τη μορφή Dirichlet $\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\,dx$ ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{n\pi e}\cdot\mathcal{E}(f)\right) \tag{3.3.6}$$

για κάθε $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ στο $D(\mathcal{E})$ με $\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,dx = 1$. Η σταθερά $\frac{2}{n\pi e}$ είναι βέλτιστη.

Απόδειξη. Στο χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$ ισχύει η (3.3.4). Επίσης είναι

$$dx = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{|x|^2}{2}}\,d\gamma_n(x) \tag{3.3.7}$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη με συμπαγή φορέα και εφαρμόζουμε τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev (3.3.4) για τη συνάρτηση $g(x) = (2\pi)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{|x|^2}{4}} f(x)$ όπου $x\in\mathbb{R}^n$ και $\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g^2\,d\gamma_n = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(g^2) &= \int_{\mathbb{R}^n} g^2\cdot\ln(g^2)\,d\gamma_n\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{|x|^2}{2}} f^2(x)\left(\frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{|x|^2}{2} + \ln(f^2(x))\right)d\gamma_n(x)\\
&= \frac{n}{2}\ln(2\pi)\int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 f^2(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\ln(f^2(x))\,dx\\
&= \frac{n}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2 f^2(x)\,dx + \mathrm{Ent}_{dx}(f^2).
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το $\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla g|^2\,d\gamma_n$. Είναι

$$\nabla g = (2\pi)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{|x|^2}{4}} f(x)\frac{x}{2} + (2\pi)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{|x|^2}{4}}\nabla f,$$

και λόγω της (3.3.7) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla g|^2\,d\gamma_n &= \int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla f + \frac{x}{2}f\right|^2 dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla f|^2 + x\cdot f\nabla f + \frac{|x|^2}{4}f^2\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} x\cdot f\nabla f\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x|^2}{4}f^2\,dx.
\end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε ανοιχτό $D\subseteq\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\mathrm{supp}(f)\subseteq D$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x\cdot f\nabla f\,dx &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(|x|^2)\cdot\nabla(f^2)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\cdot\left(f^2\nabla(|x|^2)\right)dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\cdot\nabla^2(|x|^2)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{D}\nabla\cdot\left(f^2\nabla(|x|^2)\right)dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\cdot\Delta(|x|^2)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{\partial D} f^2\nabla(|x|^2)\,dx - \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\cdot\Delta(|x|^2)\,dx\\
&= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} f^2\cdot\Delta(|x|^2)\,dx,
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Green και η τελευταία διότι $f = 0$ στο σύνορο. Έτσι, αφού $\Delta(|x|^2) = 2n$ και $\int_{\mathbb{R}^n} f^2\, dx = 1$, προκύπτει τελικά ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot f \nabla f \, dx = -\frac{n}{2}.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας την (3.3.7) για την g παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f^2 \, dx + \frac{n}{2}\ln(2\pi) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, dx - n + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f^2 \, dx,$$

και αφού $\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\, dx$ και $n = \frac{n}{2}\ln e^2$, αυτή ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant 2 \cdot \mathcal{E}(f) - \frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi e^2). \tag{3.3.8}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την (3.3.8) για την $f_s(x) = s^{\frac{n}{2}} \cdot f(sx)$ όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $s > 0$ κι έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_s^2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} s^n \cdot f^2(sx)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^2\left(T(x)\right) |\det(T(x))| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x)\, dx = 1,$$

όπου $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ο μετασχηματισμός με $T(x) = s \cdot x$, για τον οποίο $|\det(T(x))| = s^n$. Επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f_s) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_s|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} s^n \cdot |s \nabla f(sx)|^2 \, dx = s^2 \int_{\mathbb{R}^n} s^n |\nabla f(sx)|^2 \, dx \\ &= s^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \, dx = s^2 \cdot \mathcal{E}(f),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathcal{E}(f_s) = s^2 \cdot \mathcal{E}(f).$$

Ακόμη, απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{dx}(f_s^2) = \int_{\mathbb{R}^n} f_s^2 \cdot \ln f_s^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} s^n \cdot f^2(sx) \cdot \ln\left(s^n f^2(sx)\right)\, dx \\ &= n \ln s \int_{\mathbb{R}^n} s^n \cdot f^2(sx)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} s^n \cdot f^2(sx) \cdot \ln\left(f^2(sx)\right)\, dx \\ &= n \ln s \int_{\mathbb{R}^n} f_s^2(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) \ln\left(f^2(x)\right)\, dx \\ &= n \cdot \ln s + \mathrm{Ent}_{dx}(f^2).\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την (3.3.8) για την f_s, δηλαδή γράφουμε

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f_s^2) \leqslant 2 \cdot \mathcal{E}(f_s) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e^2)$$

και λόγω των τελευταίων δύο σχέσεων ισοδύναμα προκύπτει ότι

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant 2s^2 \cdot \mathcal{E}(f) - n \cdot \ln s - \frac{n}{2} \cdot \ln(2\pi e^2). \tag{3.3.9}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(s) = 2s^2 \cdot \mathcal{E}(f) - n \cdot \ln s - \frac{n}{2}\ln(2\pi e^2), s > 0$ εύκολα βλέπουμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\sqrt{\frac{n}{4\mathcal{E}(f)}}$ και

$$\begin{aligned}\min h(s) = h\left(\sqrt{\frac{n}{4\mathcal{E}(f)}}\right) &= \frac{2n}{4\mathcal{E}(f)}\mathcal{E}(f) - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{4\mathcal{E}(f)}\right) - \frac{n}{2}\ln(2\pi e^2)\\ &= \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\pi e^2 n}{4\mathcal{E}(f)}\right) = \frac{n}{2}\ln e - \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\pi e^2 n}{2\mathcal{E}(f)}\right)\\ &= \frac{n}{2}\cdot\ln\left(\frac{2\mathcal{E}(f)}{n\pi e}\right)\end{aligned}$$

Αφού η (3.3.9) ισχύει για κάθε $s > 0$ παίρνουμε $\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \min h(s)$, δηλαδή

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{n\pi e}\cdot\mathcal{E}(f)\right),$$

που είναι το ζητούμενο. Η σταθερά είναι βέλτιστη καθώς η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev για το μέτρο του Gauss $\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(f^2) \leqslant 2\mathcal{E}(f)$ και η σταθερά γι' αυτήν είναι βέλτιστη.

Γενικά τώρα, έστω $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_{\mathbb{R}^n} f^2\,dx = 1$. Ειδικότερα, $f \in L^2_{dx}(\mathbb{R}^n)$. Το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ είναι κανονικό και ο $\mathbb{R}^n$ είναι τοπικά συμπαγής. Επομένως, $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^2_{dx}(\mathbb{R}^n)$ κι έτσι υπάρχει ακολουθία $(f_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $f_n \to f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε ότι $\mathrm{Ent}_{dx}(f_n^2) \to \mathrm{Ent}_{dx}(f^2)$ και $\mathcal{E}(f_n) \to \mathcal{E}(f)$ και αφού πριν δείξαμε ότι $\mathrm{Ent}_{dx}(f_n^2) \leqslant \frac{n}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{n\pi e}\cdot\mathcal{E}(f_n)\right)$ το ζητούμενο έπεται. □

Παρατήρηση 3.3.11. Η Ευκλείδεια λογαριθμική ανισότητα Sobolev (3.3.6) αποτελεί και λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας στον $\mathbb{R}^n$ με σταθερά $A = 0$. Συνεπώς, από την Πρόταση 3.3.3 ισχύει η ανισότητα Nash στον $\mathbb{R}^n$ με $A = 0$, δηλαδή

$$\|f\|_2^{n+2} \leqslant [C\cdot\mathcal{E}(f)]^{\frac{n}{2}}\cdot\|f\|_1^2 = C^{\frac{n}{2}}\cdot\|\nabla f\|_2^n\cdot\|f\|_1^2.$$

Παίρνοντας υπόψη και την Παρατήρηση 3.3.8 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_B f^2\,dx \leqslant 2\cdot C\cdot(\mu(B))^{\frac{n}{2}}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2\,dx,$$

η οποία είναι γνωστή ως ανισότητα Faber-Krahn.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ούλτρα-συσταλτότητα

4.1 Ούλτρα-συσταλτότητα και φράγματα για πυρήνες θερμότητας

Σε αυτή την παράγραφο θα μας είναι βολικό να διατυπώνουμε διάφορα αποτελέσματα εμφύτευσης μέσω της νόρμας τελεστή

$$\|P_t\|_{p,q} = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \|P_t f\|_q = \sup\{\|P_t f\|_q : \|f\|_p \leqslant 1\},$$

όπου $P_t : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$, $1 \leqslant p < q < \infty$. Με αυτό το συμβολισμό, η υπερσυσταλτότητα είναι ισοδύναμη με τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev και ισχυρίζεται ότι $\|P_t\|_{p,q} \leqslant 1$ όταν ισχύει κατάλληλη σχέση μεταξύ των $1 < p < q < \infty$ και $t > 0$. Στην περίπτωση του μέτρου του Gauss γ_n, η απόδειξη της ισοδυναμίας της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev με την υπερσυσταλτότητα οφείλεται στον Gross. Θα αποδείξουμε το εξής γενικότερο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ και έστω $\beta > 0$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev*

$$\mathrm{Ent}_\mu(g^2) \leqslant \frac{2}{\beta}\mathcal{E}(g)$$

για κάθε $g \in D(\mathcal{E})$.

(β) *Για κάθε $p > 1$, για κάθε θετική $f \in L_p(\mu)$ και για κάθε $q, t > 0$ που ικανοποιούν την $\frac{q-1}{p-1} \leqslant \exp(2\beta t)$ ισχύει*

$$\|P_t f\|_q \leqslant \|f\|_p.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά β. Η πρώτη παρατήρηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι, για κάθε θετική f,

$$\frac{d}{dq}\left(\int_X f^q \, d\mu\right) = \int_X f^q \ln f \, d\mu = \frac{1}{q}\left(\mathrm{Ent}_\mu(f^q) + \int_X f^q \, d\mu \cdot \ln\left(\int_X f^q \, d\mu\right)\right).$$

Από την άλλη πλευρά, για σταθερό $q > 1$, με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_X (P_tf)^q\,d\mu\right) &= q\int_X (P_tf)^{q-1}\mathcal{L}P_tf\,d\mu\\ &= -q(q-1)\int_X (P_tf)^{q-2}\Gamma(P_tf)\,d\mu,\end{aligned}$$

όπου

$$\Gamma(g) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(g^2) - g\,\mathcal{L}g.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $f^{q/2}$ παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^q) \leqslant \frac{q^2}{2\beta}\int_X f^{q-2}\Gamma(f)\,d\mu. \tag{4.1.1}$$

Για $t \geqslant 0$ και $q > 1$ ορίζουμε

$$\Lambda(t,q) = \int_X (P_tf)^q\,d\mu.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες ταυτότητες και την (4.1.1) βλέπουμε ότι

$$\frac{d}{dq}\Lambda \leqslant -\frac{1}{2\beta(q-1)}\,\frac{d}{dt}\Lambda + \frac{1}{q}\Lambda\ln\Lambda.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

$$H(t) = \frac{1}{q(t)}\ln\Lambda(t,q(t)),$$

όπου $q(t) = 1 + (p-1)e^{2\beta t}$, παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $H' \leqslant 0$. Άρα, η H είναι φθίνουσα. Ειδικότερα, η $H(t) \leqslant H(0)$ παίρνει τη μορφή

$$\Lambda(t,q(t))^{1/q(t)} \leqslant \Lambda(0,q(0))^{1/q(0)},$$

δηλαδή

$$\left(\int_X (P_tf)^{q(t)}\,d\mu\right)^{1/q(t)} \leqslant \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η $\|P_tf\|_{q(t)} \leqslant \|f\|_p$ για κάποιο $p > 1$, παραγωγίζοντας στο σημείο $t = 0$ παίρνουμε την (4.1.1) με $q = p$, η οποία είναι ισοδύναμη με τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev (αν αντικαταστήσουμε την f με την $f^{2/p}$). $\square$

Η έννοια της ούλτρα-συσταλτότητας παίζει, σε σχέση με τις ανισότητες Sobolev, τον ίδιο ρόλο με αυτόν που παίζει η υπερ-συσταλτότητα σε σχέση με τις λογαριθμικές ανισότητες Sobolev. Ιστορικά, η θεωρία της ούλτρα-συσταλτοτητας αναπτύχθηκε για να εκφράσει το ότι η ισχύς της ανισότητας Sobolev για μια τριάδα Markov (E,μ,Γ) συνεπάγεται ότι η ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ της τριάδας απεικονίζει τον $L^1(\mu)$ στον $L^\infty(\mu)$. Τότε, από παρεμβολή, απεικονίζει τον $L^p(\mu)$ στον $L^q(\mu)$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Πιο συγκεκριμένα, η ούλτρα-συσταλτότητα εξετάζει τον ρυθμό με τον οποίο φθίνει η $\|P_t\|_{1,\infty}$ σαν συνάρτηση του $t > 0$. Θα μας χρειαστεί να θυμηθούμε ότι αν η $\|P_t\|_{1,\infty}$ είναι πεπερασμένη τότε οι τελεστές $P_t, t > 0$ αναπαρίστανται από έναν πυρήνα πυκνότητας στον $L^\infty(\mu\otimes\mu)$, όπου μ είναι το αναλλοίωτο μέτρο, με την έννοια ότι για κάθε $t > 0$ υπάρχει συμμετρική μετρήσιμη συνάρτηση $p_t(x,y)$ στο χώρο γινόμενο $E \times E$ τέτοια ώστε, μ-σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει $\int_E p_t(x,y)^2 d\mu(y) < \infty$,

$$P_t f(x) = \int_E f(y) p_t(x,y)\, d\mu(y)$$

και $\|P_t\|_{1,\infty} = \|p_t(\cdot,\cdot)\|_\infty$ στον $L^\infty(E \times E, \mu \otimes \mu)$.

Το επόμενο θεώρημα εκφράζει την ισοδυναμία των ανισοτήτων Sobolev και των ομοιόμορφων φραγμάτων για πυρήνες θερμότητας.

Θεώρημα 4.1.2 (θεώρημα ούλτρα-συσταλτότητας)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$. Έστω $n > 2$ η διάσταση Sobolev. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ ισχύει με σταθερές $A \geqslant 0$, $C > 0$.*

(ii) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $0 < t \leqslant 1$,*

$$\|P_t\|_{1,2} \leqslant \frac{C}{t^{n/4}}.$$

(iii) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $0 < t \leqslant 1$,*

$$\|P_t\|_{1,\infty} \leqslant \frac{C}{t^{n/2}}.$$

Αν $A = 0$ τότε η ισοδυναμία των (ii) *και* (iii) *ισχύει για κάθε $t > 0$.*

Παρατήρηση 4.1.3. Η υπόθεση $n > 2$ είναι απαραίτητη μόνο για να ισχύει η $S_n(A,C)$ στο (i) και όχι για τα φράγματα ούλτρα-συσταλτότητας (ii) και (iii). Για την ακρίβεια, η απόδειξη θα γίνει μέσω της ανισότητας Nash, κάτι που μας επιτρέπει να θεωρήσουμε κάθε $n > 0$.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε με την ισοδυναμία των (ii) και (iii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Υποθέτουμε ότι $\|P_t\|_{1,2} \leqslant K(t) := \frac{C}{t^{n/4}}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $[L^p(\mu)]^* \simeq L^q(\mu)$, όπου $1 < p < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και $[L^1(\mu)]^* \simeq L^\infty(\mu)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|P_t\|_{2,\infty} &= \sup\{\|P_t f\|_\infty : \|f\|_2 \leqslant 1\} = \sup\left\{\int P_t f \cdot g\, d\mu : \|f\|_2 \leqslant 1, \|g\|_1 \leqslant 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int f \cdot P_t g\, d\mu : \|f\|_2 \leqslant 1, \|g\|_1 \leqslant 1\right\} = \sup\{\|P_t g\|_2 : \|g\|_1 \leqslant 1\} = \|P_t\|_{1,2}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|P_t\|_{2,\infty} \leqslant K(t).$$

Όμως, $P_t = P_{t/2} \circ P_{t/2}$. Συνεπώς,

$$\|P_t\|_{1,\infty} \leqslant \|P_{t/2}\|_{1,2} \|P_{t/2}\|_{2,\infty} \leqslant K(t/2)^2 = \frac{C^2}{t^{n/2}}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα παρεμβολής των Riesz-Thorin (μια απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα).

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω* $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *χώροι μέτρου,* $p_1,p_2,q_1,q_2\in[1,\infty]$ *και* $T: L^{p_1}(\mu)+L^{p_2}(\mu)\to L^{q_1}(\nu)+L^{q_2}(\nu)$ *γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε*

$$\|Tf\|_{L^{q_1}}\leqslant K_1\|f\|_{L^{p_1}}\quad \textit{και}\quad \|Tf\|_{L^{q_2}}\leqslant K_2\|f\|_{L^{p_2}}.$$

Τότε, για κάθε $\vartheta\in[0,1]$ *ισχύει*

$$\|Tf\|_{L^{q_\vartheta}}\leqslant K_1^{\vartheta}K_2^{1-\vartheta}\|f\|_{L^{p_\vartheta}},$$

όπου $\frac{1}{p_\vartheta}=\frac{\vartheta}{p_1}+\frac{1-\vartheta}{p_2}$ *και* $\frac{1}{q_\vartheta}=\frac{\vartheta}{q_1}+\frac{1-\vartheta}{q_2}$.

Στην περίπτωσή μας, ο P_t ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος για $p_1=1$, $q_1=\infty$ με $K_1=\frac{C}{t^{n/2}}$ και για $p_2=q_2=1$ με $K_2=1$. Επιλέγοντας $\vartheta=1/2$ βρίσκουμε $p_\vartheta=1$, $q_\vartheta=2$ και $K_1^{\vartheta}K_2^{1-\vartheta}=\frac{\sqrt{C}}{t^{n/4}}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Riesz-Thorin παίρνουμε

$$\|P_t\|_{1,2}=\|P_t\|_{p_\vartheta,q_\vartheta}\leqslant\frac{\sqrt{C}}{t^{n/4}}.$$

Συνεχίζουμε με την ισοδυναμία των (i) και (ii).

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι από την ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ έπεται η ανισότητα του Nash

$$\|f\|_2^{n+2}\leqslant\big(A\|f\|_2^2+C\cdot\mathcal{E}(f)\big)^{n/2}\|f\|_1^2.$$

Θεωρούμε θετική μετρήσιμη συνάρτηση $f\in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f\,d\mu=1$. Ορίζουμε

$$\Lambda(t)=\int_E(P_tf)^2d\mu,\qquad t\geqslant 0.$$

Τότε,

$$\Lambda'(t)=\int_E\frac{d}{dt}(P_tf)^2d\mu=\int_E 2P_tf\cdot\frac{d}{dt}P_tf\,d\mu=2\int_E P_tf\cdot\mathcal{L}P_tf\,d\mu=-2\mathcal{E}(P_tf).$$

Επίσης, αφού $\int_E f\,d\mu=1$ έχουμε

$$\int_E P_tf\,d\mu=1,\qquad t\geqslant 0.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Nash για την P_tf και έχουμε

$$\|P_tf\|_2^{n+2}\leqslant\big(A\|P_tf\|_2^2+C\cdot\mathcal{E}(P_tf)\big)^{n/2}\|P_tf\|_1^2=\big(A\|P_tf\|_2^2+C\cdot\mathcal{E}(P_tf)\big)^{n/2},$$

δηλαδή

$$\left(\int_E(P_tf)^2d\mu\right)^{\frac{n+2}{2}}\leqslant\left(A\cdot\Lambda(t)-\frac{C}{2}\Lambda'(t)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Άρα,

$$\Lambda(t)\leqslant\left(A\cdot\Lambda(t)-\frac{C}{2}\Lambda'(t)\right)^{\frac{n}{n+2}}. \tag{4.1.2}$$

Θέτοντας $\vartheta = \frac{2}{n+2}$, οπότε $1-\vartheta = \frac{n}{n+2}$, ξαναγράφουμε την τελευταία ανισότητα στη μορφή

$$\Lambda(t) \leqslant \left(A \cdot \Lambda(t) - \frac{C}{2}\Lambda'(t) \right)^{1-\vartheta}, \qquad t \geqslant 0.$$

Ορίζουμε $r = \frac{\vartheta}{1-\vartheta} = \frac{2}{n}$ και $\lambda = \frac{2Ar}{C}$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto \varphi(t) := e^{\lambda t}(1 - A \cdot \Lambda^{-r}(t))$, $t \geqslant 0$ είναι φθίνουσα. Πράγματι,

$$\varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} A \cdot \Lambda^{-\frac{2}{n}}(t) + \frac{2}{n} e^{\lambda t} A \cdot \Lambda^{-\frac{n+2}{n}}(t) \cdot \Lambda'(t),$$

όμως από την (4.1.2) έχουμε

$$\Lambda'(t) \leqslant \frac{2}{C} A \cdot \Lambda(t) - \frac{2}{C}\Lambda(t)^{\frac{n+2}{n}} = \frac{\lambda}{r}\Lambda(t) - \frac{\lambda}{Ar}\Lambda^{\frac{n+2}{2}}(t),$$

άρα

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\leqslant \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} A \cdot \Lambda^{-\frac{2}{n}}(t) + e^{\lambda t} A \cdot \frac{2}{n} \Lambda^{-\frac{n+2}{n}}(t) \frac{\lambda}{r} \Lambda(t) - \frac{2}{n} e^{\lambda t} A \frac{\lambda}{Ar} \\ &= \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} A \cdot \Lambda^{-\frac{2}{n}}(t) - \lambda A e^{\lambda t} \Lambda^{-\frac{2}{n}}(t) - \lambda e^{\lambda t} = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε $\varphi(t) \leqslant \varphi(0)$. Με άλλα λόγια,

$$1 - A \cdot \Lambda^{-r}(t) \leqslant \frac{1 - A \cdot \Lambda^{-r}(0)}{e^{\lambda t}},$$

άρα

$$\Lambda^r(t) \leqslant \frac{A e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - 1 + A \cdot \Lambda^{-r}(0)},$$

και τελικά

$$\Lambda(t) \leqslant \left(\frac{A}{1 - e^{-\lambda t} + A e^{-\lambda t} \Lambda^{-r}(0)} \right)^{1/r} \leqslant \left(\frac{A}{1 - e^{-\lambda t}} \right)^{1/r}.$$

Δηλαδή,

$$\Lambda(t) \leqslant \left(\frac{A}{1 - e^{-\frac{4A}{nC}t}} \right)^{n/2}. \tag{4.1.3}$$

Έστω $0 < t \leqslant 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $A > 0$ τότε, χρησιμοποιώντας την $e^x - 1 \geqslant x$, παρατηρούμε ότι

$$\frac{A}{1 - e^{-\frac{4A}{nC}t}} = \frac{A e^{\frac{4A}{nC}t}}{e^{\frac{4A}{nC}t} - 1} \leqslant \frac{nC e^{\frac{4A}{nC}}}{4t},$$

άρα

$$\Lambda(t) \leqslant \frac{C'}{t^{n/2}},$$

όπου $C' = \left(\frac{nC}{4}\right)^{n/2} e^{\frac{2A}{C}}$.

Αν $A = 0$ τότε παρατηρούμε ότι η (4.1.3) ισχύει για κάθε $A > 0$ (γιατί η ανισότητα Nash που ισχύει με $A = 0$ ισχύει και με οποιοδήποτε $A > 0$) οπότε

$$\Lambda(t) \leqslant \lim_{A \to 0} \left(\frac{A}{1 - e^{-\frac{4A}{nC}t}} \right)^{n/2} = \left(\frac{nC}{4t} \right)^{n/2} \leqslant \frac{C'}{t^{n/2}}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Δίνουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση $A > 0$. Η υπόθεσή μας μπορεί τότε να διατυπωθεί ως εξής: για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f\,d\mu = 1$ ισχύει

$$\Lambda(t) \leqslant C(1 + t^{-n/2}), \qquad t > 0. \tag{4.1.4}$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ μια αντιστρέψιμη ημιομάδα Markov. Τότε, οι συναρτήσεις $t \mapsto \ln \|P_t f\|_2^2$ και $t \mapsto \ln \mathcal{E}(P_t f, P_t f)$ είναι κυρτές.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο $\mathcal{L}$ είναι αυτοσυζυγής, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{E}(P_t f, P_t f) &= -\frac{d}{dt}\langle P_t f, \mathcal{L}P_t f\rangle_\mu \\
&= -\langle \mathcal{L}P_t f, \mathcal{L}P_t f\rangle_\mu - \langle P_t f, \mathcal{L}^2 P_t f\rangle_\mu \\
&= -2\|\mathcal{L}P_t f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Εισάγοντας αυτή την ταυτότητα στον επόμενο υπολογισμό παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\ln \|P_t f\|_2^2 &= \frac{4\|\mathcal{L}P_t f\|_2^2}{\|P_t f\|_2^2} - \frac{4\mathcal{E}(P_t f, P_t f)^2}{\|P_t f\|_2^4} \\
&= \frac{4}{\|P_t f\|_2^4}\Big(\|\mathcal{L}P_t f\|_2^2 \|P_t f\|_2^2 - \langle P_t f, \mathcal{L}P_t f\rangle_\mu^2\Big),
\end{aligned}$$

και αυτή είναι μια μη αρνητική ποσότητα από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Έπεται ότι η $t \mapsto \ln \|P_t f\|_2^2$ είναι κυρτή συνάρτηση.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος παρατηρούμε αρχικά ότι η μορφή Dirichlet ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy-Schwarz $\mathcal{E}(f,g)^2 \leqslant \mathcal{E}(f)\mathcal{E}(g)$. Κατόπιν, υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της $\ln \mathcal{E}(P_t f, P_t f)$ όπως κάναμε και στην απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού του λήμματος. $\square$

Αφού η $\ln \Lambda$ είναι κυρτή, για κάθε $\vartheta \in [0,1]$ και $t > 0$ έχουμε

$$\ln \Lambda(t) \leqslant \vartheta \ln \Lambda(t/\vartheta) + (1-\vartheta)\ln \Lambda(0),$$

άρα

$$\Lambda(t) \leqslant \Lambda(0)^{1-\vartheta}\Lambda(t/\vartheta)^{\vartheta} \leqslant \Lambda(0)^{1-\vartheta}\left(C\left(1 + \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^{-n/2}\right)\right)^{\vartheta}. \tag{4.1.5}$$

Σταθεροποιούμε $a > 0$ το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα και θέτουμε $\vartheta = at$ (πρατηρήστε ότι $\vartheta \in (0,1)$ αν το t είναι αρκετά μικρό). Αν $t = 0$ τότε στην (4.1.5) έχουμε ισότητα.

Παίρνοντας ανάπτυγμα Taylor στο $t = 0$ βλέπουμε ότι

$$-2\mathcal{E}(f) \leqslant \Lambda(0)\left(-a\ln \Lambda(0) + a\ln(C(1 + a^{n/2}))\right),$$

και επιλέγοντας $a = \frac{\mathcal{E}(f)}{\Lambda(0)}$ από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\ln \Lambda(0) \leqslant 2 + \ln\left(C\left(1 + \left(\frac{\mathcal{E}(f)}{\Lambda(0)}\right)^{n/2}\right)\right).$$

Με απλές πράξεις έπεται ότι

$$\ln\left(\frac{\Lambda(0)^{\frac{n}{2}+1}}{C(\Lambda(0)^{n/2}+\mathcal{E}(f)^{n/2})}\right)\leqslant 2,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\Lambda(0)^{\frac{n}{2}+1}\leqslant e^2C\left(\Lambda(0)^{n/2}+\mathcal{E}(f)^{n/2}\right)\leqslant K_1(\Lambda(0)+\mathcal{E}(f))^{n/2}$$

με $K_1=e^2C$. Αφού $\Lambda(0)=\int_E f^2\,d\mu$ και $\int_E f\,d\mu=1$, η τελευταία ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\|f\|_2^{n+2}\leqslant K_1(\|f\|_2^2+\mathcal{E}(f))^{n/2}\|f\|_1^2,$$

δηλαδή ικανοποιείται η ανισότητα του Nash. Τώρα έπεται και η ανισότητα Sobolev, συνεπώς η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 4.1.6. Στην προηγούμενη απόδειξη δεν επιδιώξαμε να βρούμε τις βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει το θεώρημα. Ωστόσο, αξίζει να αναφέρουμε ότι αν ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ με σταθερές $A\geqslant 0$ και $C>0$ τότε $\|P_t\|_{1,\infty}\leqslant C'/t^{n/2}$ για κάθε $0<t\leqslant 1$ (και για κάθε $t>0$ αν $A=0$), όπου

$$C'=\left(\frac{Cn}{2}\left(1+\frac{4A}{Cn}\right)\right)^{n/2}.$$

Πόρισμα 4.1.7. *Έστω ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$. Τότε, για κάθε p,q με $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ ισχύει*

$$\|P_t\|_{p,q}\leqslant\frac{C'}{t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}}$$

για κάθε t με $0<t<1$ αν $A>0$ και κάθε t με $t>0$ αν $A=0$, όπου η σταθερά C' εξαρτάται από τις σταθερές A,C και τα n,p,q. Επιπλέον, ο τελεστής $R_\lambda=(\lambda\cdot\mathrm{Id}-\mathcal{L})^{-1}:L^p(\mu)\to L^\infty(\mu)$ είναι φραγμένος για κάθε $\lambda>0$ αν ικανοποιείται η συνθήκη $p>\frac{n}{2}$. Όταν $p\leqslant\frac{n}{2}$, είναι φραγμενος από τον $L^p(\mu)$ στον $L^q(\mu)$ για $q<\frac{pn}{n-2p}$.

Απόδειξη. Αφού ισχύει η $S_n(A,C)$, ισοδύναμα έχουμε ότι $\|P_t\|_{1,\infty}\leqslant K_1:=C/t^{n/2}$. Θέτουμε $p_1=1$, $q_1=\infty$ και $p_2=q_2=q-\frac{q}{p}+1=\frac{pq-q+p}{p}$. Έχουμε

$$\|P_t\|_{p_2,q_2}=\sup\{\|P_tf\|_{q_2}:\|f\|_{p_2}\leqslant 1\}$$

και αφού ο P_t είναι συστολή σε κάθε $L^p(\mu)$ παίρνουμε $\|P_tf\|_{q_2}\leqslant\|f\|_{p_2}$, δηλαδή $\|P_t\|_{p_2,q_2}\leqslant K_2=1$.

Έστω $\vartheta\in[0,1]$. Γράφουμε $\frac{1}{p_\vartheta}=\frac{\vartheta}{p_1}+\frac{1-\vartheta}{p_2}$, δηλαδή $\frac{1}{p_\vartheta}=\vartheta+(1-\vartheta)\frac{p}{pq-q+p}$ και $\frac{1}{q_\vartheta}=(1-\vartheta)\frac{p}{pq-q+p}$. Επιλέγοντας $\vartheta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\in[0,1]$, βλέπουμε ότι

$$p_\vartheta=p\quad\text{και}\quad q_\vartheta=q.$$

Από το θεώρημα Riesz-Thorin παίρνουμε $\|P_t\|_{p_\vartheta,q_\vartheta}\leqslant K_1^\vartheta K_2^{1-\vartheta}$, δηλαδή

$$\|P_t\|_{p,q}\leqslant\frac{C'}{t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}},\tag{4.1.6}$$

όπου $C' = C^{\vartheta}$, και αυτό ισχύει για κάθε $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι αν $p > \frac{n}{2}$ τότε ο τελεστής $R_\lambda = (\lambda \cdot \mathrm{Id} - \mathcal{L})^{-1} : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ είναι φραγμένος. Από την (4.1.6) με $q = \infty$ έχουμε

$$\|P_t\|_{p,\infty} \leqslant C' t^{-\frac{n}{2p}}$$

για κάθε $0 < t \leqslant 1$. Επίσης, ο $P_t : L^p(\mu) \to L^\infty(\mu)$ είναι συστολή για κάθε $t \geqslant 0$ και αφού η $\|P_t\|_{p,\infty}$ φθίνει ως προς t παραμένει φραγμένη για $t \in [1,\infty]$. Άρα, υπάρχει σταθερά $C > 0$ (που εξαρτάται από τα p, A, C') τέτοια ώστε $\|P_t\|_{p,\infty} \leqslant C$ στο $[1,\infty]$ και $\|P_t\|_{p,\infty} \leqslant C t^{-\frac{n}{2p}}$ στο $(0,1]$.

Επιπλέον, ο τελεστής R_λ έχει αναπαράσταση της μορφής

$$R_\lambda = \int_0^\infty P_t \cdot e^{-\lambda t} dt, \qquad \lambda > 0.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in L^p(\mu)$ με $\|f\|_p \leqslant 1$ έχουμε

$$|R_\lambda(f)| \leqslant \int_0^\infty |P_t f| e^{-\lambda t} dt \leqslant \int_0^\infty \|P_t\|_{p,\infty} e^{-\lambda t} dt,$$

άρα

$$\begin{aligned} \|R_\lambda\|_{p,\infty} &\leqslant \int_0^\infty \|P_t\|_{p,\infty} e^{-\lambda t} dt \leqslant C \int_0^1 t^{-\frac{n}{2p}} dt + C \int_1^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{c \cdot 2p}{2p - n} + \frac{C}{\lambda e^\lambda} < C \left(\frac{2p}{2p-n} + \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση $p \leqslant \frac{n}{2}$ παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $f \in L^p(\mu)$ με $\|f\|_p \leqslant 1$ και κάθε $g \in L^{q'}(\mu)$ με $\|g\|_{q'} \leqslant 1$, όπου q' είναι ο συζυγής εκθέτης του q, έχουμε

$$\left| \int_E R_\lambda(f) g \, d\mu \right| \leqslant \int_0^\infty \left(\int_E |P_t f| \cdot |g| \, d\mu \right) e^{-\lambda t} dt \leqslant \int_0^\infty \|P_t f\|_q e^{-\lambda t} dt,$$

άρα

$$\|R_\lambda f\|_q \leqslant \int_0^\infty \|P_t f\|_q e^{-\lambda t} dt \leqslant \int_0^\infty \|P_t\|_{p,q} e^{-\lambda t} dt,$$

συνεπώς

$$\|R_\lambda\|_{p,q} \leqslant \int_0^\infty \|P_t\|_{p,q} e^{-\lambda t} dt.$$

Τώρα,

$$\|R_\lambda\|_{p,q} \leqslant C' \int_0^1 t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} e^{-\lambda t} dt + C' \int_1^\infty e^{-\lambda t} dt,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\|R_\lambda\|_{p,q} \leqslant C'(n,p,q,\lambda)$. $\square$

Για την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε το εξής.

Θεώρημα 4.1.8 (ανισότητα Poincaré)**.** *Έστω (E,μ,Γ) πλήρης τριάδα Markov με ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ισχύει η ανισότητα Poincaré $P(C)$: για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$,*

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C\,\mathcal{E}(f).$$

(β) *Για κάθε $f \in L^2(\mu)$ και $t \geqslant 0$*

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant e^{-2t/C}\mathrm{Var}_\mu(f).$$

(γ) *Για κάθε $f \in L^2(\mu)$ υπάρχει σταθερά $c(f) > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $t \geqslant 0$,*

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant c(f) \cdot e^{-2t/C}.$$

Απόδειξη. Για το $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: Έχουμε ότι ικανοποιείται η ανισότητα Poincaré, δηλαδή

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C\,\mathcal{E}(f).$$

Το μέτρο μ είναι αναλλοίωτο, οπότε ισχύει $\int_E P_t f\,d\mu = \int_E f\,d\mu$ κι έτσι $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_E (P_t f)^2\,d\mu - \left(\int_E f\,d\mu\right)^2$. Τότε,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Var}_\mu(P_t f) = \frac{d}{dt}\int_E (P_t f)^2\,d\mu = 2\int_E P_t f \mathcal{L} P_t f\,d\mu = -2\mathcal{E}(P_t f)$$

Τώρα, ορίζουμε $\Lambda(t) = e^{2t/C} \cdot \mathrm{Var}_\mu(P_t f)$. Τότε,

$$\Lambda'(t) = 2/C \cdot e^{2t/C} \cdot \mathrm{Var}_\mu(P_t f) - e^{2t/C} \cdot 2 \cdot \mathcal{E}(P_t f)$$

και λόγω της υπόθεσης αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Poincaré για την $P_t f$ είναι $\mathrm{Var}_\mu(P_t f)\frac{1}{C} \leqslant \mathcal{E}(P_t f)$ οπότε προκύπτει ότι $\Lambda'(t) \leqslant 0$. Θεωρώντας ως μεταβλητή το $s \in [0,t]$ και ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα, ββλέπουμε ότι $\Lambda(t) \leqslant \Lambda(0)$ για κάθε $t \geqslant 0$. Ισοδύναμα,

$$e^{2t/C} \cdot \mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant \mathrm{Var}_\mu(f),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

(β) $\Longrightarrow$ (α): Έστω $f \in \mathcal{A}$ με $\int_E f\,d\mu = 0$. Από το ανάπτυγμα Taylor για τον $P_t = e^{t\mathcal{L}}$ έχουμε $P_t f = f + t\mathcal{L}f + o(t)$, άρα

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t f) = \int_E f^2\,d\mu + 2t\int_E f\mathcal{L}f\,d\mu + o(t) = \mathrm{Var}_\mu(f) - 2t\mathcal{E}(f) + o(t)$$

αφού $\int_E f\,d\mu = 0$. Όμοια, από ανάπτυγμα Taylor για την $e^{-2t/C}$ έχουμε

$$e^{-2t/C} \cdot \mathrm{Var}_\mu(P_t f) = (1 - 2t/C + o(t)) \cdot \mathrm{Var}_\mu(f).$$

Από την υπόθεση ισχύει ότι $\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant e^{-2t/C}\mathrm{Var}_\mu(f)$ και σε συνδυασμό με τα προηγούμενα παίρνουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(f) + 2t\int_E f\mathcal{L}f\,d\mu + o(t) \leqslant \mathrm{Var}_\mu(f) - \frac{2t}{C}\mathrm{Var}_\mu(f) + o(t)$$

Διαιρώντας με t, και στέλνοντάς το στη συνέχεια στο 0, παίρνουμε

$$-\mathcal{E}(f) \leqslant -1/C\mathrm{Var}_\mu(f) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant C\mathcal{E}(f),$$

που είναι η ανισότητα Poincaré.

Η συνεπαγωγή (β) $\Longrightarrow$ (γ) είναι προφανής.

(γ) $\Longrightarrow$ (β): Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 4.1.9. *Έστω $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί την $g(t) \leqslant M - \delta \cdot t$ για κάποιους M,δ και για κάθε $t \geq 0$. Τότε, $g(t) \leqslant g(0) - \delta \cdot t$, για κάθε $t \geqslant 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $g'(t) \leqslant -\delta$ για κάθε $t \geqslant 0$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $s \geqslant 0$ ισχύει ότι $g'(s) = -r > -\delta$. Αφού η g' είναι αύξουσα, πρέπει να ισχύει $g'(t) \geqslant -r$ για κάθε $t \geqslant s$. Άρα,

$$g(t) \geqslant g(s) - r \cdot (t - s)$$

για κάθε $t \geqslant s$. Τότε,

$$M - rs - g(s) \geq (\delta - r)\, t$$

και αφού $\delta - r > 0$, στέλνοντας το $t \to \infty$ καταλήγουμε σε άτοπο. □

Από την (4.1.5) έχουμε ότι η συνάρτηση $t \mapsto \ln \|P_t f\|_2^2$ είναι κυρτή και εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα γι' αυτήν. Απο το (γ), υποθέτοντας για απλότητα ότι $\int_E f\, d\mu = 0$, έχουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t f) = \int_E (P_t f)^2\, d\mu \leqslant c(f) e^{-2t/C} \Rightarrow \ln \|P_t f\|_2^2 \leqslant \ln c(f) - 2t/C,$$

και θέτοντας $M = \ln c(f)$, από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε

$$\ln \|P_t f\|_2^2 \leqslant \ln \|P_0 f\|_2^2 - 2t/C = \ln \|f\|_2^2 - 2t/C$$

και άρα $\|P_t f\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2 \cdot e^{-2t/C}$ για κάθε $t \geqslant 0$. Ισοδύναμα παίρνουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t f) \leqslant e^{-2t/C} \cdot \mathrm{Var}_\mu(f)$$

για κάθε $t \geqslant 0$. □

Πρόταση 4.1.10. *Έστω (E, μ, Γ) πλήρης τριάδα Markov, όπου μ μέτρο πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες Sobolev $S_n(A, C_1)$ και Poincaré $P(C_2)$. Τότε, υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $T > 0$ που εξαρτώνται μόνο από τα A, C_1, C_2 και n, τέτοιες ώστε οι πυρήνες πυκνότητας πιθανοτητας $p_t(x, y)$, $t > 0$, $(x, y) \in E \times E$ του P_t ως προς το μέτρο μ να ικανοποιούν την*

$$|p_t(x, y) - 1| \leqslant C e^{-t/C_2}$$

για κάθε $t \geqslant T$ και $\mu \otimes \mu$-σχεδόν για κάθε $(x, y) \in E \times E$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε την πρόταση για $T = 2$. Για κάθε $t > 0$ θεωρούμε τον τελεστή $P_t^\circ f = P_t f - \int_E f\, d\mu$ ο οποίος έχει πυρήνα πιθανότητας τον $p_t(x, y) - 1$. Πράγματι, αν $P_t f(x, y) = \int_E f(y) p_t(x, y)\, d\mu(y)$ είναι η αναπαράσταση του P_t τότε

$$\begin{aligned} P_t^\circ f(x) = P_t f(x) - \int_E f(y)\, d\mu(y) &= \int_E f(y) p_t(x, y)\, d\mu(y) - \int_E f(y)\, d\mu(y) \\ &= \int_E f(y)(p_t(x, y) - 1)\, d\mu(y). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση ισχύει η $S_n(A, c)$. Από το Θεώρημα 4.1.2 υπάρχει σταθερά $C' > 0$ τέτοια ώστε

$$\|P_t^\circ\|_{1,\infty} \leqslant C' t^{-n/2} \quad \text{για κάθε } \ 0 < t \leqslant 1.$$

Οπότε, για $t = 1$ έχουμε

$$\|P_1^\circ\|_{1,\infty} \leqslant C'.$$

Επίσης, πάλι από το Θεώρημα 4.1.2 ισχύει

$$\|P_t^\circ\|_{1,2} \leqslant \sqrt{C'}t^{-n/4} \quad \text{για κάθε } 0 < t \leqslant 1.$$

Άρα,

$$\|P_1^\circ\|_{1,2} \leqslant \sqrt{C'}.$$

Στην απόδειξη του ίδιου θεωρήματος είχαμε δει ότι, λόγω δυϊσμού, $\|P_t^\circ\|_{2,\infty} \leqslant \sqrt{C'}t^{-n/4}$, άρα

$$\|P_1^\circ\|_{2,\infty} \leqslant \sqrt{C'}.$$

Από την υπόθεση ισχύει η ανισότητα Poincaré $P(C_2)$. Από τις ισοδυναμίες του προηγούμενου θεωρήματος παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(P_t^\circ f) &\leqslant e^{-\frac{2t}{C_2}} \mathrm{Var}_\mu(f) = e^{-\frac{2t}{C_2}} \left(\int_E f^2 d\mu - \left(\int_E f\, d\mu \right)^2 \right) \\ &\leqslant e^{-\frac{2t}{C_2}} \int_E f^2 d\mu. \end{aligned}$$

Αφού $\int_E P_t^\circ f\, d\mu = 0$, έχουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(P_t^\circ f) = \|P_t^\circ f\|_2^2.$$

Άρα, $\|P_t^\circ f\|_2^2 \leqslant e^{-2t/C_2}\|f\|_2^2$, δηλαδή

$$\|P_t^\circ f\|_2 \leqslant e^{-t/C_2}\|f\|_2.$$

Όμως είναι $P_{2+t}^\circ = P_1^\circ \circ P_t^\circ \circ P_1^\circ$, κι έτσι έχουμε

$$\|P_{2+t}^\circ\|_{1,\infty} \leqslant \|P_1^\circ\|_{1,2}\|P_t^\circ\|_{2,2}\|P_1^\circ\|_{2,\infty} \leqslant \sqrt{C'}e^{-t/C_2}\sqrt{C'} = C'e^{-t/C_2}.$$

Αφού ο P_{2+t}° έχει πυρήνα τον $p_{2+t}(x,y) - 1$ και $\|P_t^\circ\|_{1,\infty} \leqslant C'e^{-t/C_2}$ έχουμε $|p_{2+t}(x,y) - 1| \leqslant C'e^{-t/C_2}$ για κάθε $t \geqslant 0$ και $\mu \otimes \mu$-σχεδόν παντού για κάθε $(x,y) \in E \times E$. Ισοδύναμα, η

$$|p_t(x,y) - 1| \leqslant C'e^{-t/C_2}e^{2/C_2} = Ce^{-t/C_2}$$

ισχύει (με $C = C'e^{2/C_2}$) για κάθε $t \geqslant 2 = T$, $\mu \otimes \mu$ σχεδόν για κάθε $(x,y) \in E \times E$. □

4.2 Ούλτρα-συσταλτότητα και συμπαγείς εμφυτεύσεις

Αρχικά θα δώσουμε κάποιους γενικούς ορισμούς και θα αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που θα χρειαστούμε. Αν X, Y είναι δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ είναι γραμμικός τελεστής, λέμε ότι ο T είναι συμπαγής αν η κλειστή θήκη της εικόνας της μοναδιαίας μπάλας του X είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Ορισμός 4.2.1 (τελεστής Hilbert-Schmidt)**.** Ένας συμμετρικός και φραγμένος τελεστής $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, όπου $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, καλείται τελεστής Hilbert-Schmidt αν για κάποια ορθοκανονική βάση $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{H}$ ισχύει

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

Αποδεικνύεται ότι οι τελεστές Hilbert-Schmidt είναι συμπαγείς. Όταν $\mathcal{H} = L^2(\mu)$, κάθε τελεστής Hilbert-Schmidt T αναπαρίσταται από πυρήνα $k(x,y) \in L^2(\mu\otimes\mu)$, δηλαδή

$$Tf(x) = \int_E k(x,y)f(y)\,d\mu(y), \qquad x \in E$$

για κάθε $f \in L^2(\mu)$.

Από το θεώρημα ούλτρα-συσταλτότητας (Θεώρημα 4.1.2) γνωρίζουμε ότι αν ισχύει η ανισότητα Sobolev τότε έχουμε ιδιότητα ούλτρα-συσταλτότητας για την ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$. Άρα, αφού η νόρμα $\|P_t\|_{1,\infty}$ είναι πεπερασμένη, έπεται ότι υπάρχει φραγμένος πυρήνας πυκνότητας $p_t(x,y)$, $t > 0$, $(x,y) \in E \times E$, τέτοιος ώστε

$$P_tf(x) = \int_E p_t(x,y)f(y)\,d\mu(y), \qquad t > 0, x \in E.$$

Αν $\mu(E) < \infty$ τότε έχουμε

$$\int_E\int_E p_t^2(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) < \infty,$$

άρα ο $p_t(x,y)$ είναι πυρήνας Hilbert-Schmidt του P_t. Συνεπώς, ο P_t είναι συμπαγής τελεστής για κάθε $t > 0$.

Από τα παραπάνω έπεται το εξής:

Πόρισμα 4.2.2. *Αν ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ για ένα πεπερασμένο μέτρο μ, τότε οι τελεστές P_t, $t > 0$ είναι τελεστές Hilbert-Schmidt και το φάσμα του γεννήτορα $\mathcal{L}$ είναι διακριτό.*

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη συμπάγεια της εμφύτευσης από τον χώρο $D(\mathcal{E})$ στον $L^2(\mu)$, όπου στον $D(\mathcal{E})$ θεωρούμε τη νόρμα

$$\|f\|_{\mathcal{E}} = (\|f\|_2^2 + \mathcal{E}(f))^{1/2}.$$

Υπενθυμίζουμε το γενικό ορισμό της *συμπαγούς εμφύτευσης*:

Ορισμός 4.2.3. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα, όπου $X \subseteq Y$. Λέμε ότι ο X εμφυτεύεται συμπαγώς στον Y αν:

(i) Ο X εμφυτεύεται συνεχώς στον Y, δηλαδή υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Η εμφύτευση του X στον Y είναι συμπαγής τελεστής, δηλαδή κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_Y$ στον Y.

Αν ο Y είναι χώρος Banach τότε ένας ισοδύναμος ορισμός είναι να πούμε ότι ο ταυτοτικός τελεστής $i : X \to Y$ είναι συμπαγής.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ για ένα πεπερασμένο μέτρο μ. Τότε, για κάθε ακολουθία $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στο $D(\mathcal{E})$ η οποία είναι φραγμένη ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, υπάρχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στον $L^2(\mu)$.*

Απόδειξη. Αφού ισχύει η $S_n(A,C)$, από το Πόρισμα 4.2.2 έχουμε ότι ο P_t είναι συμπαγής τελεστής για κάθε $t>0$. Έστω $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $D(\mathcal{E})$. Αφού ο $D(\mathcal{E})$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^2(\mu)$, υπάρχει σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε $\sup_k \|f_k\|_{L^2(\mu)} \leqslant C\sup_k \|f_k\|_{\mathcal{E}} < C\cdot M$ για $M>0$ (από την υπόθεση, η $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$). Δηλαδή, η $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $L^2(\mu)$ και ο $L^2(\mu)$ είναι αυτοπαθής. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια f στον $L^2(\mu)$. Ειδικότερα, η (f_{k_l}) είναι ασθενώς φραγμένη, άρα και $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$-φραγμένη.

Γνωρίζουμε ότι ο P_t είναι συμπαγής τελεστής για κάθε $t>0$. Άρα, $P_t(f_{k_l}) \to P_t(f)$ ισχυρά στον $L^2(\mu)$, δηλαδή

$$\|P_t(f_{k_l}) - P_t(f)\|_{L^2(\mu)} \to 0.$$

[Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το εξής: αν X,Y είναι χώροι Banach και $T:X\to Y$ είναι συμπαγής τελεστής, τότε αν $x_n \xrightarrow{w} x$ στον X έχουμε $T(x_n)\to T(x)$ στον Y. Για την απόδειξη, παρατηρούμε αρχικά ότι αφού $x_n \xrightarrow{w} x$, η (x_n) είναι ασθενώς άρα και $\|\cdot\|_X$-φραγμένη, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_n, x\in B_X$. Έχουμε $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ διότι ο T είναι συνεχής. Όμως, η $\overline{T(B_X)}$ είναι συμαγής ως προς την $\|\cdot\|_Y$ και η ασθενής τοπολογία είναι ασθενέστερη από την τοπολογία που επάγει η $\|\cdot\|_Y$ και είναι και Hausdorff. Άρα, οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται στο $\overline{T(B_X)}$ και έτσι $T(x_n)\to T(x)$ στον Y ως προς την $\|\cdot\|_Y$.]

Για κάθε $l\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f_{k_l} - f\|_2 \leqslant \|f_{k_l} - P_t(f_{k_l})\|_2 + \|P_t(f_{k_l}) - P_t(f)\|_2 + \|P_t(f) - f\|_2.$$

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\int_E (f-P_tf)^2 d\mu = \|f-P_t(f)\|_2^2 \leqslant 2t\cdot\mathcal{E}(f).$$

Πράγματι θεωρώντας την $\Lambda(t) = \int_E (f-P_tf)^2 d\mu$ και παραγωγίζοντας, λόγω συμμετρίας και με ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\Lambda'(t) &= -2\int_E (f-P_tf)\mathcal{L}P_tf\,d\mu = -2\int_E f\cdot\mathcal{L}P_tf\,d\mu + 2\int_E P_tf\cdot\mathcal{L}P_tf\,d,\mu \\
&= 2\int_E f\cdot\mathcal{L}P_{t/2}(P_{t/2}f)d\mu - 2\mathcal{E}(P_tf) = 2\int_E f\cdot P_{t/2}\mathcal{L}(P_{t/2}f)d\mu - 2\mathcal{E}(P_tf) \\
&= 2\int_E \mathcal{L}(P_{t/2}f)\cdot P_{t/2}f\,d\mu - 2\mathcal{E}(P_tf) = 2\mathcal{E}(P_{t/2}f) - 2\mathcal{E}(P_tf) \leqslant 2\mathcal{E}(f)
\end{aligned}$$

διότι έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση $t\mapsto\mathcal{E}(P_tf)$ είναι φθίνουσα.

Με βάση τον ισχυρισμό έχουμε

$$\|f_{k_l} - P_t(f_{k_l})\|_2^2 \leqslant 2t\cdot\mathcal{E}(f_{k_l}),$$

και αφού $\sup_{l\in\mathbb{N}}\mathcal{E}(f_{k_l}) < \infty$, αφήνοντας το $l\to\infty$ και στη συνέχεια αφήνοντας το $t\to 0$ έχουμε $\|P_t(f_{k_l}) - P_t(f)\|_2 \to 0$, $\|f_{k_l} - P_t(f_{k_l})\|_2 \to 0$ και $\|P_t(f)-f\|_2\to 0$. Τελικά, $\|f_{k_l} - f\|_2 \to 0$, δηλαδή $f_{k_l}\to f$ στον $L^2(\mu)$. □

Με ανάλογα επιχειρήματα, αν περιοριστούμε σε φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ οδηγουμαστε στο θεώρημα Rellich-Kondrachov.

Θεώρημα 4.2.5 (Rellich-Kondrachov)**.** *Έστω $\mathcal{O}$ ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$\|f\|^2_{H^1(\mathcal{O})} := \int_{\mathcal{O}} f^2 dx + \int_{\mathcal{O}} |\nabla f|^2 dx,$$

όταν η f είναι διαφορίσιμη με συμπαγή φορέα στο $\mathcal{O}$ και $H^1(\mathcal{O})$ είναι η πλήρωση αυτής της κλάσης των συναρτήσεων την οποία βλέπουμε ως υπόχωρο του $L^2(\mathcal{O}, dx)$. Τότε, η εμφύτευση του $H^1(\mathcal{O})$ στον $L^2(\mathcal{O}, dx)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την στερεγραφική προβολή. Έστω $N = (0, \dots, 0, 1)$ και $x \in \mathbb{S}^n$ με $x \neq N$. Θεωρούμε την ευθεία y που διέρχεται από τα x, N και τέμνει τον $\mathbb{R}^n$ στο

$$T(x) = \left(\frac{x_0}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right),$$

όπου $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Η αντίστροφή της δίνεται από την

$$T^{-1}(x) = \left(\frac{2x_0}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{1 + |x|^2}, \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2} \right).$$

Η $T : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to T(\mathbb{S}^n \setminus \{N\})$ αποτελεί χάρτη. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της T^{-1} είναι ίση με

$$|J_{T^{-1}}| = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^{-n} = \frac{1}{2^n} (1 + |x|^2)^n.$$

Τότε, αν $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\Gamma(f) = \frac{1}{4} (1 + |x|^2)^2 |\nabla f|^2,$$

όπου $\Gamma(f)$ είναι ο τελεστής carré du champ στην $\mathbb{S}^n$ και $|\nabla f|^2$ ο τελεστής carré du champ στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης έχουμε

$$d\mu(x) = c_n \frac{dx}{(1 + |x|^2)^n}$$

όπου $c_n = 2^n$ είναι η σταθερά που κανονικοποιεί το μ σε μέτρο πιθανότητας και dx είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Το μ είναι η εικόνα του μέτρου σ της σφαίρας υπό την στερεογραφική προβολή.

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{\mathcal{E}} &= \int_{\mathbb{S}^n \setminus N} \Gamma(f)\, d\sigma + \int_{\mathbb{S}^n \setminus N} f^2\, d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{O}} f^2(Tx) |\det J_T|\, d\mu + \int_{\mathcal{O}} \Gamma\left(f(Tx) \right) |\det J_T|\, d\mu \\ &= \int_{\mathcal{O}} f^2(Tx)\, dx + \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{4} (1 + |x|^2)^2 |\nabla f(Tx)|^2\, dx \end{aligned}$$

Το $\mathcal{O}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, άρα $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}(1 + |x|^2)^2 \leqslant M$ για $1 < M < \infty$ οπότε προκύπτει ότι $\frac{1}{4}\|f\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{\mathcal{E}} \leqslant M\|f\|_{H^1(\mathcal{O})}$, δηλαδή η νόρμα $\|f\|_{H^1(\mathcal{O})}$ ισοδυναμεί με τη νόρμα Dirichlet $\|f\|_{\mathcal{E}}$ στη σφαίρα. Επίσης από τα παραπάνω προκύπτει ότι και οι L^2-νόρμες στη σφαίρα και στα ανοιχτά και φραγμένα υποσύνολα $\mathcal{O}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες.

Άρα, τα μέτρα $d\mu$, dx και οι τελεστές carré du champ είναι ισοδύναμα για τη συνήθη Λαπλασιανή και τη Λαπλασιανή Δ στη σφαίρα, και συγκρίνονται μέσω της $d\mu(x) = 2^n(1+|x|^2)^{-n}dx$.

Έστω (f_n) φραγμένη ακολουθία στον $H^1(\mathcal{O})$. Αφού $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{O})} \sim \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, αν ισχύει η $S_n(A,C)$ για $\mu(E) < \infty$ (εδώ έχουμε $\mu(E) = 1$ και η (f_n) είναι φραγμένη ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$) έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) η οποία συγκλίνει στον $L^2(\mathcal{O}, dx)$.

Δείξαμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία (f_n) στον $H^1(\mathcal{O})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στον $L^2(\mathcal{O}, dx)$. Άρα, ο $H^1(\mathcal{O})$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $L^2(\mathcal{O}, dx)$. □

4.3 Ανισότητες Sobolev σε χώρους γινόμενα

Αν ισχύουν οι ανισότητες Sobolev $S_{n_1}(A_1, C_1)$ και $S_{n_2}(A_2, C_2)$ στους χώρους E_1 και E_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_{n_1+n_2}(A, C)$ στο χώρο γινόμενο $E_1 \times E_2$ με σταθερές $A \geq 0, C > 0$ οι οποίες εξαρτώνται από τα $A_i \geq 0, C_i > 0$ και $n_i > 2$, $i = 1, 2$. Οι βέλτιστες σταθερές δεν περιγράφονται εύκολα στην περίπτωση αυτή, ωστόσο η παράμετρος n συμπεριφέρεται ως παράμετρος διάστασης.

Ο απλούστερος τρόπος για να δείξουμε ότι η ανισότητα Sobolev εξακολουθεί να ισχύει σε χώρους γινόμενα είναι μέσω του θεωρήματος ούλτρα-συσταλτότητας. Πράγματι, για $i = 1, 2$ ο $P_i : L^1(\mu_i) \to L^\infty(\mu_i)$ είναι φραγμένος τελεστής στο χώρο E_i με $\|P_i\|_{1,\infty} \leqslant K_i$ λόγω ούλτρα-συσταλτότητας (αφού ισχύει η ανισότητα Sobolev στον E_i) και τότε ο τελεστής γινόμενο

$$P_1 \otimes P_2 : L^1(\mu_1 \otimes \mu_2) \to L^\infty(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

είναι φραγμένος, με $\|P_1 \otimes P_2\|_{1,\infty} \leqslant K_1 \cdot K_2$. Παίρνοντας $K_i = C_i \cdot t^{-n_i/2}$ και λαμβάνοντας υπόψη τις ισοδυναμίες του Θεωρήματος 4.1.2 συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα Sobolev ισχύει στο χώρο γινόμενο $E_1 \times E_2$.

Στην επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα με μια διαφορετική προσέγγιση, ξεκινώντας από το γεγονός ότι η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας ισοδυναμεί με μία οικογένεια λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev όπως έχουμε δείξει στην Παρατήρηση 3.3.6.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω (E_i, μ_i, Γ_i) πλήρεις τριάδες Markov για $i = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι λογαριθμικές ανισότητες εντροπίας-ενέργειας στους χώρους αυτούς με διάσταση $n_i > 2$ και σταθερές $A_i = A$ και $C_i = \frac{C}{n_i}$ για $A \geq 0, C > 0$ και $i = 1, 2$. Τότε, στο χώρο γινόμενο $(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2)$ ισχύει η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln\left(A + \frac{C}{n} \cdot \mathcal{E}(f)\right)$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\, d\mu = 1$, όπου $E = E_1 \times E_2, \mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ και $n = n_1 + n_2$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.1 θα χρειαστεί να δείξουμε πρώτα την «ευστάθεια» της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev ως προς χώρους γινόμενα:

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $(E_1, \mu_1, \Gamma_1), (E_2, \mu_2, \Gamma_2)$ τριάδες Markov. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι λογαριθμικές ανισότητες Sobolev $LS(C_1, D_1)$ και $LS(C_2, D_2)$ στις παραπάνω τριάδες αντιστοίχως. Τότε, στο χώρο γινόμενο $(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2)$ ικανοποιείται η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(\max(C_1, C_2), D_1 + D_2)$*

Απόδειξη. Μια άμεση απόδειξη δίνεται μέσω του γενικού θεωρήματος ούλτρα-συσταλτότητας του Gross (Θεώρημα 4.1.1). Έστω $\{P_t^1\}_{t\geq 0}$ και $\{P_t^2\}_{t\geq 0}$ ημιομάδες Markov στους χώρους (E_1, μ_1, Γ_1) και (E_2, μ_2, Γ_2) αντίστοιχα. Από την υπόθεση ισχύουν οι λογαριθμικές ανισότητες Sobolev, και από το Θεώρημα 4.1.1 ισοδύναμα παίρνουμε ότι οι $P_t^i : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ είναι φραγμένοι με

$$\|P_t^i f\|_q \leqslant e^{M_i} \cdot \|f\|_p$$

για $t > 0$ με $e^{2t/C_i} \geq \frac{q-1}{p-1}$ για $i = 1, 2$. Τότε, η νόρμα του $P_t^1 \otimes P_t^2$ είναι φραγμένη από τον $L^p(\mu_1 \otimes \mu_2)$ στον $L^q(\mu_1 \otimes \mu_2)$ με

$$\|P_t^1 \otimes P_t^2\|_{p,q} \leqslant e^{M_1+M_2}$$

για $e^{2t/\max(C_1,C_2)} \geq \frac{q-1}{p-1}$. □

Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την Πρόταση 4.3.1

Απόδειξη. Έχουμε δείξει (Παρατήρηση 3.3.6) ότι οι λογαριθμικές ανισότητες εντροπίας-ενέργειας ισοδυναμούν με μια οικογένεια λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev. Συγκεκριμένα, για $i = 1, 2$, στην τριάδα Markov (E_i, μ_i, Γ_i) η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2) \leqslant \Phi_i'(r_i) \cdot \mathcal{E}_i(f) + \Psi_i(r_i)$$

για $r_i \in (0, \infty)$ και για κάθε $f \in D(\mathcal{E}_i)$ με $\int_{E_i} f^2\, d\mu_i = 1$, όπου

$$\Phi_i(r) = \frac{n_i}{2} \cdot \ln(A_i + C_i r) = \frac{n_i}{2} \cdot \ln\left(A + \frac{Cr}{n_i}\right)$$

και

$$\Psi_i(r) = \Phi_i(r) - r \cdot \Phi_i'(r)$$

για $r > 0$. Έχουμε

$$\Phi_i'(r) = \frac{C}{2\left(A + \frac{Cr}{n_i}\right)}$$

και

$$\Psi_i(r) = \frac{n_i}{2}\left[\ln\left(A + \frac{Cr}{n_i}\right) - \frac{\frac{Cr}{n_i}}{A + \frac{Cr}{n_i}}\right]$$

για κάθε $r > 0$. Για να εισάγουμε διάσταση επιλέγουμε $\frac{r_i}{n_i} = \frac{r}{n}, r > 0$ με $n = n_1 + n_2$ έτσι ώστε

$$\Phi_1'(r_1) = \Phi_2'(r_2) = \frac{C}{2\left(A + \frac{Cr}{n}\right)},$$

και τότε,

$$\Psi_1(r_1) = \frac{n_1}{2}\left[\ln\left(A + \frac{Cr}{n}\right) - \frac{\frac{Cr}{n}}{A + \frac{Cr}{n}}\right] \quad , \quad \Psi_2(r_2) = \frac{n_2}{2}\left[\ln\left(A + \frac{Cr}{n}\right) - \frac{\frac{Cr}{n}}{A + \frac{Cr}{n}}\right].$$

Άρα,

$$\Psi_1(r_1) + \Psi_2(r_2) = \frac{n}{2}\left[\ln\left(A + \frac{Cr}{n}\right) - \frac{\frac{Cr}{n}}{A + \frac{Cr}{n}}\right]$$

αφού $n = n_1+n_2$. Τότε, αφού ισχύουν οι $\mathrm{Ent}_{\mu_i}(f^2) \leqslant \Phi_i'(r_i)\cdot\mathcal{E}_i(f)+\Psi_i(r_i)$, από την Πρόταση 4.3.2 προκύπτει ότι στο χώρο γινόμενο $(E_1\times E_2, \mu_1\otimes\mu_2, \Gamma_1\otimes\Gamma_2)$ ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(\max(C_1, C_2), D_1 + D_2)$, δηλαδή

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\Phi_1'(r_1)\mathcal{E}(f) + (\Psi_1(r_1) + \Psi_2(r_2)) \cdot \int_E f^2\, d\mu,$$

και αφού $\int_E f^2\, d\mu = 1$, ισοδύναμα παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_{\mu_1\otimes\mu_2}(f^2) \leqslant \frac{C}{A+\frac{Cr}{n}} \cdot \mathcal{E}(f) + \frac{n}{2} \cdot \left[\ln\left(A + \frac{Cr}{n}\right) - \frac{\frac{Cr}{n}}{A+\frac{Cr}{n}}\right].$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την Παρατήρηση 3.3.6, βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα ισοδυναμεί με τη λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας

$$\mathrm{Ent}_{\mu_1\otimes\mu_2}(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln\left(A + \frac{C}{n} \cdot \mathcal{E}(f)\right),$$

όπου $n = n_1 + n_2$, στο χώρο γινόμενο $(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2)$. □

Παρατήρηση 4.3.3. Όταν $A = 0$, μέσω της προηγούμενης πρότασης οδηγούμαστε στο εξής αποτέλεσμα: η Ευκλείδεια λογαριθμική ανισότητα Sobolev

$$\mathrm{Ent}_{dx}(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{n\pi e} \cdot \mathcal{E}(f)\right)$$

αποτελεί και λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας για $A = 0$. Άρα, εξακολουθεί να ισχύει και σε χώρους γινόμενα τριάδων Markov.

Παρατήρηση 4.3.4. Με την υπόθεση ότι ισχύει η ανισότητα $\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln(A + C\cdot\mathcal{E}(f))$ για την τριάδα (E, μ, Γ), εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.3.1 για k-δυνάμεις, $k \geq 1$, έχουμε

$$\mathrm{Ent}_{\mu^{\otimes k}}(f^2) \leqslant \frac{kn}{2} \ln\left(A + \frac{C}{k} \cdot \mathcal{E}(f)\right)$$

όπου $\mu^{\otimes k} = \mu\otimes\cdots\otimes\mu$ (k-φορές), για κάθε f στο χώρο γινόμενο $E^k = E\times\cdots\times E$ με $\int_{E^k} f^2\, d\mu^{\otimes k} = 1$. Αν $A = 1$, στέλνοντας το $k \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι η $LS\left(\frac{Cn}{4}\right)$ ισχύει στον απειροδιάστατο χώρο γινόμενο.

4.4 Ανισότητες Sobolev και Lipschitz-συναρτήσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι στην περίπτωση που το μέτρο μας είναι πεπερασμένο και ισχύει η ανισότητα Sobolev, τότε οι Lipschitz συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Δίνουμε αρχικά κάποιους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 4.4.1 (φυσική απόσταση)**.** Η συνάρτηση απόστασης ως προς τον γεννήτορα $\mathcal{L}$ και την επεκτεταμένη άλγεβρα $\mathcal{A}$, ορίζεται ως εξής:

$$d(x, y) = \mathrm{esssup}[f(x) - f(y)]$$

για $(x, y) \in E \times E$, όπου το esssup υπολογίζεται πάνω από όλες τις φραγμένες συναρτήσεις $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες $\Gamma(f) \leqslant 1$. Ορίζουμε ως διάμετρο την $L^\infty(E \times E, \mu \otimes \mu)$-νόρμα της συνάρτησης απόστασης $d(x, y)$.

Ορισμός 4.4.2. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε μια τριάδα Markov διάχυσης (E, μ, Γ) με επεκτεταμένη άλγεβρα $\mathcal{A}$ θα καλείται Lipschitz αν $f \in \mathcal{A}$ και $\Gamma(f) \in L^\infty(\mu)$. Επιπλέον, ορίζουμε την Lipschitz-ημινόρμα

$$\|f\|_{Lip} = \|\Gamma(f)\|_\infty^{\frac{1}{2}}.$$

Η f θα λέγεται 1-Lipschitz αν $\|f\|_{Lip} \leqslant 1$.

Η διάμετρος της τριάδας Markov (E, μ, Γ) ορίζεται από την

$$D(E, \mu, \Gamma) := \sup\{\|\tilde{f}\|_\infty : \|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1\},$$

όπου $\tilde{f}(x, y) = f(x) - f(y)$, $(x, y) \in E \times E$, και η νόρμα υπολογίζεται στο $L^\infty(E \times E, \mu \times \mu)$.

Αν η διάμετρος είναι πεπερασμένη, κάθε Lipschitz συνάρτηση η οποία είναι πεπερασμένη μ-σχεδόν παντού είναι φραγμένη. Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι αν ισχύει η ανισότητα Sobolev (άρα και η λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας) τότε η διάμετρος είναι πεπερασμένη.

Πρόταση 4.4.3. *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov, όπου το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι ισχύει η αυστηρή λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2} \cdot \ln\left(1 + C \cdot \mathcal{E}(f)\right)$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\, d\mu = 1$. Τότε, η διάμετρος $D = D(E, \mu, \Gamma)$ είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(r) = \frac{n}{2}\ln(1 + Cr)$, για $r \geq 0$. Για μία κάθε φραγμένη και 1-Lipschitz συνάρτηση f ορίζουμε

$$Z(s) = \int_E e^{sf}\, d\mu, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Τότε, $Z'(s) = \int_E f \cdot e^{sf}\, d\mu$. Ορίζουμε επίσης

$$F(s) = \frac{1}{s}\ln Z(s)$$

όπου $F(0) = \int_E f\, d\mu$ και για κάθε $s \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F'(s) = -\frac{1}{s^2}\ln Z(s) + \frac{1}{sZ(s)}Z'(s).$$

Θα εφαρμόσουμε την λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας για τη συνάρτηση $e^{sf/2}$, $s \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_\mu\left((e^{sf/2})^2\right) = \mathrm{Ent}_\mu(e^{sf}) &= \int_E e^{sf}\ln e^{sf}\, d\mu - \int_E e^{sf}\, d\mu \cdot \ln\int_E e^{sf}\, d\mu \\ &= s\int_E fe^{sf}\, d\mu - \int_E e^{sf}\, d\mu \cdot \ln\int_E e^{sf}\, d\mu \\ &= sZ'(s) - Z(s)\ln Z(s).\end{aligned}$$

Από την ιδιότητα διάχυσης έχουμε $\Gamma(\psi(f)) = (\psi'(f))^2\Gamma(f)$. Εφαρμόζοντας αυτή την ταυτότητα για την $\psi(f) = e^{sf/2}$ παίρνουμε $\Gamma(e^{sf/2}) = \frac{s^2}{4}e^{sf}\Gamma(f)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(e^{sf/2}) &= \int_E \Gamma(e^{sf/2})\,d\mu = \frac{s^2}{4}\int_E e^{sf}\Gamma(f)\,d\mu \\ &\leqslant \frac{s^2}{4}\int_E e^{sf}\,d\mu = \frac{s^2}{4}Z(s)\end{aligned}$$

αφού από την υπόθεση ότι η f είναι 1-Lipschitz έπεται ότι $\Gamma(f) \leqslant 1$. Η συνάρτηση ln είναι αύξουσα και οι παραπάνω ποσότητες θετικές, άρα έχουμε

$$\frac{n}{2}\ln\left(1 + C\mathcal{E}(e^{sf/2})\right) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1 + C\frac{s^2}{4}Z(s)\right).$$

Τότε, από τη λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας έχουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(e^{sf}) \leqslant \frac{n}{2}\ln(1 + C\mathcal{E}(e^{sf/2}).$$

Ισοδύναμα,

$$sZ'(s) \leqslant Z(s)\ln Z(s) + n/2\ln\left(1 + C\frac{s^2}{4}Z(s)\right),$$

ή αλλιώς,

$$F'(s) = \frac{1}{s}\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s^2}\ln(Z(s)) \leqslant \frac{1}{s^2}\frac{1}{Z(s)}\frac{n}{2}\ln\left(1 + C\frac{s^2}{4}Z(s)\right).$$

Τώρα, αν η f έχει μέση τιμη 0, από την ανισότητα Jensen έπεται ότι $Z(s) \geq 1$, και $\left(1 + C\frac{s^2}{4}Z(s)\right) \leqslant \left(1 + C\frac{s^2}{4}\right)^{Z(s)}$. Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$F'(s) \leqslant \frac{1}{s^2}\Phi\left(\frac{s^2}{4}\right)$$

για $s \neq 0$. Ολοκληρώνοντας, για κάθε $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}&F(s) - F(0) \leqslant \int_0^s \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du \\ &\iff 1/s\ln\int_E e^{sf}\,d\mu - \int_E f\,d\mu \leqslant \int_0^s \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du \\ &\iff \ln\int_E e^{sf}\,d\mu - s\int_E f\,d\mu \leqslant s\int_0^s \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du \\ &\iff \int_E e^{sf}\,d\mu \cdot e^{-s\int_E f\,d\mu} \leqslant \exp\left(s\int_0^s \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du\right) \\ &\iff \int_E e^{s(f-\int_E f\,d\mu)}\,d\mu \leqslant \exp\left(s\int_0^s \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du\right),\end{aligned}$$

και στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε ολοκληρώνοντας στο $[s, 0]$ αν $s < 0$, άρα ισχύει για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$C' = \int_0^\infty \frac{1}{u^2}\Phi(u^2/4)\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\Phi(x^2)\,dx.$$

Η ποσότητα αυτή είναι πεπερασμένη, αφού

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\Phi(x^2)\,dx = \frac{n}{2}\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\ln(1+Cx^2)\,dx = nC/2 + \frac{n\sqrt{C}}{2}\pi < \infty.$$

Άρα,

$$\int_E e^{s\left(f-\int_E f\,d\mu\right)}\,d\mu \leqslant e^{sC'}, \qquad s\in\mathbb{R}.$$

Παίρνοντας την $-f$ στη θέση της f, από την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\int_E e^{s\left(-f+\int_E f\,d\mu\right)}\,d\mu \leqslant e^{sC'}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, για κάθε $s \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu\left(|f-\int_E f\,d\mu| \geq C'+\varepsilon\right)&\\
&\leqslant \mu\left(f-\int_E f\,d\mu \geq C'+\varepsilon\right)+\mu\left(-f+\int_E f\,d\mu \geq C'+\varepsilon\right)\\
&= \mu\left(e^{s\left(f-\int_E f\,d\mu\right)} \geq e^{s(C'+\varepsilon)}\right)+\mu\left(e^{s\left(-f+\int_E f\,d\mu\right)} \geq e^{s(C'+\varepsilon)}\right)\\
&\leqslant e^{-s(C'+\varepsilon)}\int_E e^{s\left(f-\int_E f\,d\mu\right)}\,d\mu + e^{-s(C'+\varepsilon)}\int_E e^{s\left(-f+\int_E f\,d\mu\right)}\,d\mu\\
&\leqslant e^{-s(C'+\varepsilon)}e^{sC'} + e^{-s(C'+\varepsilon)}e^{sC'} = 2e^{-s\varepsilon}
\end{aligned}$$

που τείνει στο 0 καθώς το $s\to\infty$ (στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Chebyshev-Markov). Όμως,

$$\|g\|_\infty = \inf\left\{\alpha \geq 0 : \mu\left(\{x : |g(x)| > \alpha\}\right) = 0\right\}.$$

Επομένως, $\|f-\int_E f\,d\mu\|_\infty \leqslant C'+\varepsilon$ και το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν. Άρα,

$$\|f-\int_E f\,d\mu\|_\infty \leqslant C' < \infty.$$

Τώρα, η f είναι 1-Lipschitz και $D = D(E,\mu,\Gamma) = \sup_{\|f\|_{Lip}\leqslant 1}\|f(x)-f(y)\|_\infty$. Συνεπώς, $D \leqslant C' < \infty$. □

Στη συνέχεια θα δούμε τη σχέση των Lipschitz συναρτήσεων με τους όγκους μπαλών, κάτω από την υπόθεση ότι ισχύει η ανισότητας Sobolev.

Πρόταση 4.4.4. *Έστω f θετική και 1-Lipschitz συνάρτηση στην τριάδα Markov (E,μ,Γ). Ορίζουμε $V(r) = \mu([f \leqslant r])$ για $r \geq 0$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ με $A \geq 0, C > 0$, και ότι για κάποιο $r_0 > 0$ ισχύει $V(r_0) < \infty$. Τότε, αν*

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\ln V(r)}{\ln r} < \infty,$$

υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$V(r) \geq c\cdot r^n$$

για κάθε $0 \leqslant r \leqslant 1$ (και αν $A = 0$, για κάθε $r \geq 0$).

Η Πρόταση 4.4.4 μας λέει ότι αν η $r \mapsto V(r)$ δεν φθίνει πολύ γρήγορα στο 0 καθώς $r \to 0$, τότε ο όγκος μικρών μπαλών είναι φραγμένος από κάτω από cr^n, όπου n είναι η διάσταση Sobolev.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f \in \mathcal{A}$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα $S_n(A, C)$ για ομαλές προσεγγίσεις των συναρτήσεων

$$g = \left(1 - \frac{f}{r}\right)_+, \qquad r > 0$$

οι οποίες ανήκουν στο $D(\mathcal{E})$ για r αρκετά μικρό υπό την προϋπόθεση ότι $V(r_0) < \infty$.

Παρατηρούμε ότι αν $f \leqslant r/2 < r$ τότε $-\frac{f}{r} \geq -\frac{1}{2}$ και $g = 1 - \frac{f}{r} \geq 1 - 1/2 = 1/2$, άρα $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{f \leqslant \frac{r}{2}\}} \leqslant g$. Αν πάλι $f \leqslant r$, τότε $g = 1 - \frac{f}{r} \leqslant 1$, οπότε $g \leqslant \mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}}$. Τελικά, έχουμε

$$\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{f \leqslant \frac{r}{2}\}} \leqslant g \leqslant \mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}}.$$

Ακόμη, αν $f \leqslant r$ τότε

$$\begin{aligned}
\Gamma(g) = \frac{1}{2}\mathcal{L}g^2 - g\mathcal{L}g &= \left[\frac{1}{2}\mathcal{L}\Big(1 - \frac{f}{r}\Big)^2 - \Big(1 - \frac{f}{r}\Big)\mathcal{L}\Big(1 - \frac{f}{r}\Big)\right]\mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} \\
&= \left[\frac{1}{2}\mathcal{L}\Big(1 - 2\frac{f}{r} + \frac{f^2}{r^2}\Big) + \Big(1 - \frac{f}{r}\Big)\frac{1}{r}\mathcal{L}f\right]\mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} \\
&= \left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}f^2 - f\mathcal{L}f\right)\right]\mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} = \frac{1}{r^2}\Gamma(f)\mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} \\
&\leqslant \frac{1}{r^2}\|\Gamma(f)\|_\infty \mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} \leqslant \frac{1}{r^2}\mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}},
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\|\Gamma(f)\|_\infty \leqslant 1$ αφού η f είναι 1-Lipschitz. Εφαρμόζουμε την $S_n(A, C)$ για την g και έχουμε

$$\|g\|_p^2 \leqslant A\|g\|_2^2 + C\mathcal{E}(g).$$

Όμως, $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{f \leqslant \frac{r}{2}\}} \leqslant g$ άρα $\frac{1}{2^p}\mathbf{1}_{\{f \leqslant \frac{r}{2}\}} \leqslant g^p$. Ολοκληρώνοντας ως προς μ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mu\left(\{f \leqslant \frac{r}{2}\}\right)^{1/p} \leqslant \|g\|_p \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{4}\mu\left(\{f \leqslant \frac{r}{2}\}\right)^{2/p} \leqslant \|g\|_p^2 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{4}V(r/2)^{2/p} \leqslant \|g\|_p^2.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$g \leqslant \mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}} \quad \Longrightarrow \quad \int_E g^2\, d\mu \leqslant \mu\left(\{f \leqslant r\}\right) \quad \Longrightarrow \quad \|g\|_2^2 \leqslant V(r)$$

και

$$\mathcal{E}(g) = \int_E \Gamma(g)\, d\mu \leqslant \frac{1}{r^2}\int_E \mathbf{1}_{\{f \leqslant r\}}\, d\mu = \frac{1}{r^2}\mu(\{f \leqslant r\}) = \frac{1}{r^2}V(r).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι από την $S_n(A, C)$ για την g έπεται ότι

$$\frac{1}{4}V(r/2)^{2/p} \leqslant AV(r) + C\frac{1}{r^2}V(r).$$

Τώρα, αφού $r \leqslant 1$ έχουμε $\frac{1}{r^2} + 1 \leqslant \frac{2}{r^2}$, και η παραπάνω ανισότητα δίνει

$$V(r/2)^{2/p} \leqslant \left(4A + \frac{1}{r^2}4C\right)V(r) \leqslant C_1\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)V(r) \leqslant \frac{2C_1}{r^2}V(r)$$

για κάποια σταθερά $C_1 > 0$ με $C_1 \geq \max\{4A, 4C\}$, και $p = \frac{2n}{n-2}$. Έχουμε

$$V(r/2)^{\frac{2}{p}} = V(r/2)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant \frac{2C_1}{r^2} V(r),$$

οπότε

$$V(r/2) \leqslant 2^{\frac{n}{n-2}} \frac{V(r)^{\frac{p}{2}} C_1^{\frac{n}{n-2}}}{r^{\frac{2n}{n-2}}}.$$

Τότε, αφού $\frac{1}{(r/2)^n} > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{V(r/2)}{(r/2)^n} &\leqslant 2^n 2^{\frac{n}{n-2}} \frac{V(r)^{\frac{p}{2}} C_1^{\frac{p}{2}}}{r^n r^{\frac{2n}{n-2}}} = 2^n 2^{\frac{n}{n-2}} \frac{V(r)^{\frac{p}{2}} C_1^{\frac{p}{2}}}{r^{\frac{n^2}{n-2}}} \\ &= 2^n 2^{\frac{p}{2}} \frac{V(r)^{\frac{p}{2}} C_1^{\frac{p}{2}}}{(r^n)^{\frac{p}{2}}},\end{aligned}$$

διότι $r^{\frac{n^2}{n-2}} = (r^n)^{\frac{p}{2}}$. Άρα,

$$\frac{1}{2^n} \frac{V(r/2)}{(r/2)^n} \leqslant \left(C_2 \frac{V(r)}{r^n} \right)^{\frac{p}{2}}, \tag{4.4.1}$$

όπου $C_2 = 2C_1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $r_1 \leqslant 1$ τέτοιος ώστε $C_2 \frac{V(r_1)}{r_1^n} = \alpha \leqslant 1$. Τότε, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, βλέπουμε ότι για κάθε $k \geq 1$ η (4.4.1) είναι ισοδύναμη με την

$$V(r_1/2^k) \leqslant 2^n \frac{\alpha^{(\frac{p}{2})^k} r_1^n}{2^{kn}}$$

για $p > 2$. Αφού $r_1 \leqslant 1 < 2^k$ για κάθε $k \geq 1$, έχουμε $\ln(r_1/2^k) < \ln 1 = 0$ διότι η ln είναι αύξουσα. Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{\ln V(r_1/2^k)}{\ln(r_1/2^k)} &\geq \frac{1}{\ln(r_1/2^k)} \ln\left(\frac{\alpha^{(\frac{p}{2})^k} r_1^n 2^n}{2^{kn}} \right) \\ &= \frac{\ln\left(\alpha^{(\frac{p}{2})^k}\right)}{\ln(r_1/2^k)} + \frac{1}{\ln(r_1/2^k)} \ln\left(2^n (r_1/2^k)^n\right) \\ &= \frac{\ln\left(\alpha^{(\frac{p}{2})^k}\right)}{\ln(r_1/2^k)} + \frac{\ln 2^n}{\ln(r_1/2^k)} + n.\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\frac{\ln V(r_1/2^k)}{\ln(r_1/2^k)} \geq \frac{(p/2)^k \ln \alpha}{\ln r_1 - k \ln 2} + \frac{n \ln 2}{\ln r_1 - k \ln 2} + n.$$

Τώρα, αφού $p/2 > 1$, το $(p/2)^k$ τείνει στο ∞ γρηγορότερα από το k. Οπότε, στέλνοντας το $k \to \infty$ έχουμε

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\ln V(r_1/2^k)}{\ln(r_1/2^k)} \geq \infty + 0 + n = \infty,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $\limsup_{r \to 0} \frac{\ln V(r)}{\ln r} < \infty$. Επομένως,

$$V(r) \geq c \cdot r^n$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ και κάθε $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Με την υπόθεση ότι $A = 0$ ακολουθούμε τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τοπικές ανισότητες Sobolev

5.1 Τοπικές ανισότητες Sobolev

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου, το οποίο θα διατυπωθεί παρακάτω, μας εξασφαλίζει τοπικές λογαριθμικές ανισότητες Sobolev υπό τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης. Αρχικά θα δείξουμε κάποια φράγματα κλίσης τα οποία θα μας χρειαστούν στην απόδειξη του θεωρήματος.

Θεώρημα 5.1.1 (ασθενές φράγμα κλίσης). *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov και $\rho \in \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας διάστασης $CD(\rho, \infty)$.*

(ii) *Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ και $t \geq 0$ ισχύει η ασθενής ανισότητα*

$$\Gamma(P_t f) \leqslant e^{-2\rho t} P_t(\Gamma(f)).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την (i) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε ότι ισχύει η $CD(\rho, \infty)$, δηλαδή $\Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f)$. Σταθεροποιούμε $t \geq 0$ και για $s \in [0, t]$ ορίζουμε

$$\Lambda(s) = P_s\left(\Gamma(P_{t-s} f)\right),$$

όπου $\Lambda(0) = \Gamma(P_t f)$. Για λόγους απλότητας θέτουμε $g = P_{t-s} f$, και έτσι $\Lambda(s) = P_s(\Gamma(g))$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Gamma(g) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}g^2 - g\mathcal{L}g\right) \\
&= -\mathcal{L}(P_{t-s} f \mathcal{L} P_{t-s} f) + (\mathcal{L} P_{t-s} f)^2 + P_{t-s} f \mathcal{L}^2 P_{t-s} f \\
&= -[\mathcal{L}(g\mathcal{L}g) - g\mathcal{L}^2 g - \mathcal{L}g\mathcal{L}g] = -2\Gamma(g, \mathcal{L}g).
\end{aligned}$$

Από την $\mathcal{L}P_s = P_s\mathcal{L}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda'(s) &= P_s\left(\mathcal{L}\Gamma(g) + \frac{d}{ds}\Gamma(g)\right) = P_s(\mathcal{L}\Gamma(g) - 2\Gamma(g, \mathcal{L}g)) = 2P_s(\Gamma_2(g)) \\
&\geq 2\rho P_s(\Gamma(g)) = 2\rho\Lambda(s),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από την υπόθεση (i) και τη γραμμικότητα της ημιομάδας. Από την παραπάνω ανισότητα, ισοδύναμα έχουμε

$$e^{-2\rho s}\Lambda'(s) - 2\rho e^{-2\rho s}\Lambda(s) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (\Lambda(s)e^{-2\rho s})' \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ παίρνουμε

$$\Lambda(t)e^{-2\rho t} \geq \Lambda(0) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma(P_t f) \leqslant e^{-2\rho t}P_t(\Gamma(f)),$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Δείχνουμε τώρα την αντίστροφη συνεπαγωγή (ii) $\Longrightarrow$ (i). Αφού η ασθενής ανισότητα $\Gamma(P_t f) \leqslant e^{-2\rho t}P_t(\Gamma(f))$ ισχύει ως ισότητα στο σημείο $t=0$, η ανισότητα διατηρείται αν την παραγωγίσουμε στο $t=0$. Άρα,

$$2\Gamma(f, \mathcal{L}f) \leqslant -2\rho\Gamma(f) + \mathcal{L}\Gamma(f).$$

Ισοδύναμα, αυτή γράφεται

$$\rho\Gamma(f) \leqslant \frac{1}{2}[\mathcal{L}\Gamma(f) - 2\Gamma(f, \mathcal{L}f)] = \Gamma_2(f),$$

δηλαδή ικανοποιείται η $CD(\rho, \infty)$. □

Όπως θα δούμε τώρα, η συνθήκη $CD(\rho,\infty)$ είναι ισοδύναμη και με μια ισχυρότερη ανισότητα, για την απόδειξη της οποίας θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 5.1.2. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov και $\rho \in \mathbb{R}$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ισχύει η $CD(\rho,\infty)$.*

(ii) *Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ ισχύει η ανισότητα*

$$\Gamma_2(f) \geq \rho\Gamma(f) + \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\Gamma(f))}{\Gamma(f)}.$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις διάχυσης σε τοπικές συντεταγμένες,

$$\Gamma(\psi(f), g) = \sum_i \partial_i\psi(f)\Gamma(f_i, g)$$

και

$$\mathcal{L}\psi(f) = \left(\sum_i \partial_i\psi(f)\right)\mathcal{L}f_i + \sum_{i,j}(\partial_i\partial_j\psi(f))\Gamma(f_i, f_j).$$

Για κάθε λεία συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ και κάθε $f = (f_1, \cdots, f_k) \in \mathcal{A}^k$ θέτουμε $X_i = \partial_i\psi(f)$ και $Y_{i,j} = \partial_i\partial_j\psi(f)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\Gamma_2(\psi(f)) &= \sum_{i,j} X_iX_j\Gamma_2(f_i, f_j) \\ &+ \sum_{i,j,l} X_iY_{jl}\left(\Gamma(f_j, \Gamma(f_i, f_l)) + \Gamma(f_l, \Gamma(f_i, f_j)) - \Gamma(f_i, \Gamma(f_j, f_l))\right) \\ &= \sum_{i,j,l,m} Y_{ij}Y_{lm}\Gamma(f_i, f_l)\Gamma(f_j, f_m),\end{aligned}$$

και η συνθήκη $CD(\rho,n)$ γράφεται

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{i,j} X_iX_j\Gamma_2(f_i,f_j)\\
&+\sum_{i,j,l} X_iY_{jl}\left(\Gamma(f_j,\Gamma(f_i,f_l))+\Gamma(f_l,\Gamma(f_i,f_j))-\Gamma(f_i,\Gamma(f_j,f_l))\right)\\
&+\sum_{i,j,l,m} Y_{ij}Y_{lm}\Gamma(f_i,f_l)\Gamma(f_j,f_m)-\rho\sum_{i,j}X_iX_j\Gamma(f_i,f_j).
\end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε κάποιο σημείο. Το δεξιό μέλος μπορεί να θεωρηθεί ως τετραγωνική μορφή με μεταβλητές X_i και $Y_{i,j}$. Θέτουμε $k=3$, $X_1=x$, $Y_{23}=Y_{32}=y$, και όλες τις άλλες μεταβλητές ίσες με 0. Επίσης θεωρούμε την $f=(g,g,h)$. Τότε, η

$$x^2(\Gamma_2(g)-\rho\Gamma(g))+2xy\Gamma(h,\Gamma(g))+2y^2(\Gamma(g)\Gamma(h)+\Gamma(g,h)^2)$$

είναι μη-αρνητική τετραγωνική μορφή των x,y. Ειδικότερα, η ορίζουσά της πρέπει να είναι μη αρνητική: έχουμε

$$\begin{aligned}
\Gamma(h,\Gamma(g))^2 &\leqslant 2(\Gamma_2(g)-\rho\Gamma(g))(\Gamma(g)\Gamma(h)+\Gamma(g,h)^2)\\
&\leqslant 4(\Gamma_2(g)-\rho\Gamma(g))\Gamma(g)\Gamma(h),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Θέτοντας $h=\Gamma(g)$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 5.1.3 (ισχυρό φράγμα κλίσης)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov και $\rho\in\mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho,\infty)$.*

(ii) *Για κάθε $f\in\mathcal{A}$ και $t\geq 0$ ισχύει η ισχυρή ανισότητα*

$$\sqrt{\Gamma(P_tf)}\leqslant e^{-\rho t}P_t\left(\sqrt{\Gamma(f)}\right).$$

Απόδειξη. Για την συνεπαγωγή (ii) $\Longrightarrow$ (i), παρατηρούμε ότι η ανισότητα της (ii) συνεπάγεται την ασθενή ανισότητα του θεωρήματος 5.1.1, αφού από την ανισότητα Jensen έχουμε $P_t\left(\sqrt{\Gamma(f)}\right)\leqslant\sqrt{P_t(\Gamma(f))}$, και σε συνδυασμό με την (ii) παίρνουμε

$$\Gamma(P_tf)\leqslant e^{-2\rho t}P_t(\Gamma(f)).$$

Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε ισοδύναμα ότι ισχύει η $CD(\rho,\infty)$.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (ii), σταθεροποιούμε $t\geq 0$ και, για $s\in[0,t]$, ορίζουμε

$$\Lambda(s)=P_s(\sqrt{\Gamma(g)})$$

όπου $g=P_{t-s}f$. Από την ιδιότητα διάχυσης για την $\varphi(r)=\sqrt{r}$ παίρνουμε

$$\mathcal{L}\sqrt{\Gamma(g)}=\frac{1}{2\sqrt{\Gamma(g)}}\mathcal{L}\Gamma(g)-\frac{1}{4\Gamma(g)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\Gamma(g)\right).$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ταυτότητα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda'(s) &= P_s\left[\mathcal{L}\sqrt{\Gamma(g)} + \frac{\frac{d}{ds}\Gamma(g)}{2\sqrt{\Gamma(g)}}\right] = P_s\left[\mathcal{L}\sqrt{\Gamma(g)} - \frac{\Gamma(g,\mathcal{L}g)}{\sqrt{\Gamma(g)}}\right] \\
&= P_s\left[\frac{1}{2\sqrt{\Gamma(g)}}\mathcal{L}\Gamma(g) - \frac{1}{4\Gamma(g)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\Gamma(g)\right) - \frac{\Gamma(g,\mathcal{L}g)}{\sqrt{\Gamma(g)}}\right] \\
&= P_s\left[\frac{1}{\sqrt{\Gamma(g)}}(\Gamma_2(g) - \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\Gamma(f)\right)}{\Gamma(f)})\right] \\
&\geq \rho P_s\left(\frac{\Gamma(g)}{\sqrt{\Gamma(g)}}\right) = \rho P_s\left(\sqrt{\Gamma(g)}\right) = \rho\Lambda(s),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-\rho s}$ έχουμε $(\Lambda(s)e^{-\rho s})' \geq 0$, και ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ παίρνουμε $\Lambda(t)e^{-\rho t} \geq \Lambda(0)$, ή ισοδύναμα,

$$e^{-\rho t}P_t\left(\sqrt{\Gamma(f)}\right) \geq \sqrt{\Gamma(P_tf)},$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.1.4. *Αν ισχύει η συνθήκη $CD(\rho,\infty)$, τότε για κάθε μη-αρνητική συνάρτηση $f \in \mathcal{A}$ και $t \geq 0$,*

$$\frac{\Gamma(P_tf)}{P_f} \leqslant e^{-2\rho t}P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.1.3 έχουμε ότι η $CD(\rho,\infty)$ είναι ισοδύναμη με την

$$\sqrt{\Gamma(P_tf)} \leqslant e^{-\rho t}P_t\left(\sqrt{\Gamma(f)}\right).$$

Επομένως, $\Gamma(P_tf) \leqslant e^{-2\rho t}P_t\left(\sqrt{\Gamma(f)}\right)^2$. Αφού $f > 0$ έχουμε και $P_tf > 0$, οπότε

$$\frac{\Gamma(P_tf)}{P_tf} \leqslant \frac{e^{-2\rho t}}{P_tf}P_t\left(\sqrt{\frac{\Gamma(f)}{f}}\sqrt{f}\right)^2 \leqslant e^{-2\rho t}P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right),$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwarz. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 5.1.5 (τοπική λογαριθμική ανισότητα Sobolev με διάσταση)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t\geq 0}$ και γεννήτορα $\mathcal{L}$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,n)$*

(ii) *Για κάθε $f \in \mathcal{A}_0^{',+}$ και κάθε $t \geq 0$,*

$$P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf) \geq P_t(f\mathcal{L}(\ln f))\left(1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_tf)\right). \tag{5.1.1}$$

(iii) *Για κάθε* $f \in \mathcal{A}_0^{',+}$ *και κάθε* $t \geq 0$,

$$P_t(f\ln f) - P_t f \ln P_t f \leqslant t\mathcal{L}P_t f + \frac{n}{2}P_t f \ln\left(1 - \frac{2t}{n}\frac{P_t(f\mathcal{L}(\ln f))}{P_t f}\right). \tag{5.1.2}$$

(iv) *Για κάθε* $f \in \mathcal{A}_0^{',+}$ *και κάθε* $t \geq 0$, *ισχύει*

$$P_t(f\ln f) - P_t f \ln P_t f \geq t\mathcal{L}P_t f - \frac{n}{2}P_t f \ln\left(1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_t f)\right). \tag{5.1.3}$$

Περιοριζόμαστε σε συναρτήσεις της κλάσης $\mathcal{A}_0^{',+}$ για λόγους ευκολίας στις πράξεις. Οι ανισότητες του θεωρήματος ισχύουν για κάθε θετική και φραγμένη συνάρτηση στην $\mathcal{A}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το σημαντικότερο βήμα (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Έχουμε υποθέσει την συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,n)$, δηλαδή για $f > 0$ (αφού έχουμε πάρει $f \in \mathcal{A}_0^{',+}$) ισχύει $\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$, μ-σχεδόν παντού. Ορίζουμε

$$\Lambda(s) = P_s(\varphi(P_{t-s}f))$$

για σταθεροποιημένο $t > 0$ και $s \in [0,t]$, όπου $\varphi(r) = r\ln r$, $r > 0$. Έχουμε $\varphi'(r) = 1 + \ln r$ και $\varphi''(r) = \frac{1}{r}$. Θέτουμε $g = P_{t-s}f$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης γράφουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda'(s) &= \frac{d}{ds}P_s(\varphi(g)) = \mathcal{L}P_s(\varphi(g)) = P_s(\mathcal{L}\varphi(g) - \frac{d}{ds}\varphi(g)\mathcal{L}g) \\
&= P_s(\mathcal{L}\varphi(g) - \varphi'(g)\mathcal{L}g) = P_s(\varphi''(g)\Gamma(g)) = P_s\left(\frac{\Gamma(g)}{g}\right) \\
&= P_s\left(\frac{\Gamma(P_{t-s}g}{P_{t-s}g}\right) = P_s(P_{t-s}f\Gamma(\ln P_{t-s}f)),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από την σχέση $\frac{1}{g}\Gamma(g) = g\Gamma(\ln g)$. Ορίζουμε $\psi = \varphi''$. Από την εξίσωση θερμότητας $\partial_s P_s = \mathcal{L}P_s = P_s\mathcal{L}$ έχουμε

$$\Lambda''(s) = P_s\left(\mathcal{L}(\psi(g)\Gamma(g)) - \psi'(g)\mathcal{L}g\Gamma(g) - 2\psi(g)\Gamma(g,\mathcal{L}g)\right).$$

Θέτουμε

$$E(g) = \mathcal{L}(\psi(g)\Gamma(g)) - \psi'(g)\mathcal{L}g\Gamma(g) - 2\psi(g)\Gamma(g,\mathcal{L}g).$$

Από τον ορισμό του τελεστή carré du champ έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(\psi(g)\Gamma(g)) = 2\Gamma(\psi(g),\Gamma(g)) + \Gamma(g)\mathcal{L}\psi(g) + \psi(g)\mathcal{L}\Gamma(g).$$

Όμως από την ιδιότητα διάχυσης, ισχύουν οι

$$\Gamma(\psi(g),\Gamma(g)) = \psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\psi(g) = \psi'(g)\mathcal{L}g + \psi''(g)\Gamma(g).$$

Επομένως,

$$\mathcal{L}(\psi(g)\Gamma(g)) = 2\psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \Gamma(g)(\psi'(g)\mathcal{L}g + \psi''(g)\Gamma(g)) + \psi(g)\mathcal{L}\Gamma(g).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\psi(g)\Gamma(g)) &= 2\psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \Gamma(g)\left(\psi'(g)\mathcal{L}g + \psi''(g)\Gamma(g)\right) + \psi(g)\mathcal{L}\Gamma(g)\\ &= 2\psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \psi'(g)\Gamma(g)\mathcal{L}g + \psi''(g)\Gamma(g)^2 + \psi(g)\mathcal{L}\Gamma(g).\end{aligned}$$

Έτσι, η $E(g)$ ισοδύναμα γράφεται

$$E(g) = 2\psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \psi''(g)\Gamma(g)^2 + 2\psi(g)\left[\frac{1}{2}\mathcal{L}\Gamma(g) - \Gamma(g,\mathcal{L}g)\right].$$

Όμως, $\frac{1}{2}\mathcal{L}\Gamma(g) - \Gamma(g,\mathcal{L}g) = \Gamma_2(g)$, και έτσι έχουμε

$$E(g) = 2\psi'(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \psi''(g)\Gamma(g)^2 + 2\psi(g)\Gamma_2(g).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης

$$\Gamma_2(\psi_1(g)) = \psi_1'(g)^2\Gamma_2(g) + \psi_1'(g)\psi_1''(g)\Gamma(g,\Gamma(g)) + \psi_1''(g)^2\Gamma(g)^2$$

για τη συνάρτηση $\psi_1(r) = \ln r$, $r > 0$, βλέπουμε ότι $E(g) = 2g\Gamma_2(\ln g)$. Πράγματι, είναι

$$\begin{aligned}\Gamma_2(\psi_1(g)) = \Gamma_2(\ln g) &= \frac{1}{g^2}\Gamma_2(g) - \frac{1}{g^3}\Gamma(g,\Gamma(g)) + \frac{1}{g^4}\Gamma(g)^2\\ &= \frac{1}{g^2}\Gamma_2(g) + \frac{1}{g^3}\left(\frac{1}{g}\Gamma(g)^2 - \Gamma(g,\Gamma(g))\right).\end{aligned}$$

Οπότε,

$$2g\Gamma_2(\ln g) - \frac{2}{g}\Gamma_2(g) = \frac{2}{g^2}\left(\frac{1}{g}\Gamma(g)^2 - \Gamma(g,\Gamma(g))\right) \tag{5.1.4}$$

Εφαρμόζοντας στην προηγούμενη έκφραση της $E(g)$ την $\psi(r) = \frac{1}{r}$, παίρνουμε

$$E(g) - \frac{2}{g}\Gamma_2(g) = \frac{2}{g^2}\left(\frac{1}{g}\Gamma(g)^2 - \Gamma(g,\Gamma(g))\right). \tag{5.1.5}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (5.1.4) και (5.1.5) παίρνουμε τη ζητούμενη

$$E(g) = 2g\cdot\Gamma_2(\ln g).$$

Συνεπώς, η δεύτερη παράγωγος της Λ ισούται με

$$\Lambda''(s) = 2P_s(P_{t-s}f\Gamma_2(\ln P_{t-s}f)).$$

Από την υπόθεση όμως έχουμε ότι $\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$ και την εφαρμόζουμε για την $\ln P_{t-s}f$ (αφού $f > 0$ και $t-s \geq 0$, έχουμε $P_{t-s}f > 0$). Παίρνουμε

$$\Gamma_2(\ln P_{t-s}f) \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}\ln P_{t-s}f)^2 \quad\Longrightarrow\quad nP_{t-s}f\Gamma_2(\ln P_{t-s}f) \geq P_{t-s}f(\mathcal{L}\ln P_{t-s}f)^2.$$

Αφού η διαφορά είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός και ο P_s γραμμικός τελεστής, συμπεραίνουμε ότι

$$2nP_s(P_{t-s}f\Gamma_2(\ln P_{t-s}f)) \geq 2P_s(P_{t-s}f(\mathcal{L}\ln P_{t-s}f)^2),$$

άρα
$$n\Lambda''(s) \geq 2P_s(P_{t-s}f(\mathcal{L}\ln P_{t-s}f)^2).$$
Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις $(P_{t-s}f)^{\frac{1}{2}}$ και $(P_{t-s}f)^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{[P_s(P_{t-s}f\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f))]^2}{P_sP_{t-s}f} &= \frac{\left[P_s\left((P_{t-s}f)^{\frac{1}{2}}(P_{t-s}f)^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f)\right)\right]^2}{P_sP_{t-s}f}\\ &\leqslant \frac{P_s\left(P_{t-s}fP_{t-s}f(\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f))^2\right)}{P_tf} = P_s\left(P_{t-s}f(\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f))^2\right).\end{aligned}$$

Είναι $\psi'(r) = \frac{1}{r}$ και $\psi''(r) = -\frac{1}{r^2}$. Χρησιμοποιούμε τον τύπο διάχυσης για την $\psi(P_{t-s}f) = \ln P_{t-s}f$, έχουμε
$$P_{t-s}f\mathcal{L}(\ln P_{t-s}f) = \mathcal{L}P_{t-s}f - P_{t-s}f\Gamma(\ln P_{t-s}f).$$
Έτσι, ο αριθμητής της προηγούμενης ανισότητας μετά από πράξεις γράφεται $2[\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(s)]^2$, οπότε για $s \in [0,t]$ έχουμε

$$\Lambda''(s) \geq \frac{2[\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(s)]^2}{nP_tf}. \tag{5.1.6}$$

Οι όροι $\mathcal{L}P_tf$ και P_tf σε αυτή τη διαφορική ανισότητα συμπεριφέρονται ως σταθερές. Θέτοντας $\alpha = \frac{2}{nP_tf}$ και ολοκληρώνοντας στο $[u,v]$ για κάθε $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant t$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_u^v \frac{\Lambda''(s)}{[\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(s)]^2}\,ds \geq \int_u^v \alpha\,ds\\ \Longrightarrow\ &\left[\frac{1}{\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(s)}\right]_u^v \geq \alpha(v-u)\\ \Longrightarrow\ &\frac{1}{\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(v)} - \frac{1}{\mathcal{L}P_tf - \Lambda'(u)} \geq \alpha(v-u).\end{aligned}$$

Άρα,

$$(\Lambda'(v) - \mathcal{L}P_tf) - (\Lambda'(u) - \mathcal{L}P_tf) \geq \alpha(v-u)(\Lambda'(v) - \mathcal{L}P_tf)(\Lambda'(u) - \mathcal{L}P_tf). \tag{5.1.7}$$

Για $u = 0$ και $v = t$ έχουμε

$$(P_t(f\Gamma(\ln f)) - \mathcal{L}P_tf) - (P_tf\Gamma(\ln P_tf) - \mathcal{L}P_tf) \tag{5.1.8}$$
$$\geq \alpha t\left(P_t(f\Gamma(\ln f)) - \mathcal{L}P_tf\right)\left(P_tf\Gamma(\ln P_tf) - \mathcal{L}P_tf\right). \tag{5.1.9}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση θερμότητας $\mathcal{L}P_t = P_t\mathcal{L}$ και την γραμμικότητα του P_t παίρνουμε
$$P_t(f\Gamma(\ln f)) - \mathcal{L}P_tf = P_t(f\Gamma(\ln f)) - P_t\mathcal{L}f = P_t(f\Gamma(\ln f) - \mathcal{L}f).$$
Από την ιδιότητα διάχυσης για $\varphi(r) = \ln r$, $r > 0$, έχουμε
$$\mathcal{L}\ln f = \frac{1}{f}\mathcal{L}f - \frac{1}{f^2}\Gamma(f) \quad\Longrightarrow\quad f\mathcal{L}\ln f = \mathcal{L}f - \frac{1}{f}\Gamma(f)$$
και
$$f\Gamma(\ln f) = \frac{1}{f}\Gamma(f).$$

Επομένως,

$$f\Gamma(\ln f) - \mathcal{L}f = -f\mathcal{L}\ln f.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$P_t(f\Gamma(\ln f) = -P_t(f\mathcal{L}\ln f).$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια την $P_t f\Gamma(\ln P_t f) - \mathcal{L}P_t f$: από την ιδιότητα διάχυσης είναι

$$P_t f\Gamma(\ln P_t f) = \frac{1}{P_t f}\Gamma(P_t f) = \mathcal{L}P_t f - P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f),$$

αφού $\mathcal{L}\ln P_t f = \frac{1}{P_t f}\mathcal{L}P_t f - \frac{1}{(P_t f)^2}\Gamma(P_t f)$. Άρα,

$$P_t f\Gamma(\ln P_t f) - \mathcal{L}P_t f = -P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f).$$

Έτσι, η ανισότητα (5.1.8) γράφεται

$$-P_t(f\mathcal{L}\ln f) + P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f) \geq \frac{2t}{nP_t f}\left(-P_t(f\mathcal{L}\ln f)\right)\left(-P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f)\right).$$

Άρα,

$$P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f) \geq P_t(f\mathcal{L}\ln f) + \frac{2t}{n}P_t(f\mathcal{L}\ln f)\mathcal{L}(\ln P_t f),$$

και τελικά παίρνουμε τη ζητούμενη

$$P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f) \geq P_t(f\mathcal{L}\ln f)\left(1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_t f)\right).$$

Στη συνέχεια δείχνουμε την ισοδυναμία του (ii) με τα (iii),(iv). Αφού $CD(0,n) \Longrightarrow CD(0,\infty)$, από το Πόρισμα 5.1.4, με $\rho = 0$, έχουμε

$$\frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f} \leqslant P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right).$$

Από αυτήν την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης $\mathcal{L}\varphi(f) = \varphi'(f)\mathcal{L}f + \varphi''(f)\Gamma(f)$ για την $\varphi(r) = \ln r$, παίρνουμε

$$P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f) \geq P_t(f\mathcal{L}(\ln f)).$$

Πράγματι, από την

$$f\mathcal{L}(\ln f) = \mathcal{L}f - \frac{1}{f}\Gamma(g)$$

και την γραμμικότητα της ημιομάδας, για κάθε $t \geq 0$ έχουμε

$$P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right) = P_t(\mathcal{L}f) - P_t\left(f\mathcal{L}(\ln f)\right).$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα διάχυσης, για την ίδια φ, παίρνουμε

$$P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f) = \mathcal{L}P_t f - \frac{1}{P_t f}\Gamma(P_t f).$$

Αφού $P_t\mathcal{L} = \mathcal{L}P_t$, έπεται ότι

$$\frac{\Gamma(P_tf)}{P_tf} = P_t(\mathcal{L}f) - P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf).$$

Τώρα, η $\frac{\Gamma(P_tf)}{P_tf} \leqslant P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right)$ ισοδύναμα γράφεται

$$P_t(\mathcal{L}f) - P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf) \leqslant P_t(\mathcal{L}f) - P_t(f\mathcal{L}(\ln f)),$$

απ' όπου έπεται η ζητούμενη

$$P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf) \geq P_t(f\mathcal{L}(\ln f)).$$

[Πράγματι, αφού $\frac{\Gamma(f)}{f} = \mathcal{L}f - f\mathcal{L}(\ln f)$, για κάθε $t \geq 0$ έχουμε

$$P_t\left(\frac{\Gamma(f)}{f}\right) = P_t(\mathcal{L}f) - P_t(f\mathcal{L}(\ln f)),$$

και, πάλι από την ιδιότητα διάχυσης,

$$P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf) = P_t(\mathcal{L}f) - \frac{\Gamma(P_tf)}{P_tf}.$$

Σε συνδυασμό με την παραπάνω ανισότητα έπεται το ζητούμενο.]

Συνδυάζοντας την ανισότητα αυτή με την υπόθεση (ii) του θεωρήματος παίρνουμε άμεσα ότι

$$1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_tf) > 0 \tag{5.1.10}$$

(καθώς αν $r \geq s(1+\alpha tr)$ και $r \geq s \geq 0$ τότε αναγκαστικά $1+\alpha tr > 0$). Επιπλέον, από την (5.1.8) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\alpha s - (\Lambda'(0) - \mathcal{L}P_tf)^{-1}} \leqslant \Lambda'(s) - \mathcal{L}P_tf \leqslant \frac{1}{\alpha(t-s) - (\Lambda'(t) - \mathcal{L}P_tf)^{-1}}.$$

Ολοκληρώνοντας το αριστερό και το δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας ξεχωριστά στο $[0,t]$, μετά από απλούς υπολογισμούς προκύπτουν τα (iv) και (iii) του Θεωρήματος. Θα δουλέψουμε μόνο για την αριστερή ανισότητα καθώς η άλλη έπεται όμοια. Είναι

$$\int_0^t \frac{1}{\alpha s - [\Lambda'(0) - \mathcal{L}P_tf]^{-1}}\, ds \leqslant \int_0^t (\Lambda'(s) - \mathcal{L}P_tf)\, ds.$$

Άρα,

$$\left[\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha s - [\Lambda'(0) - \mathcal{L}P_tf]^{-1}\right]_0^t \leqslant \Lambda(t) - \Lambda(0) - t\mathcal{L}P_tf,$$

όπου $\alpha = \frac{2}{nP_tf}$. Επομένως,

$$\frac{nP_tf}{2}\ln\left(\frac{2t}{nP_tf} - [\Lambda'(0) - \mathcal{L}P_tf]^{-1}\right) - \frac{nP_tf}{2}\ln\left(-(\Lambda'(0) - \mathcal{L}P_tf)^{-1}\right)$$
$$\leqslant \Lambda(t) - \Lambda(0) - t\mathcal{L}P_tf.$$

Οπότε,

$$\frac{n}{2}P_tf\ln\left(1-\frac{2t}{nP_tf}(\Lambda'(0)-\mathcal{L}P_tf)\right)\leqslant\Lambda(t)-\Lambda(0)-t\mathcal{L}P_tf.$$

Αφού $\Lambda(t)=P_t(f\ln f)$, έχουμε $\Lambda(0)=P_tf\ln P_tf$ και

$$\Lambda'(0)=P_tf\Gamma(\ln P_tf)=\frac{1}{P_tf}\Gamma(P_tf)=\mathcal{L}P_tf-P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf),$$

άρα,

$$\Lambda'(0)-\mathcal{L}P_tf=-P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf).$$

Επομένως, η παραπάνω ανισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{n}{2}P_tf\ln\left(1+\frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_tf)\right)+t\mathcal{L}P_tf\leqslant P_t(f\ln f)-P_tf\ln P_tf,$$

δηλαδή έχουμε την ανισότητα (iv).

Το γεγονός ότι τα (ii),(iii),(iv) συνεπάγονται το (i) αιτιολογείται ως εξής. Έστω ότι ισχύει το (ii). Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για την $1+\varepsilon f$ και θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ για $x=\varepsilon P_tf$, γράφουμε την ανισότητα του (ii) στη μορφή

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon P_tf)\left(\varepsilon\mathcal{L}P_tf-\frac{\varepsilon^2}{2}\mathcal{L}(P_tf)^2\right)+o(\varepsilon^2)\\ &\geq P_t\left((1+\varepsilon f)\left(\varepsilon\mathcal{L}f-\frac{\varepsilon^2}{2}\mathcal{L}(f^2)\right)\right)\left(1+\frac{2t}{n}\left(\varepsilon\mathcal{L}P_tf-\frac{\varepsilon^2}{2}\mathcal{L}(P_tf)^2\right)\right)+o(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις, διαιρώντας με $\varepsilon>0$ και στέλνοντας το $\varepsilon\to 0$, βλέπουμε ότι

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}(P_tf)^2+P_tf\mathcal{L}P_tf\geq-\frac{1}{2}\mathcal{L}(P_tf^2)+P_t(f\mathcal{L}f)+\frac{2t}{n}\mathcal{L}f\mathcal{L}P_tf,$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}-\Gamma(P_tf)&\geq-\frac{1}{2}P_t(\mathcal{L}f^2)+P_t(f\mathcal{L}f)+\frac{2t}{n}\mathcal{L}f\mathcal{L}P_tf\\ &=-P_t\left(\frac{1}{2}\mathcal{L}f^2-f\mathcal{L}f\right)+\frac{2t}{n}\mathcal{L}f\mathcal{L}P_tf\\ &=-P_t(\Gamma(f))+\frac{2t}{n}\mathcal{L}f\mathcal{L}P_tf.\end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{2t}{n}\mathcal{L}f\mathcal{L}P_tf=\frac{2t}{n}\mathcal{L}fP_t(\mathcal{L}f)=\frac{2t}{n}P_t\left((\mathcal{L}f)^2\right),$$

και από την ανισότητα Jensen, για την $\varphi(x)=x^2$, έχουμε

$$\frac{2t}{n}P_t\left((\mathcal{L}f)^2\right)\geq\frac{2t}{n}(P_t\mathcal{L}f)^2.$$

Από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$-\Gamma(P_tf)\geq-P_t(\Gamma(f))+\frac{2t}{n}(P_t\mathcal{L}f)^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$\Gamma(P_t f) \leqslant P_t(\Gamma(f)) - \frac{2t}{n}(\mathcal{L}P_t f)^2.$$

Άρα,

$$0 \leqslant \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\left[P_t(\Gamma(f)) - \Gamma(P_t f) - \frac{2t}{n}(\mathcal{L}P_t f)^2\right] = \Gamma_2(f) - \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2$$

δηλαδή το ζητούμενο. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί ελέγχονται όμοια. □

Πόρισμα 5.1.6 (ανισότητα Li-Yau). *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov και έστω ότι ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας διάστασης $CD(0, n)$. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{A}_0^{',+}$ και κάθε $t > 0$,*

$$\mathcal{L}(\ln P_t f) > -\frac{n}{2t}.$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{\Gamma(P_t f)}{(P_t f)^2} - \frac{\mathcal{L}P_t f}{P_t f} < \frac{n}{2t}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έχει ουσιαστικά δοθεί κατά την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. Είδαμε ότι αν υποθέσουμε την $CD(0, n)$ τότε ισχύει η (ii), η οποία σε συνδυασμό με το Πόρισμα 5.1.4 μας δίνει τη ζητούμενη (5.1.10):

$$1 + \frac{2t}{n}\mathcal{L}(\ln P_t f) > 0.$$

Αν εφαρμόσουμε την ιδιότητα διάχυσης για τη συνάρτηση $\varphi(r) = \ln r$ και γράψουμε

$$\mathcal{L}(\ln P_t f) = \varphi'(P_t f)\mathcal{L}P_t f + \varphi''(P_t f)\Gamma(P_t f) = \frac{1}{P_t f}\mathcal{L}P_t f - \frac{1}{(P_t f)^2}\Gamma(P_t f),$$

η ισοδύναμη μορφή έπεται άμεσα. □

Η ανισότητα Li-Yau αποτελεί βασικό εργαλείο για να αποδειχθούν ανισότητες τύπου Harnack σε μία πολλαπλότητα Riemann. Ο τελεστής Markov διάχυσης εδώ θα είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami $\mathcal{L} = \Delta_g - \nabla W \cdot \nabla$ σε μια πλήρως συνεκτική πολλαπλότητα Riemann.

Πόρισμα 5.1.7 (ανισότητα Harnack υπό τη συνθήκη $CD(0, n)$). *Με την υπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, n)$, για κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση f στην πολλαπλότητα M, κάθε $x, y \in M$ και κάθε $0 < t < t + s$,*

$$P_t f(x) \leqslant P_{t+s} f(y) \left(\frac{t+s}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{d(x,y)^2}{4s}} \tag{5.1.11}$$

όπου $d(x, y)$ είναι η απόσταση-Riemann από το x στο y.

Απόδειξη. Έστω $(x_u)_{u\in[t,t+s]}, t > 0$ η γεωδαισιακή καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία x,y με σταθερή ταχύτητα. Θεωρούμε την

$$\Lambda(u) := P_u f(x_u)$$

για $u \in [t, t+s]$. Τότε, $\frac{dx_u}{du} = \frac{d(x,y)}{s}$ είναι η σταθερή ταχύτητα, και έχουμε

$$\begin{aligned}\Lambda'(u) &= P_u(\mathcal{L}f) + \nabla P_u f \cdot \frac{dx_u}{du} \geq P_u(\mathcal{L}f) - |\nabla P_u f| \frac{d(x,y)}{s} \\ &= P_u(\mathcal{L}f) - \frac{|\nabla P_u f|}{\sqrt{P_u f}} \frac{d(x,y)}{s} \sqrt{P_u f} \geq P_u(\mathcal{L}f) - \frac{|\nabla P_u f|^2}{P_u f} - \frac{d^2(x,y)}{4s^2} P_u f \\ &= P_u(\mathcal{L}f) - \frac{\Gamma(P_u f)}{P_u f} - \frac{d^2(x,y)}{4s^2} P_u f,\end{aligned}$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Cauchy-Schwarz και στο δεύτερο η ανισότητα Young $\alpha b \leqslant \frac{\lambda \alpha^2}{2} + \frac{b^2}{2\lambda}$ για $\lambda = 2$. Αφού ισχύει η συνθήκη $CD(0,n)$, από την ανισότητα Li-Yau παίρνουμε

$$P_u(\mathcal{L}f) - \frac{\Gamma(P_u f)}{P_u f} \geq -\frac{n}{2u} P_u f.$$

Επομένως, σε συνδυασμό με το προηγούμενο, παίρνουμε

$$\Lambda'(u) \geq -\frac{n}{2u} P_u f - \frac{d^2(x,y)}{4s^2} P_u f = -\frac{n}{2u} \Lambda(u) - \frac{d^2(x,y)}{4s^2} \Lambda(u),$$

και έτσι

$$\frac{\Lambda'(u)}{\Lambda(u)} \geq -\frac{n}{2u} - \frac{d^2(x,y)}{4s^2}.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[t, t+s]$ ως προς τη μεταβλητή u, έχουμε

$$\ln \frac{\Lambda(t+s)}{\Lambda(t)} \geq -\frac{n}{2} \ln \frac{t+s}{s} - \frac{d^2(x,y)}{4s},$$

ή ισοδύναμα,

$$\ln \Lambda(t) \leqslant \ln \Lambda(t+s) + \frac{n}{2} \ln \frac{t+s}{s} + \frac{d^2(x,y)}{4s},$$

οπότε

$$\Lambda(t) \leqslant \Lambda(t+s) \left(\frac{t+s}{s} \right)^{n/2} e^{\frac{d^2(x,y)}{4s}}.$$

Δηλαδή, τελικά παίρνουμε

$$P_t(x) \leqslant P_{t+s}(y) \left(\frac{t+s}{s} \right)^{n/2} e^{\frac{d^2(x,y)}{4s}},$$

καθώς, αφού η x_u είναι γεωδαισιακή καμπύλη, έχουμε ότι $x_t = x$ και $x_{t+s} = y$. □

5.2 Τοπική υπερσυσταλτότητα με διάσταση

Ένα πλεονέκτημα της έννοιας της τοπικής υπερσυσταλτότητας είναι ότι δίνει περιγραφή για τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,n)$ που εφαρμόζεται για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση. Το βασικό θεώρημα είναι το εξής.

Θεώρημα 5.2.1 (τοπική ούλτρα-συσταλτότητα με διάσταση)**.** *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με ημιομάδα $\{P_t\}_{t \geq 0}$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:*

(i) *Ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης* $CD(0,n)$.

(ii) *Για κάθε* $1 < q_1 < q_2 < \infty$, $u_1, u_2 > 0$ *και* $\sigma = q_2u_2 - q_1u_1 \geq 0$ *και για κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση* f *στο* E,

$$[P_{u_1}((P_\sigma f)^{q_2})]^{\frac{1}{q_2}} \leqslant M^{\frac{n}{2}} [P_{u_2}(f^{q_1})]^{\frac{1}{q_1}}, \tag{5.2.1}$$

όπου $M = \left(\frac{q_1-1}{u_1}\right)^{1-\frac{1}{q_1}} \left(\frac{q_2-1}{u_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-1} \left(\frac{\sigma}{q_2-q_1}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη $CD(0,n)$ δηλαδή

$$\Gamma_2(f) \geq \frac{1}{n}(\mathcal{L}f)^2.$$

Τότε, για $f > 0$ θεωρούμε την

$$\Lambda(s) = (P_u(P_{t-s}f)^q)^{\frac{1}{q}}, \qquad s \in [0,t]$$

όπου $q : [0,t] \to (1,\infty)$ και $u : [0,t] \to [0,\infty)$ είναι συναρτήσεις με μεταβλητή s, που θα τις συμβολίζουμε με q, u. Τότε, αν γράψουμε $g = P_{t-s}f$ έχουμε $\Lambda(s)^q = P_u(g^q)$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Lambda(s)^{q(s)} &= \frac{d}{ds}P_{u(s)}(g^{q(s)}) = \frac{d}{ds}(e^{q(s)\ln\Lambda(s)}) \\ &= e^{q\ln\Lambda(s)}\left(q'(s)\ln\Lambda(s) + \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}q(s)\right) \\ &= P_u(g^q)\ln P_u(g^q)\frac{q'}{q} + \Lambda'(s)\Lambda(s)^{q-1}q,\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης, για την $\varphi(x) = x^q$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}P_u(g^q) &= \frac{d}{du}P_u(g^q)\frac{du}{ds} = P_u(\mathcal{L}g^q)u(s)' \\ &= u'P_u(qg^{q-1}\mathcal{L}g + q(q-1)g^{q-2}\Gamma(g)) \\ &= u'qP_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) + u'q(q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g)).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{q-1} = -P_u(g^q)\ln P_u(g^q) + u'\frac{q^2}{q'}\left(P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) + (q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g))\right).$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $P_u(g^q) = \int_E g^q p_u$, μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{q-1} = \mathrm{Ent}_{p_u}(g^q) + \frac{q^2}{q'}(u'-1)P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) + \frac{q^2}{q'}u'(q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g)). \tag{5.2.2}$$

Από το Θεώρημα 5.1.5 έχουμε ότι η $CD(0,n)$ ισοδυναμεί με την ανισότητα (iii), δηλαδή για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$P_t(f\ln f) - P_tf\ln P_tf \leqslant t\mathcal{L}P_tf + \frac{n}{2}P_tf\ln\left(1 - \frac{2t}{n}\frac{P_t(f\mathcal{L}(\ln f))}{P_tf}\right).$$

Κάνοντας γραμμικοποίησης, βλέπουμε ότι η τελευταία ισοδυναμεί με την οικογένεια ανισοτήτων (με παράμετρο $k > 0$)

$$\mathrm{Ent}_{p_u}(f) \leqslant u\mathcal{L}P_u f + \frac{n}{2}(k-1-\ln k)P_u f - ukP_u(f\mathcal{L}(\ln f)). \tag{5.2.3}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα αυτή για την $f = g^q$ και την συγκρίνουμε με την (5.2.2). Από την (5.2.2) έχουμε

$$\mathrm{Ent}_{p_u}(g^q) = \frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{q-1} - \frac{q^2}{q'}(u'-1)P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) - \frac{q^2}{q'}u'(q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g)), \tag{5.2.4}$$

και από την (5.2.3) παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_{p_u}(g^q) \leqslant u\mathcal{L}P_u g^q + \frac{n}{2}(k-1-\ln k)P_u g^q - ukP_u(g^q\mathcal{L}(\ln g^q)). \tag{5.2.5}$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα διάχυσης για την $\varphi(x) = x^q$ και στη συνέχεια για την $\varphi(x) = \ln x$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P_u g^q &= P_u(\mathcal{L}g^q) = P_u(qg^{q-1}\mathcal{L}g + q(q-1)g^{q-2}\Gamma(g)) \\ &= qP_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) + q(q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g))\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}g^q\mathcal{L}(\ln g^q) &= qg^q\mathcal{L}\ln g = qg^q\left(\frac{1}{g}\mathcal{L}g - \frac{1}{g^2}\Gamma(g)\right) \\ &= qg^{q-1}\mathcal{L}g - qg^{q-2}\Gamma(g).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.2.5), και σε συνδυασμό με την (5.2.4), έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{q-1} - \frac{q^2}{q'}(u'-1)P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) - \frac{q^2}{q'}u'(q-1)P_u(g^{q-2}\Gamma(g)) \\ &\leqslant uq(1-k)P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g) + uq(q-1+k)P_u(g^{q-2}\Gamma(g)) + \frac{n}{2}(k-1-\ln k)\Lambda^q.\end{aligned}$$

Ισοδύναμα, αυτή γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{q-1} \leqslant{}& P_u(g^{q-1}\mathcal{L}g)q\left(\frac{q}{q'}(u'-1) + u(1-k)\right) + \frac{n}{2}(k-1-\ln k)\Lambda^q \\ &+ qP_u(g^{q-2}\Gamma(g))\left(\frac{q}{q'}u'(q-1) + u(q-1+k)\right).\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $q = q(s), u = u(s), k = k(s)$ που λύνουν το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{q}{q'}(u'-1) + u(1-k) = 0$$

και

$$u(q-1+k) + \frac{q}{q'}u'(q-1) = 0.$$

Τότε, η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$$\frac{q^2}{q'}\Lambda'\Lambda^{-1} \leqslant \frac{n}{2}A(k),$$

όπου $A(k) = k - 1 - \ln k$, $k > 0$. Υποθέτουμε ότι η q είναι φθίνουσα. Τότε, $q' \leqslant 0$ και $\frac{\Lambda'}{\Lambda} \geq \frac{q'}{q^2}\frac{n}{2}A(k)$. Ολοκληρώνοντας στο $[s,t]$ παίρνουμε

$$\Lambda(s) \leqslant e^{\frac{n}{2}M_{s,t}}\Lambda(t),$$

όπου $M_{s,t} = -\int_s^t \frac{q'(r)}{q(r)^2}A(k(r))\,dr$. Ισοδύναμα,

$$P_{u(s)}\left((P_{t-s}f)^q(s)\right)^{\frac{1}{q(s)}} \leqslant e^{\frac{n}{2}M_{s,t}}P_{u(t)}(f^{q(t)})^{\frac{1}{q(t)}}.$$

Θέλουμε να βελτιστοποιήσουμε την ποσότητα $M_{s,t}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις του συστήματος, παίρνουμε

$$uq' + qu' = 1 \quad \Longrightarrow \quad (u(r)q(r))' = 1$$

για κάθε $r \in [s,t]$. Ολοκληρώνοντας, βλέπουμε ότι $u(r) = \frac{r+c}{q(r)}$ για κάποια σταθερά $c > 0$. Μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς, από την πρώτη ανισότητα του συστήματος έπεται ότι $k = \frac{q(1-q)}{q'(r+c)}$. Έχουμε υποθέσει η q φθίνει, άρα $q > 1$. Αν τα $t > s > 0$ είναι σταθεροποιημένα, η ποσότητα $M_{s,t}$ εξαρταται μόνον από τη συνάρτηση q στο $[s,t]$ και τη σταθερά c. Θεωρούμε ότι οι παράμετροι $t, s, u(t) = u_1, u(s) = u_2, q(s) = q_2$ και $q(t) = q_1 > 1$ είναι σταθεροποιημένες. Τότε, η ποσότητα

$$\begin{aligned} M_{s,t} &= -\int_s^t \frac{q'(r)}{q(r)^2}A(k(r))\,dr \\ &= -\int_s^t \left(\frac{1-q}{q(r+c)} - \frac{q'}{q^2} - \frac{q'}{q^2}\ln\frac{q(1-p)}{q(r+c)}(r)\right)dr \end{aligned}$$

μεγιστοποιείται από την απεικόνιση q για την ποία $\left(\frac{q^2}{(r+c)^2q'}\right)' = 0$ στο $[s,t]$, που είναι η $q(r) = \frac{r+c}{\alpha r+b}$, όπου b σταθερά και $\alpha = \frac{u_2-u_1}{s-t} = \frac{u_2-u_1}{u_2q_2-u_1q_1}$. Τότε,

$$M_{s,t} = -\int_{q_1}^{q_2}\frac{1}{q^2}\left(\frac{1-q}{1-\alpha q} - 1 - \ln\frac{1-q}{1-\alpha q}\right)dq,$$

αφού $k = \frac{1-q}{1-\alpha q}$ γι' αυτό το q. Όμως, μετά από απλούς υπολογισμούς προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \left(-\frac{q-1}{q}\ln\frac{q-1}{\alpha q-1}\right)' &= -\frac{1}{q^2}\ln\frac{q-1}{\alpha q-1} - \frac{1}{q}\frac{\alpha-1}{\alpha q-1} \\ &= -\frac{1}{q^2}\ln\frac{q-1}{\alpha q-1} - \frac{1}{q^2}\frac{q\alpha-q}{\alpha q-1} \\ &= -\frac{1}{q^2}\ln\frac{q-1}{\alpha q-1} + \frac{1}{q^2}\left(\frac{1-q}{1-\alpha q}-1\right) \\ &= \frac{1}{q^2}\left(\frac{1-q}{1-\alpha q} - 1 - \ln\frac{1-q}{1-\alpha q}\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$e^{\frac{n}{2}M_{s,t}} \leqslant \left[\left(\frac{q_1-1}{u_1}\right)^{1-\frac{1}{q_1}}\left(\frac{q_2-1}{u_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-1}\left(\frac{\sigma}{q_2-q_1}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}}\right]^{\frac{n}{2}},$$

δηλαδή έχουμε το ζητούμενο M.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω ότι ισχύει η συνθήκη (ii) του θεωρήματος. Εφαρμόζουμε ανάπτυγμα Taylor στην ανισότητα (5.2.1). Θεωρούμε $f>0$ κι έστω $q_1=2, q_2=2(1+\varepsilon), u_1=t$ και $u_2=t(1-\alpha\varepsilon)$ για $t,\varepsilon,\alpha>0$ και τέτοια ώστε αν $\sigma=t-s$ να είναι $s=t(1+2(1-\alpha)\varepsilon)+o(\varepsilon)$. Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$M^n=1+\frac{\varepsilon n}{2}(\alpha-2-\ln(\alpha-1))+o(\varepsilon).$$

Τότε, αν

$$\mathrm{Ent}_{P_t}(f)=P_t(f\ln f)-P_tf\ln P_tf,$$

για $\varepsilon\to 0$ παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_{P_t}(f^2)+t(\alpha-2)P_t\mathcal{L}(f^2)-4t(\alpha-1)P_t(\Gamma(f))\leqslant\frac{n}{2}(\alpha-2-\ln(\alpha-1))P_t(f^2),$$

δηλαδή

$$\mathrm{Ent}_{P_t}(g)\leqslant t(1-\lambda)P_t(\mathcal{L}g)+\frac{n}{2}(\lambda-1-\ln\lambda)P_t(g)+t\lambda P_t\left(\frac{\Gamma(g)}{g}\right) \tag{5.2.6}$$

όπου $g=f^2$ και $\lambda=\alpha-1$. Αφού $\alpha>1$ έχουμε $\lambda>0$, και αφού ο λογάριθμος είναι κοίλη συνάρτηση γράφεται

$$\ln(1+x)=\sup_{\lambda>0}[\lambda x+\lambda-1-\ln\lambda]$$

και η σχέση (5.2.6) ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{Ent}_{P_t}(g)\leqslant t\mathcal{L}P_tg+\frac{n}{2}P_tg\ln\left(1-\frac{2t}{n}\frac{P_t(g\mathcal{L}\ln g)}{P_tg}\right),$$

που είναι ακριβώς το (ii) του Θεωρήματος 5.1.5. Άρα, με βάση το Θεώρημα 5.1.5 έχουμε ότι ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,n)$. □

5.3 Ανισότητες Sobolev υπό τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε ανισότητες Sobolev για το αναλλοίωτο μέτρο, υπό την υπόθεση καμπυλότητας-διάστασης. Δεδομένου ότ η συνθήκη $CD(\rho,\infty)$ με $\rho>0$ συνεπάγεται λογαριθμική ανισότητα Sobolev, περιμένουμε ότι μια ισχυρότερη συνθήκη $CD(\rho,n)$ με $\rho>0$ και $n<\infty$ θα μπορούσε να μας δώσει ανισότητα Sobolev με εκθέτη n.

Θα δείξουμε αρχικά ότι η $CD(\rho,n)$ συνεπάγεται λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας. Το βασικό θεώρημα λοιπόν είναι το εξής:

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov, όπου μ είναι μέτρο πιθανότητας. Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho,n)$, όπου $\rho>0$ και $1\leqslant n<\infty$, τότε ικανοποιείται η αυστηρή λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\leqslant\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{4}{\rho n}\mathcal{E}(f)\right) \tag{5.3.1}$$

για κάθε $f\in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\,d\mu=1$.

Αυτό το θεώρημα, σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.4.3, δίνει ότι υπό τη συνθήκη $CD(\rho,n)$ η διάμετρος της (E,μ,Γ) είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Θεωρούμε $f_0 \in \mathcal{A}_0^{',+}$ και ορίζουμε $f=\sqrt{f_0}$. Τότε, από την ιδιότητα διάχυσης για την $\varphi(r)=\sqrt{r}$ έχουμε

$$\Gamma(f)=\Gamma(\sqrt{f_0})=(\varphi(f_0)')^2\Gamma(f_0)=\frac{1}{4f_0}\Gamma(f_0)=\frac{1}{4}f_0\Gamma(\ln f_0),$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται άμεσα από την $\Gamma(\varphi(f))=(\varphi'(f))^2\Gamma(f)$ με $\varphi(r)=\ln r$.

Έχουμε $\mathrm{Ent}_\mu(f^2)=\mathrm{Ent}_\mu(f_0)$ και $\int_E f^2\,d\mu=\int_E f_0\,d'mu$. Τότε, η ζητούμενη ανισότητα (5.3.1) για την $\sqrt{f}$, $f>0$ ισοδυναμεί με την

$$\mathrm{Ent}_\mu(f)\leqslant\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\rho n}\int_E f\Gamma(\ln f)\,d\mu\right) \tag{5.3.2}$$

όπου $\int_E f\,d\mu=1$. Για $t\geq 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Lambda(t)=\mathrm{Ent}_\mu(P_tf).$$

Αφού το μέτρο είναι αναλλοίωτο, έχουμε $1=\int_E f\,d\mu=\int_E P_tf\,d\mu$, άρα

$$\Lambda(t)=\mathrm{Ent}_\mu(P_tf)=\int_E P_tf\ln P_tf\,d\mu.$$

Για κάθε $t>0$ έχουμε

$$\Lambda'(t)=\int_E(\mathcal{L}P_tf\ln P_tf+\mathcal{L}P_tf)\,d\mu=\int_E P_tf\mathcal{L}(\ln P_tf)\,d\mu,$$

διότι $\int_E\mathcal{L}P_tf\,d\mu=0$. Από την ιδιότητα διάχυσης με $\psi(r)=\ln r$, $r>0$ έχουμε

$$\mathcal{L}(\ln P_tf)=\frac{1}{P_tf}\mathcal{L}P_tf-\frac{1}{(P_tf)^2}\Gamma(P_tf).$$

Άρα,

$$\Lambda'(t)=-\int_E\frac{1}{P_tf}\Gamma(P_tf)\,d\mu.$$

Πάλι από την ιδιότητα διάχυσης ξανά, έχουμε $g\Gamma(\ln g)=\frac{1}{g}\Gamma(g)$ αν $g=P_tf$, οπότε

$$\Lambda'(t)=-\int_E P_tf\Gamma(\ln P_tf)\,d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\Lambda''(t)&=-\int_E[\mathcal{L}(P_tf\Gamma(\ln P_tf))-\mathcal{L}P_tf\Gamma(\ln P_tf)-P_tf\mathcal{L}\Gamma(\ln P_tf)]\,d\mu\\&=-\int_E\mathcal{L}P_tf\Gamma(\ln P_tf)\,d\mu-\int_E P_tf\mathcal{L}\Gamma(\ln P_tf)\,d\mu\\&=-2\int_E P_tf\mathcal{L}\Gamma(\ln P_tf)\,d\mu,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την συμμετρία του μέτρου. Αναλύοντας την $\mathcal{L}\Gamma(\ln P_t f)$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διάχυσης με $\psi(r) = r^2$, $r > 0$ μετά από πράξεις βλέπουμε ότι

$$\Lambda''(t) = 2\int_E P_t f \Gamma_2(\ln P_t f)\, d\mu.$$

Από την υπόθεση ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$, και εφαρμόζοντάς την για την $\ln P_t f$ έχουμε

$$\Gamma_2(\ln P_t f) \geq \rho\Gamma(\ln P_t f) + \frac{1}{n}\left(\mathcal{L}(\ln P_t f)\right)^2.$$

Επομένως, για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\Lambda''(t) \geq 2\rho\int_E P_t\Gamma(\ln P_t f)\, d\mu + \frac{2}{n}\int_E P_t f\left(\mathcal{L}(\ln P_t f)\right)^2 d\mu.$$

Δηλαδή

$$\Lambda''(t) \geq -2\Lambda(t) + \frac{2}{n}\int_E P_t f\left(\mathcal{L}(\ln P_t f)\right)^2 d\mu. \tag{5.3.3}$$

Από την ιδιότητα διάχυσης με $\varphi(r) = \ln r$, $r > 0$ και $g = P_t f$ παίρνουμε

$$g\mathcal{L}(\ln g) = 2\mathcal{L}g - \frac{1}{2g}\mathcal{L}g^2$$

και

$$g\Gamma(\ln g) = g(\varphi'(g))^2\Gamma(g) = \frac{1}{2g}\mathcal{L}g^2 - \mathcal{L}g.$$

Άρα, αφού $\int_E \mathcal{L}g\, d\mu = 0$, από τις δύο τελευταίες σχέσεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\int_E P_t f\Gamma(\ln P_t f)\, d\mu\right)^2 &= \left(\int_E P_t f\mathcal{L}(\ln P_t f)\, d\mu\right)^2 \\
&= \left(\int_E \sqrt{P_t f}\sqrt{P_t f}\mathcal{L}(\ln P_t f)\, d\mu\right)^2 \\
&\leqslant \int_E P_t f\, d\mu \int_E P_t f(\mathcal{L}(\ln P_t f))^2\, d\mu = \int_E P_t f(\mathcal{L}(\ln P_t f))^2\, d\mu,
\end{aligned}$$

όπου εφαρμόσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την $\int_E P_t f\, d\mu = 1$. Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την (5.3.3) παίρνουμε

$$\Lambda'' \geq -2\rho\Lambda' + \frac{2}{n}(\Lambda')^2, \tag{5.3.4}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda''}{(\Lambda')^2} + \frac{2\rho}{\Lambda'} - \frac{2}{n} \geq 0 &\Longrightarrow \rho e^{-2\rho t}\frac{\Lambda''}{(\Lambda')^2} + \frac{2\rho^2}{\Lambda'}e^{-2\rho t} - \frac{2\rho}{n}e^{-2\rho t} \\
&\Longrightarrow \left(\frac{e^{-2\rho t}}{n} - e^{-2\rho t}\frac{\rho}{\Lambda'(t)}\right)' \geq 0,
\end{aligned}$$

αφού $\rho > 0$.

Επομένως, η συνάρτηση $e^{-2\rho t}\left[\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(t)}\right]$ είναι αύξουσα για κάθε $t \geq 0$. Άρα, για κάθε $t \geq 0$ είναι

$$e^{-2\rho t}\left(\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(t)}\right) \geq e^{-2\rho 0}\left(\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(0)}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(0)},$$

το οποίο άμεσα συνεπάγεται ότι

$$-\frac{\rho}{\Lambda'(t)} \geq e^{2\rho t}\left(\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(0)}\right)-\frac{1}{n}.$$

Είναι $f>0$, άρα $P_t f \geq 0$ και $\Gamma(\ln P_t f)>0$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως,

$$\Lambda'(t)=-\int_E P_t f\Gamma(\ln P_t f)\, d\mu \leqslant 0 \Rightarrow -\Lambda'(t) \geq 0.$$

Άρα, από την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$-\Lambda'(t) \leqslant \rho\left[e^{2\rho t}\left(\frac{1}{n}-\frac{\rho}{\Lambda'(0)}\right)-\frac{1}{n}\right]^{-1}.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα στο $[0,t]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda(0)-\Lambda(t) &= -\int_0^t \Lambda'(s)\, ds \leqslant \rho\int_0^t \frac{1}{e^{2\rho s}\frac{\Lambda'(0)-\rho n}{n\Lambda'(0)}-\frac{1}{n}}\, ds\\
&= \int_0^t \frac{\rho n\Lambda'(0)}{e^{2\rho s}(\Lambda'(0)-\rho n)-\Lambda'(0)}\, ds\\
&= \int_0^t \frac{-\Lambda'(0)}{e^{2\rho s}\left(1-\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}\right)+\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}}\, ds\\
&= \frac{n}{2}\int_0^t \frac{-1}{1-\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}+e^{-2\rho s}\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}}\cdot\frac{2}{n}\Lambda'(0)e^{-2\rho s}\, ds\\
&= \frac{n}{2}\left[\ln(1-(1-e^{-2\rho s})\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}\right]_0^t\\
&= \frac{n}{2}\ln\left(1-(1-e^{-2\rho t})\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}\right).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, τελικά είναι

$$\Lambda(0)-\Lambda(t) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1-(1-e^{-2\rho t})\frac{\Lambda'(0)}{\rho n}\right).$$

Στέλνουμε το $t \to \infty$ και τότε αφού η Λ είναι μη αρνητική και φθίνουσα έχουμε $\Lambda(t) \to 0$ και, επίσης, $e^{-2\rho t} \to 0$. Άρα,

$$\Lambda(0) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{\rho n}\Lambda'(0)\right). \tag{5.3.5}$$

Ισοδύναμα, αφού $\Lambda(0)=\mathrm{Ent}_\mu(f)$ και $\Lambda'(0)=-\int_E f\Gamma(\ln f)\, d\mu$, η ανισότητα (5.3.5) γράφεται

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\rho n}\int_E f\Gamma(\ln f)\, d\mu\right).$$

Τελικά, αφού δουλέψαμε για την $\sqrt{f}$ όπως είπαμε στην αρχή, ισοδύναμα παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{4}{\rho n}\mathcal{E}(f)\right)$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\,d\mu = 1$. □

Στο Πόρισμα 4.2.2 είχαμε δείξει ότι αν ισχύει η ανισότητα Sobolev για ένα πεπερασμένο μέτρο, τότε οι τελεστές $P_t, t > 0$ της αντίστοιχης ημιομάδας Markov είναι τελεστές Hilbert-Schmidt και το φάσμα του γεννήτορα $\mathcal{L}$ είναι διακριτό. Αυτό, σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα, μας δίνει το εξής.

Πόρισμα 5.3.2. *Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ με $\rho > 0$ και $n < \infty$, τότε το φάσμα του γεννήτορα $\mathcal{L}$ είναι διακριτό και οι τελεστές Markov P_t , $t > 0$ είναι τελεστές Hilbert-Schmidt.*

Παρατήρηση 5.3.3. Στο Θεώρημα 5.3.1 είδαμε ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη $CD(\rho, n)$ τότε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{4}{\rho n}\mathcal{E}(f)\right),$$

όπου $f \in D(\mathcal{E})$ με $\int_E f^2\,d\mu = 1$ και $\mu(E) = 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\ln(1 + r) \leqslant r$, $r \geq 0$, παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant \frac{2}{\rho}\mathcal{E}(f),$$

δηλαδή παίρνουμε τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(2/\rho)$. Επομένως, αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ σε μία τριάδα Markov (E, μ, Γ) όπου το μ είναι μέτρο πιθανότητας, τότε ικανοποιείται η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(2/\rho)$. Ωστόσο, η σταθερά αυτή δεν είναι η βέλτιστη.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι αν ικανοποιείται η συνθήκη $CD(\rho, n)$ τότε μπορούμε να πάρουμε απευθείας τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev με τη βέλτιστη σταθερά $C = \frac{n-1}{\rho n}$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.3.4. *Αν για μια τριάδα Markov (E, μ, Γ) ισχύει η ανισότητα*

$$\int_E f\Gamma(\ln f)\,d\mu \leqslant c\int_E f\Gamma_2(\ln f)\,d\mu \tag{5.3.6}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ και κάθε $f \in \mathcal{A}$, τότε ικανοποιείται η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS(c)$.

Απόδειξη. Έστω $f > 0$ στην $\mathcal{A}$. Θεωρούμε την $\Lambda(t) = \int_E P_t f \ln P_t f\,d\mu$. Τότε, για την $\psi(x) = x\ln x$, $x > 0$, και αφού $\int_E \mathcal{L}\psi(P_t f)\,d\mu = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda'(t) &= \int_E (\mathcal{L}\psi(P_t f) + \psi'(P_t f)\mathcal{L}P_t f)\,d\mu = \int_E \psi'(P_t f)\mathcal{L}P_t f\,d\mu \\
&= \int_E (\ln P_t f\mathcal{L}P_t f + \mathcal{L}P_t f\,d\mu = \int_E \ln P_t f\mathcal{L}P_t f\,d\mu \\
&= \int_E P_t f\mathcal{L}\ln P_t f\,d\mu = -\int_E \frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}\,d\mu = -\int_E P_t f\Gamma(\ln P_t f)\,d\mu,
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει από την ιδιότητα διάχυσης για την $\ln P_t f$. Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}\Lambda''(t) &= -\int_E \left[\mathcal{L}\left(\frac{\Gamma(P_t f)}{P_t f}\right) - \frac{1}{(P_t f)^2}\mathcal{L}P_t f\Gamma(P_t f) + \frac{\Gamma(P_t f, \mathcal{L}P_t f)}{P_t f}\right] d\mu \\ &= \int_E \left(\frac{\Gamma(P_t f)\mathcal{L}P_t f}{(P_t f)^2} - 2\frac{\Gamma(P_t f, \mathcal{L}P_t f)}{P_t f}\right) d\mu.\end{aligned}$$

Γράφουμε $g := P_t f$ για λόγους συντομίας. Από την ιδιότητα διάχυσης παίρνουμε

$$\mathcal{L}\left(\frac{\Gamma(g)}{g}\right) = -\frac{\Gamma(g)}{g^2}\mathcal{L}g + \frac{\mathcal{L}\Gamma(g)}{g} - 2\frac{\Gamma(g,\Gamma(g))}{g^2} + 2\frac{\Gamma(g)^2}{g^3},$$

και, αφού $\int_E \mathcal{L}h\, d\mu = 0$ για κάθε $h \in D(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{A}$, έχουμε

$$\int_E \frac{\Gamma(g)\mathcal{L}g}{g^2}\, d\mu = \int_E \left[\frac{\mathcal{L}\Gamma(g)}{g} - 2\frac{\Gamma(g,\Gamma(g))}{g^2} + 2\frac{\Gamma(g)^2}{g^3}\right] d\mu.$$

Τώρα, αφού $2\Gamma_2(g) = \mathcal{L}\Gamma(g) - 2\Gamma(g, \mathcal{L}g)$, από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\Lambda''(t) = 2\int_E \left(\frac{\Gamma_2(g)}{g} - \frac{\Gamma(g,\Gamma(g))}{g^2} + \frac{\Gamma(g)^2}{g^3}\right) d\mu.$$

Χρησιμοποιώντας την $\psi(r) = \ln r$, $r > 0$ και αλλαγή συντεταγμένων για τον Γ_2, από την (2.6.1) παίρνουμε

$$\Gamma_2(\ln g) = \frac{1}{g^2}\Gamma_2(g) - \frac{1}{g^3}\Gamma(g,\Gamma(g)) + \frac{1}{g^4}\Gamma(g)^2.$$

Επομένως,

$$\Lambda''(t) = 2\int_E P_t f \Gamma_2(\ln P_t f)\, d\mu.$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση της πρότασης καταλήγουμε στην

$$-\Lambda'(t) \leqslant \frac{c}{2}\Lambda''(t).$$

Τότε, για κάθε $s \in [0,t]$, πολλαπλασιάζοντας με $e^{2\frac{s}{c}}$ έχουμε

$$e^{2\frac{s}{c}}\Lambda''(s) + e^{2\frac{s}{c}}\frac{2}{c}\Lambda'(s) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{ds}(\Lambda'(s)e^{\frac{2s}{c}}) \geq 0.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ παίρνουμε

$$\Lambda'(t) \geq \Lambda'(0)e^{-\frac{2t}{c}}. \tag{5.3.7}$$

Θεωρώντας $s \in [0,t]$ και ολοκληρώνοντας την (5.3.7) βλέπουμε ότι

$$\Lambda(0) - \Lambda(t) \leqslant -\Lambda'(0)\int_0^t e^{-\frac{2s}{c}}\, ds = \frac{c(1-e^{-\frac{2t}{c}})}{2}\int_E \frac{\Gamma(f)}{f}\, d\mu. \tag{5.3.8}$$

Στέλνοντας το $t \to \infty$ έχουμε $e^{-\frac{2t}{c}} \to 0$ και, αφού $\mu(E) = 1$, λόγω εργοδικότητας παίρνουμε $\lim\limits_{t\to\infty} P_t f = \int_E f\, d\mu$ στον $L^2(\mu)$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty}\Lambda(t) = \int_E f\, d\mu \ln \int_E f\, d\mu.$$

Έτσι, η σχέση (5.3.8) ισοδύναμα γράφεται

$$\int_E f\ln f\,d\mu - \int_E f\,d\mu \ln\int_E f\,d\mu \leqslant \frac{c}{2}\int_E \frac{\Gamma(f)}{f}\,d\mu,$$

που είναι μια ισοδύναμη μορφή της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev $LS(c)$: αρκεί να θέσουμε $\sqrt{f}$ στην $\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2c\mathcal{E}(f)$. $\square$

Θεώρημα 5.3.5 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev υπό τη συνθήκη $CD(\rho,n)$)**.** *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov με $\mu(E)=1$. Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho,n)$ με $\rho>0$ και $n>1$, τότε ικανοποιείται η $LS(C)$ με $C=\frac{n-1}{\rho n}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνθήκη $CD(\rho,n)$ συνεπάγεται την Πρόταση (5.3.4), δηλαδή ότι

$$\int_E f\Gamma(\ln f)\,d\mu \leqslant \frac{n-1}{\rho n}\int_E f\Gamma_2(\ln f)\,d\mu.$$

Θεωρώντας την $\psi(g)=e^{\alpha g}$, όπου α σταθερά που θα προσδιοριστεί αργότερα, και την αλλαγή συντεταγμένων (2.6.1), έχουμε

$$\Gamma_2(e^{\alpha g}) = \alpha^2 e^{2\alpha g}[\Gamma_2(g)+\alpha\Gamma(g,\Gamma(g))+\alpha^2\Gamma(g)^2], \tag{5.3.9}$$

και από την ιδιότητα διάχυσης για τον Γ παίρνουμε

$$\Gamma(e^{\alpha g}) = \alpha^2 e^{2\alpha g}\Gamma(g) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}e^{\alpha g} = \alpha e^{\alpha g}(\mathcal{L}g+\alpha\Gamma(g)).$$

Η συνθήκη $CD(\rho,n)$ για τη συνάρτηση $e^{\alpha g}$ γράφεται ως

$$\Gamma_2(e^{\alpha g}) \geq \rho\Gamma(e^{\alpha g}) + \frac{1}{n}(\mathcal{L}e^{\alpha g})^2,$$

και οι προηγούμενες σχέσεις δείχνουν ότι είναι ισοδύναμη με την

$$\Gamma_2(g)+\alpha\Gamma(g,\Gamma(g))+\alpha^2\Gamma(g)^2 \geq \rho\Gamma(g)+\frac{1}{n}[\mathcal{L}g+\alpha\Gamma(g)]^2.$$

Πολλαπλασιάζοντας με e^g και ολοκληρώνοντας βλέπουμε ότι

$$\int_E e^g[\Gamma_2(g)+\alpha\Gamma(g,\Gamma(g))+\alpha^2\Gamma(g)^2-\rho\Gamma(g)-\frac{1}{n}(\mathcal{L}g+\alpha\Gamma(g))^2\,d\mu \geq 0. \tag{5.3.10}$$

Παρατηρούμε ότι $4(\mathcal{L}e^{\frac{g}{2}})^2 = e^g(\mathcal{L}g+\frac{1}{2}\Gamma(g))^2$ και με ολοκλήρωση κατά μέλη έχουμε $\int_E \Gamma_2(g)\,d\mu = \int_E(\mathcal{L}f)^2\,d\mu$ για κάθε g. Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_E(\mathcal{L}g+\alpha\Gamma(g))^2\,d\mu &= \int_E\left(4(\mathcal{L}e^{\frac{g}{2}})^2+e^g\left[(2\alpha-1)\Gamma(g)\mathcal{L}g+\frac{4\alpha^2-1}{4}\Gamma(g)^2\right]\right)d\mu\\
&= 4\int_E\Gamma_2(e^{\frac{g}{2}})\,d\mu+\int_E e^g\left[(2\alpha-1)\Gamma(g)\mathcal{L}g+\frac{4\alpha^2-1}{4}\Gamma(g)^2\right]d\mu\\
&= \int_E\left(4\Gamma_2(e^{\frac{g}{2}})+e^g\left[(2\alpha-1)\Gamma(g)\mathcal{L}g+\frac{4\alpha^2-1}{4}\Gamma(g)^2\right]\right)d\mu\\
&= \int_E e^g\left[\Gamma_2(g)+\frac{1}{2}\Gamma(g,\Gamma(g))+(2\alpha-1)\Gamma(g)\mathcal{L}g+\alpha^2\Gamma(g)^2\right]d\mu,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (5.3.9) με $\alpha = \frac{1}{2}$. Επίσης,

$$\int_E e^g \Gamma(g) \mathcal{L} g \, d\mu = - \int_E \Gamma(g, e^g \Gamma(g)) \, d\mu = - \int_E \left(e^g \Gamma(g, \Gamma(g)) + e^g \Gamma(g)^2 \right) \, d\mu.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα, και στη συνέχεια στην (5.3.10), συμπεραίνουμε ότι (5.3.11)

$$\int_E e^g \left[\frac{n-1}{n} \Gamma_2(g) + \frac{2\alpha n + 4\alpha - 3}{2n} \Gamma(g, \Gamma(g)) + \frac{n\alpha^2 - (a-1)^2}{n} \Gamma(g)^2 - \rho \Gamma(g) \right] d\mu \geq 0.$$

Επιλέγουμε $\alpha = \frac{3}{2n+4}$. Τότε, $\frac{2\alpha n + 4\alpha - 3}{2n} = 0$ και $\frac{n\alpha^2 - (\alpha-1)^2}{n} \leqslant 0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, η σχέση (5.3.11) συνεπάγεται ότι

$$\int_E e^g \Gamma_2(g) \, d\mu \geq \frac{n\rho}{n-1} \int_E e^g \Gamma(g) \, d\mu$$

για κάθε $g \in \mathcal{A}$. Θεωρώντας την $g = \ln f$ παίρνουμε

$$\int_E f \Gamma_2(\ln f) \, d\mu \geq \frac{n\rho}{n-1} \int_E f \Gamma(\ln f) \, d\mu,$$

δηλαδή το ζητούμενο. Εφαρμόζοντας τώρα την Πρόταση 5.3.4 έχουμε ότι η ισχύει η λογαριθμική ανισότητα Sobolev $LS\left(\frac{n-1}{\rho n}\right)$ με τη σταθερά να είναι βέλτιστη υπό την ισχύ της συνθήκης καμπυλότητα-διάστασης. $\square$

Στην Πρόταση 3.3.3 είδαμε ότι από μια λογαριθμική ανισότητα εντροπίας-ενέργειας έπεται μια ανισότητα Nash και από αυτήν αντίστοιχη ανισότητα Sobolev. Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με το Θεώρημα 5.3.1 βλέπουμε ότι αν ισχύει η συνθήκης $CD(\rho, n)$ με $\rho > 0$ και $n < \infty$, τότε ισχύει η ανισότητα Sobolev $S_n(A, C)$ διάστασης n. Η ανισότητα αυτή μπορεί να είναι αυστηρή ($A = 1$), ωστόσο οι σταθερές που προκύπτουν δεν είναι βέλτιστες.

Με χρήση ακραίων συναρτήσεων θα δείξουμε ότι η παραπάνω συνθήκη συνεπάγεται την ανισότητα Sobolev με βέλτιστη σταθερά.

Θεώρημα 5.3.6 (ανισότητα Sobolev υπό τη συνθήκη $CD(\rho, n)$). *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με $\mu(E) = 1$. Αν ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ με $\rho > 0$ και $2 < n < \infty$ τότε ικανοποιείται η ανισότητα Sobolev $S_n(C)$ με βέλτιστη σταθερά $C = \frac{4(n-1)}{\rho n(n-2)}$. Δηλαδή,*

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{4(n-1)}{\rho n(n-2)} \mathcal{E}(f) \tag{5.3.12}$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ όπου $p = \frac{2n}{n-2}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την ανισότητα

$$\|f\|_p^2 - \|f\|_2^2 \leqslant C \mathcal{E}(f)$$

που ισχύει για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$, και υποθέτουμε ότι $C > 0$ είναι η βέλτιστη σταθερά. Θεωρούμε μη σταθερή ακραία συνάρτηση $f > 0$, αν υπάρχει, γι' αυτή την ανισότητα, κανονικοποιημένη έτσι ώστε $\int_E f^p \, d\mu = 1$. Τότε,

$$\|f\|_p^2 + \|f\|_2^2 = C \mathcal{E}(f)$$

και

$$\|f+u\|_p^2 - \|f+u\|_2^2 \leqslant C\mathcal{E}(f+u)$$

για κάθε $u \in D(\mathcal{E})$. Αλλάζοντας την u σε εu για $\varepsilon > 0$, έχουμε

$$\|f+\varepsilon u\|_p^2 - \|f+\varepsilon u\|_2^2 \leqslant C\mathcal{E}(f+\varepsilon u). \tag{5.3.13}$$

Παίρνοντας ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 για την $\|f+\varepsilon u\|_p^2$ και στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$ βλέπουμε ότι

$$\int_E f^{p-1} u\, d\mu - \int_E fu\, d\mu \leqslant \int_E (-\mathcal{L}f)u\, d\mu$$

αν ικανοποιείται η $\mathcal{E}(f,u) = \int_E (-\mathcal{L}f)u\, d\mu = 0$. Άρα, $f \in D(\mathcal{L})$ και ικανοποιείται η εξίσωση ακραίας συνάρτησης

$$f^{p-1} - f = -C\mathcal{L}f.$$

Θέτουμε $f = e^g$. Τότε, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$e^{(p-2)g} = 1 - C[\mathcal{L}g + \Gamma(g)],$$

αφού από την ιδιότητα διάχυσης έχουμε $\mathcal{L}e^g = e^g\mathcal{L}g + e^g\Gamma(g)$. Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα με $e^{bg}\mathcal{L}g$, όπου $b \in \mathbb{R}$, και ολοκληρώνοντας ως προς μ, έχουμε

$$\int_E e^{(p-2)g} e^{bg} \mathcal{L}g\, d\mu = \int_E e^{bg}\mathcal{L}g\, d\mu - C\int_E e^{bg}(\mathcal{L}g)^2\, d\mu - C\int_E e^{bg}\Gamma(g)\mathcal{L}g\, d\mu. \tag{5.3.14}$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int_E e^{(p-2+b)g}\mathcal{L}g\, d\mu = -\int_E \Gamma(e^{(p-2+b)g}, g)\, d\mu = -(p-2+b)\int_E e^{(p-2)g}e^{bg}\Gamma(g)\, d\mu$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η $\Gamma(\varphi(g), g) = \varphi'(g)\Gamma(g)$ για την $\varphi(r) = e^{(p-2+b)r}$. Όμοια έχουμε και την

$$\int_E e^{bg}\mathcal{L}g\, d\mu = -\int_E \Gamma(e^{bg}, g)\, d\mu = -b\int_E e^{bg}\Gamma(g)\, d\mu.$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα διάχυσης $\mathcal{L}e^{bg} = be^{bg}\mathcal{L}g + b^2 e^{bg}\Gamma(g)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E e^{bg}\mathcal{L}g\Gamma(g)\, d\mu &= \frac{1}{b}\int_E \mathcal{L}e^{bg}\Gamma(g)\, d\mu - b\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\, d\mu \\
&= -\frac{1}{b}\int_E \Gamma(e^{bg}, \Gamma(g))\, d\mu - b\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\, d\mu \\
&= -\int_E e^{bg}\Gamma(g, \Gamma(g))\, d\mu - b\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\, d\mu.
\end{aligned}$$

Μέσω των παραπάνω, η (5.3.14) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
(p-2+b)\int_E e^{(p-2)g}e^{bg}\Gamma(g)\, d\mu &= b\int_E e^{bg}\Gamma(g)\, d\mu + C\int_E e^{bg}(\mathcal{L}g)^2\, d\mu \\
&\quad - C\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\, d\mu - Cb\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\, d\mu.
\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

Ολοκληρώνοντας την (5.3.9) του προηγούμενου θεωρήματος και χρησιμοποιώντας την

$$\int_E e^{\alpha g}\mathcal{L}g\Gamma(g)\,d\mu = -\int_E e^{2\alpha g}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu - 2\alpha\int_E e^{2\alpha g}\Gamma(g)^2\,d\mu$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_E e^{2\alpha g}(\mathcal{L}g)^2\,d\mu = \int_E e^{2\alpha g}[\Gamma_2(g) + 3\alpha\Gamma(g,\Gamma(g)) + 4\alpha^2\Gamma(g)^2]\,d\mu. \tag{5.3.16}$$

Εφαρμόζουμε την (5.3.16) για $2\alpha = b$ παίρνουμε

$$\int_E e^{bg}(\mathcal{L}g)^2\,d\mu = \int_E e^{bg}\Gamma_2(g)\,d\mu + \frac{3b}{2}\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu + b^2\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\,d\mu$$

Μέσω αυτής της ισότητας η (5.3.15) γίνεται

$$\begin{aligned}(p-2+b)&\int_E e^{(p-2)g}e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu\\ &= b\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu + C\int_E e^{bg}\Gamma_2(g)\,d\mu + C\left(\frac{3b}{2}-1\right)\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu\\ &\quad + Cb(b-1)\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\,d\mu.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την $e^{(p-2)g}$ με την (ίση της) $1 - C[\mathcal{L}g + \Gamma(g)]$ και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη για το $\int_E e^{bg}\mathcal{L}\Gamma(g)\,d\mu$ όπως πριν, μετά από πράξεις καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\int_E e^{bg}\Gamma_2(g)d\mu = \frac{p-2}{C}\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu + \left(p-1-\frac{b}{2}\right)\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu\\ + (p-2)(b-1)\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\,d\mu.\end{aligned}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (5.3.16) για την e^{bg} αυτή τη φορά, σε συνδυασμό με τη συνθήκη $CD(\rho,n)$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_E e^{bg}\Gamma_2(g)\,d\mu \geq \frac{\rho n}{n-1}\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu + \frac{3b-2(n+2)\alpha}{2(n-1)}\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu\\ + \frac{b^2-2\alpha b-(n-1)\alpha^2}{n-1}\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\,d\mu.\end{aligned}$$

Μένει να επιλέξουμε τις παραμέτρους a, b έτσι ώστε οι συντελεστές των όρων $\int_E e^{bg}\Gamma(g,\Gamma(g))\,d\mu$ και $\int_E e^{bg}\Gamma(g)^2\,d\mu$ στις δύο τελευταίες σχέσεις να συμπίπτουν. Αυτό επιτυγχάνεται αν επιλέξουμε $\alpha = \frac{b}{2} - \frac{n-1}{n-2}$ και $b = \frac{2(n-3)}{n-2}$. Γι' αυτές τις τιμές των α και b έχουμε

$$\frac{p-2}{C}\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu \geq \frac{\rho n}{n-1}\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu. \tag{5.3.17}$$

Η $g = \ln f$ είναι μη σταθερή, άρα $\Gamma(g) > 0$ και έτσι $\int_E e^{bg}\Gamma(g)\,d\mu > 0$. Από την (5.3.17) έπεται ότι $\frac{p-2}{C} \geq \frac{\rho n}{n-1}$ και αφού $p = \frac{2n}{n-2}$ έχουμε $C \leqslant \frac{4(n-1)}{\rho n(n-2)}$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της ανισότητας Sobolev (5.3.12).

Τα παραπάνω δουλεύουν μόνον εφόσον υπάρχουν ακραίες συναρτήσεις, το οποίο δεν ισχύει πάντοτε. Έτσι, για να δικαιολογήσουμε αυστηρά την προηγούμενη διαδικασία, θα δουλέψουμε τώρα με σχεδόν ακραίες συναρτήσεις για τον σχεδόν βέλτιστο εκθέτη. Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση του Θεωρήματος 5.3.1, όπου δείξαμε ότι η ανισότητα Sobolev ισχύει υπό τη συνθήκη $CD(\rho, n)$ αλλά με χειρότερες σταθερές.

Έστω $2 < q < \frac{2n}{n-2}$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε επίσης $C(q, \varepsilon) > 0$ τη βέλτιστη σταθερά της ανισότητας Sobolev

$$\|f\|_q^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 + C(q,\varepsilon)\mathcal{E}(f)$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$. Όπως εξηγούμε παρακάτω, επιλέγοντας $q < \frac{2n}{n-2}$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας συνάρτησης που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή, ενώ ο όρος $\varepsilon > 0$ εξασφαλίζει ότι αυτή η συνάρτηση δεν είναι σταθερή. Η ακραία συνάρτηση f, εφόσον υπάρχει, θα ικανοποιεί την

$$f^{q-1} = (1+\varepsilon)f - C(q,\varepsilon)\mathcal{L}f,$$

και επιχειρηματολογώντας όπως πριν καταλήγουμε στο άνω φράγμα

$$C(q,\varepsilon) \leqslant \frac{(n-1)(q-2)}{n\rho}.$$

Το συμπέρασμα έπεται αν πάρουμε $q \to p = \frac{2n}{n-2}$ και $\varepsilon \to 0$.

Μένει να δείξουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης. Θα χρειαστούμε το Θεώρημα 4.2.4 από το οποίο έπεται ότι η εμφύτευση του $D(\mathcal{E})$ στον $L^q(\mu)$ είναι συμπαγής για κάθε $q \in [2, p)$. Έστω λοιπόν $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων στο $D(\mathcal{E})$ που ικανοποιούν την ανισότητα Sobolev με σχεδόν βέλτιστο τρόπο, δηλαδή για κάθε $k \geq 1$ ισχύουν οι

$$\|f_k\|_q^2 \geq (1+\varepsilon)\|f_k\|_2^2 + C(q,\varepsilon)\mathcal{E}(f_k) - \frac{1}{k} \tag{5.3.18}$$

και $\|f_k\|_2^2 + \mathcal{E}(f_k) = 1$. Επίσης, αφού $\mathcal{E}(|f_k|) \leqslant \mathcal{E}(f_k)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε k έχουμε $f_k \geq 0$. Από την ιδιότητα συμπάγειας υπάρχει υπακολουθία, την οποία συμβολίζουμε πάλι με (f_k), η οποία συγκλίνει σχεδόν παντού στον $L^q(\mu)$ και ασθενώς στο $D(\mathcal{E})$ σε μια θετική συνάρτηση $f \in D(\mathcal{E})$. Για τη συνάρτηση αυτή, και για κάθε $u \in D(\mathcal{E})$, έχουμε

$$\int_E \left(f^{q-1} - (1-\varepsilon)f\right) u \, d\mu = C(q,\varepsilon)\mathcal{E}(f,u).$$

Όπως και πριν, από εδώ έπεται ότι $f \in D(\mathcal{L})$ και ότι η f ικανοποιεί την εξίσωση ακραίας συνάρτησης

$$f^{q-1} = (1+\varepsilon)f - C(q,\varepsilon)\mathcal{L}f = \left[(1+\varepsilon) - C(q,\varepsilon)\mathcal{L}\right](f).$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η f είναι άνω και κάτω φραγμένη από κάποια θετική σταθερά. Πράγματι, παρατηρούμε ότι η εξίσωση ακραίας συνάρτησης γράφεται στη μορφή

$$f = C(q,\varepsilon)^{-1}\left(\frac{1+\varepsilon}{C(q,\varepsilon)}Id - \mathcal{L}\right)^{-1}(f^{q-1}) = C(q,\varepsilon)^{-1}R_\lambda(f^{q-1}), \tag{5.3.19}$$

όπου $\lambda = \frac{1+\varepsilon}{C(q,\varepsilon)}$ και $R_\lambda = (\lambda Id - \mathcal{L})^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_t\,dt$ είναι ο επιλύων τελεστής.

Για το άνω φράγμα, από το Πόρισμα 4.1.7 έχουμε ότι για κάθε $\lambda > 0$ η $R_\lambda(f^{q-1})$ είναι φραγμένη για $f \in L^r(\mu)$ όπου $r > (q-1)\frac{n}{2}$. Επίσης, από το ίδιο πόρισμα συμπεραίνουμε ότι αν $f \in L^r(\mu)$

τότε $f \in L^{r'}(\mu)$ για κάθε $r' \leqslant \frac{r}{\alpha}$ όπου $\alpha = q - 1 - \frac{2r}{n}$, λόγω της σχέσης (5.3.19) (για $q \geq 2$ έχουμε $r' < \frac{rn}{n-2}$ και από το Πόρισμα 4.1.7 ο R_λ είναι φραγμένος για κάθε $f \in L^{r'}$, και από την (5.3.19) παίρνουμε $f \in L^{r'}(\mu)$). Αφού $\alpha < 1$ όταν $r > (q-2)\frac{n}{2}$, με μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία όπως παραπάνω και λόγω της (5.3.19) συμπεραίνουμε ότι η f είναι φραγμένη όταν ανήκει στο $L^{q_0}(\mu)$ για κάποιο $q_0 > (q-2)\frac{n}{2}$. Στην περίπτωσή μας $f \in L^q(\mu)$ για $q > (q-2)\frac{n}{2}$, οπότε είναι άνω φραγμένη.

Για το (θετικό) κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε το ακόλουθο επιχείρημα. Αφού το μ είναι μέτρο πιθανότητας, ο P_t αναπαρίσταται από πυρήνα πιθανότητας $P_t g(x) = \int_E g(y) p_t(x,y)\, d\mu(x,y)$. Αφού ισχύει η ανισότητα Sobolev, η Πρόταση 4.1.10 εξασφαλίζει κάτω φράγμα για τον πυρήνα p_t του P_t, για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, για κάθε $t \geq 1$ έχουμε $P_t g \geq c \int_E g\, d\mu$ για κάποια σταθερά $c > 0$ και κάθε $g > 0$. Τότε, έχουμε

$$R_\lambda(f^{q-1}) \geq \int_1^\infty P_t(f^{q-1}) e^{-\lambda t}\, dt \geq c \int_E f^{q-1}\, d\mu \int_1^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{ce^{-\lambda}}{\lambda} \int_E f^{q-1}\, d\mu.$$

Έτσι από την (5.3.19) έπεται ότι η f είναι και κάτω φραγμένη. Δηλαδή, η f ικανοποιεί την εξίσωση ακραίας συνάρτησης, είναι άνω και κάτω φραγμένη και προσεγγίζεται από συναρτήσεις στο $D(\mathcal{E})$. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε πλέον ολοκληρώσει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.3.7. Η προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ με $\rho > 0$ και $2 < n < \infty$, συνεπάγεται ότι για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ ισχύει

$$\frac{\|f\|_q^2 - \|f\|_2^2}{q-2} \leqslant \frac{n-1}{\rho n} \mathcal{E}(f) \tag{5.3.20}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \frac{2n}{n-2}$. Η ανισότητα αυτή καλείται ανισότητα τύπου Beckner.

Παρατήρηση 5.3.8. Η σφαίρα $\mathbb{S}^n$ έχει σταθερή καμπυλότητα $\rho = n-1$, άρα για $E = \mathbb{S}^n$ και $p = \frac{2n}{n-2}$, το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι η ανισότητα Sobolev στη σφαίρα με βέλτιστη σταθερά, υπό τη συνθήκη $CD(\rho, n)$, είναι η

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{4}{n(n-2)} \int_{\mathbb{S}^n} \Gamma(f)\, d\mu. \tag{5.3.21}$$

Όταν $q \to \infty$ η ανισότητα (5.3.20) έχει ως συνέπεια ανισότητες Moser-Trudinger της μορφής

$$\ln\left(\int_E e^f\, d\mu\right) - \int_E f\, d\mu \leqslant \frac{n-1}{2\rho n} \mathcal{E}(f)$$

για $f \in D(\mathcal{E})$.

Τέλος, δείχνουμε ότι ισχύει και η ανισότητα Poincaré αν υποθέσουμε τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης. Θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.3.9. *Μία τριάδα Markov (E, μ, Γ) ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré $P(C)$ αν και μόνον αν*

$$\mathcal{E}(f) = \int_E \Gamma(f)\, d\mu \leqslant C \int_E (\mathcal{L} f)^2\, d\mu \tag{5.3.22}$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{L})$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{A}$. Υποθέτουμε αρχικά ότι ισχύει η (5.3.22). Θεωρούμε την $\Lambda(t) = \int_E (P_t f)^2 \, d\mu$ για $t \geq 0$. Τότε,

$$\Lambda'(t) = -2 \int_E \Gamma(P_t f) \, d\mu$$

και

$$\Lambda''(t) = -4 \int_E \Gamma(P_t f, \mathcal{L} P_t f) \, d\mu = 4 \int_E (\mathcal{L} P_t f)^2 \, d\mu.$$

Από την (5.3.22) παίρνουμε

$$\Lambda''(t) \geq -\frac{2}{C} \Lambda'(t)$$

για κάθε $t > 0$. Αφού $\mu(E) = 1$, λόγω εργοδικότητας έχουμε $\lim_{t\to\infty} P_t f = \int_E f \, d\mu$ και επίσης ειναι $\Lambda(0) = \int_E f^2 \, d\mu$, άρα ολοκληρώνοντας στο $[0, \infty)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &= \int_E f^2 \, d\mu - \left(\int_E f \, d\mu \right)^2 = -\int_0^\infty \Lambda'(t) \, dt \\ &\leqslant \frac{C}{2} \int_0^\infty \Lambda''(t) \, dt = -\frac{C}{2} \Lambda'(0) \\ &= C \int_E \Gamma(f) \, d\mu. \end{aligned}$$

που είναι η ανισότητα Poincaré.

Αντίστροφα, έστω $f \in D(\mathcal{L})$ με $\int_E f \, d\mu = 0$, οπότε $\mathrm{Var}_\mu(f) = \int_E f^2 \, d\mu$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(f) = \int_E \Gamma(f) \, d\mu = \int_E f(-\mathcal{L} f) \, d\mu &\leqslant \left(\int_E f^2 \, d\mu \int_E (\mathcal{L} f)^2 \, d\mu \right)^{1/2} \\ &= (\mathrm{Var}_\mu(f))^{1/2} \left(\int_E (\mathcal{L} f)^2 \, d\mu \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{C} \left(\int_E \Gamma(f) \, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_E (\mathcal{L} f)^2 \, d\mu \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η $P(C)$. Οπότε, τελικά παίρνουμε

$$\int_E \Gamma(f) \, d\mu \leqslant C \int_E (\mathcal{L} f)^2 \, d\mu$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 5.3.10. *Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με $\mu(E) = 1$. Αν ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(\rho, n)$ με $\rho > 0$ και $n > 1$, τότε ικανοποιείται η ανισότητα Poincaré με σταθερά $C = \frac{n-1}{\rho n}$.*

Απόδειξη. Ισχύει η $CD(\rho, n)$, άρα έχουμε

$$\Gamma_2(f) \geq \rho \Gamma(f) + \frac{1}{n} (\mathcal{L} f)^2.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε

$$\int_E \Gamma_2(f) \, d\mu \geq \rho \int_E \Gamma(f) \, d\mu + \frac{1}{n} \int_E (\mathcal{L} f)^2 \, d\mu.$$

Όμως,

$$\int_E \Gamma_2(f)\, d\mu = \int_E (\mathcal{L}f)^2\, d\mu$$

όπως έχουμε δείξει όταν συζητούσαμε τις ιδιότητες του τελεστή Γ_2. Άρα, έχουμε

$$\frac{n-1}{n}\int_E (\mathcal{L}f)^2\, d\mu \geq \rho \int_E \Gamma(f)\, d\mu,$$

δηλαδή

$$\int_E (\mathcal{L}f)^2\, d\mu \geq \frac{\rho n}{n-1}\int_E \Gamma(f)\, d\mu.$$

Από την Πρόταση 5.3.9 παίρνουμε άμεσα την ανισότητα Poincaré $P(\frac{n-1}{\rho n})$. □

Παρατήρηση 5.3.11. Στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος είδαμε ότι

$$\int_E (\mathcal{L}f)^2\, d\mu \geq \frac{\rho n}{n-1}\int_E \Gamma(f)\, d\mu = \frac{\rho n}{n-1}\int_E f(-\mathcal{L}f)\, d\mu.$$

Αν $f \neq 0$ είναι ιδιοσυνάρτηση της $-\mathcal{L}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda > 0$ (δηλαδή, $-\mathcal{L}f = \lambda f$) η τελευταία σχέση μας δίνει

$$\lambda\left(\lambda - \frac{\rho n}{n-1}\right) \geq 0,$$

άρα $\lambda \geq \frac{\rho n}{n-1}$. Έπεται ότι η πρώτη μη-μηδενική ιδιοτιμή λ_1 του τελεστή Laplace σε μία n-διάστατη συμπαγή πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα Ricci κάτω φραγμένη από ρ, ικανοποιεί την

$$\lambda_1 \geq \frac{\rho n}{n-1}.$$

Αυτή η ανισότητα είναι γνωστή ως θεώρημα Lichnerowicz.

5.4 Σύμμορφα αναλλοίωτες ανισότητες Sobolev

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι η βέλτιστη ανισότητα Sobolev στη σφαίρα παράγει, και ταυτόχρονα είναι ισοδύναμη με, τις αντίστοιχες βέλτιστες ανισότητες Sobolev στον Ευκλείδειο και στον υπερβολικό χώρο. Αν (M,G) είναι μια πολλαπλότητα Riemann τότε για κάθε $x \in M$ η μετρική Riemann G στον εφαπτόμενο χώρο T_xM αναπαρίσταται σε τοπικές συντεταγμένες από εναν θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα $G(x) = (g_{i,j}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Η συν-μετρική (co-metric) που θα χρειαστούμε είναι ο αντίστροφος του G και θα συμβολίζεται με $g = G^{-1}$. Με τον όρο *σύμμορφη αναλλοίωτη* μπορεί να σκεφτόμαστε την αλλαγή, σε μια πολλαλότητα (M,g) διάστασης n, της συν-μετρικής g σε $c^2 g$ ή του τελεστή carré du champ Γ σε $c^2\Gamma$, όπου $c > 0$ είναι δοθείσα γνήσια θετική συνάρτηση. Την ίδια στιγμή, το αντίστοιχο μέτρο μ μετατρέπεται στο $c^{-n}\mu$.

Ορισμός 5.4.1 (βαθμωτή καμπυλότητα). *Η βαθμωτή καμπυλότητα $sc_g(x)$ σε κάποιο σημείο $x \in M$ είναι το ίχνος του τανυστή Ricci. Σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται στη μορφή*

$$\mathrm{sc}_g(x) = \sum_{i,j}^{n} g^{ij}(x)\mathrm{Ric}_{ij}(x),$$

όπου $(\mathrm{Ric}_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ είναι ο τανυστής Ricci στο σημείο x.

Παράδειγμα 5.4.2. *Στη σφαίρα* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *διάστασης* n *και σταθερής καμπυλότητας Ricci* $\mathrm{Ric}_{i,j} = (n-1)g_{i,j}$, *ελέγχουμε εύκολα ότι* $\mathrm{sc}_g(x) = n(n-1)$ *σε κάθε σημείο. Όμοια,* $\mathrm{sc}_g(x) = 0$ *στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $\mathrm{sc}_g(x) = -n(n-1)$ *στον υπερβολικό χώρο* $\mathbb{H}^n$.

Η βέλτιστη ανισότητα Sobolev στη σφαίρα (5.3.21) ως προς το ομοιόμορφο μέτρο μ και την αντίστοιχη μορφή Dirichlet $\mathcal{E}$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{4}{n(n-2)} \left[\frac{n-2}{4(n-1)} \int_{\mathbb{S}^n} \mathrm{sc}_g f^2 \, d\mu + \mathcal{E}(f) \right] \tag{5.4.1}$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$. Με αυτή τη διατύπωση της ανισότητας Sobolev τονίζεται ο ρόλος της βαθμωτής καμπυλότητας ως σύμμορφης αναλλοίωτης.

Αυτός ο σύμμορφος μετασχηματισμός μπορεί να παρουσιαστεί και σε γενικότερο πλαίσιο. Έστω (E, μ, Γ) τριάδα Markov με γεννήτορα $\mathcal{L}$ και μορφή Dirichlet $\mathcal{E}(f) = \int_E f \, d\mu$. Η n-σύμμορφη κλάση, $n \geq 2$, της (E, μ, Γ) είναι το σύνολο όλων των τριάδων Markov $(E, c^{-n}\mu, c^2\Gamma)$, για όλες τις γνήσια θετικές συναρτήσεις $c \in \mathcal{A}$. Μία *n-σύμμορφη αναλλοίωτη* είναι μια απεικόνιση $S = S(\mu, \Gamma) : E \to \mathbb{R}$ που εξαρτάται μόνο από τα μ και Γ, τέτοια ώστε, για κάθε συνάρτηση $c = e^\tau \in \mathcal{A}$,

$$S(c^{-n}\mu, c^2\Gamma) = c^2 \left[S(\mu, \Gamma) + \frac{n-2}{2} \left(\mathcal{L}\tau - \frac{n-2}{2}\Gamma(\tau) \right) \right]. \tag{5.4.2}$$

Με αυτόν τον ορισμό έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.4.3. *Έστω* $p = \frac{2n}{n-2}$, $n > 2$, *και* $S(\mu, \Gamma)$ *μία n-σύμμορφη αναλλοίωτη απεικόνιση. Τότε, η ανισότητα Sobolev*

$$\|f\|_p^2 \leqslant C \left[\int_E S(\mu, \Gamma) f^2 \, d\mu + \mathcal{E}(f) \right], \qquad f \in D(\mathcal{E}) \tag{5.4.3}$$

για κάποια $C > 0$, *είναι αναλλοίωτη στην n-σύμμορφη κλάση* (E, μ, Γ). *Δηλαδή, αν ισχύει για ένα ζευγάρι* (μ, Γ) *τότε ισχύει με την ίδια σταθερά* C *για το ζευγάρι* $(c^{-n}\mu, c^2\Gamma)$ *για κάθε γνήσια θετική συνάρτηση* $c \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την ανισότητα (5.4.3) για την $c^{\frac{2-n}{2}} f$ στη θέση της f. Τότε, αφού $p = \frac{2n}{n-2}$, έχουμε

$$\|c^{\frac{2-n}{2}} f\|_p^2 = \left(\int_E f^p c^{-n} \, d\mu \right)^{\frac{2}{p}}$$

και

$$\mathcal{E}(c^{\frac{2-n}{2}} f) = \int_E \Gamma(c^{\frac{2-n}{2}} f) \, d\mu.$$

Για διαφορίσιμες συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{A}$, ο τελεστής Γ σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται

$$\Gamma(f, g) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

όπου $g = (g^{ij}(x))$ συμμετρικός πίνακας με τιμές στο E. Υπολογίζουμε τις

$$\frac{\partial(c^{\frac{2-n}{2}} f)}{\partial x_i} = f \frac{2-n}{2} c^{-n/2} \frac{\partial C}{\partial x_i} + c^{\frac{2-n}{2}} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

και

$$\frac{\partial(c^{\frac{2-n}{2}}f)}{\partial x_j}=f\frac{2-n}{2}c^{-n/2}\frac{\partial C}{\partial x_j}+c^{\frac{2-n}{2}}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\Gamma(c^{\frac{2-n}{2}}f)&=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial(c^{\frac{2-n}{2}}f)}{\partial x_i}\frac{\partial(c^{\frac{2-n}{2}}f)}{\partial x_j}\\&=f^2\frac{(n-2)^2}{4}c^{-n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_j}+c^{2-n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\\&-c^{1-n}\frac{n-2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}f+\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}f\right).\end{aligned}$$

Όμως,

$$f^2\frac{(n-2)^2}{4}c^{-n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial c}{\partial x_j}=f^2\frac{(n-2)^2}{4}c^{-n}\Gamma(c)=f^2\frac{(n-2)^2}{4}c^{2-n}\Gamma(\tau),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η ισότητα $\Gamma(\psi(\tau))=(\psi'(\tau))^2\Gamma(\tau)$ για την $\psi(\tau)=c=e^{\tau}$. Έπεται ότι

$$c^{2-n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}=c^{2-n}\Gamma(f),$$

και τέλος

$$\begin{aligned}&-c^{1-n}\frac{n-2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}f+\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}f\right)\\&\quad=-c^{1-n}\frac{n-2}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial c}{\partial x_i}\frac{\partial(f^2)}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\frac{\partial(f^2)}{\partial x_i}\right)\\&\quad=-c^{1-n}\frac{n-2}{2}\Gamma(f^2,\tau)=-c^{1-n}\frac{n-2}{2}\Gamma(f^2,e^{\tau})\\&\quad=-c^{1-n}\frac{n-2}{2}c\Gamma(f^2,\tau)=-c^{2-n}\frac{n-2}{2}\Gamma(f^2,\tau),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και πάλι την ιδιότητα διάχυσης. Τελικά, οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\Gamma(c^{\frac{2-n}{2}}f)=c^{2-n}\left[\Gamma(f)-\frac{n-2}{2}\Gamma(f^2,\tau)+\frac{(n-2)^2}{4}f^2\Gamma(\tau)\right].\tag{5.4.4}$$

Ομοίως, με τη βοήθεια της

$$\mathcal{L}(f)=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

μετά από πράξεις βλέπουμε ότι ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ της ημιομάδας της τριάδα (E,μ,Γ) μέσω της $f\mapsto c^{\frac{2-n}{2}}f$ μετασχηματίζεται στον

$$\widehat{\mathcal{L}}=c^2[\mathcal{L}(\cdot)-(n-2)\Gamma(\tau,\cdot)]\tag{5.4.5}$$

για την τριάδα $(E, c^{-n}\mu, c^2\Gamma)$, όπου $c = e^\tau$. Έτσι, από την (5.4.4) έχουμε

$$\mathcal{E}(c^{\frac{2-n}{2}} f) = \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, d\mu - \frac{n-2}{2}\int_E c^2\Gamma(f^2,\tau)c^{-n}\, d\mu + \frac{(n-2)^2}{4}\int_E f^2c^2\Gamma(\tau)c^{-n}\, d\mu.$$

Χρησιμοποιώντας την (5.4.5) υπολογίζουμε το μεσαίο όρο

$$\begin{aligned} -\frac{n-2}{2}\int_E c^2\Gamma(f^2,\tau)c^{-n}\, d\mu &= \frac{n-2}{2}\int_E f^2\widehat{\mathcal{L}}\tau c^{-n}\, d\mu \\ &= \frac{n-2}{2}\int_E f^2c^2\mathcal{L}\tau c^{-n}\, d\mu - \frac{(n-2)^2}{2}\int_E f^2c^2\Gamma(\tau)c^{-n}\, d\mu. \end{aligned}$$

Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_E c^2 S(\mu,\Gamma)f^2c^{-n}\, d\mu + \int_E \Gamma(c^{\frac{2-n}{n}} f)\, d\mu \\ &= \int_E c^2S(\mu,\Gamma)f^2c^{-n}\, d\mu + \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, d\mu + \frac{n-2}{2}\int_E c^2f^2\mathcal{L}\tau c^{-n}\, d\mu \\ &- \frac{(n-2)^2}{2}\int_E f^2c^2\Gamma(\tau)c^{-n}\, d\mu + \frac{(n-2)^2}{4}\int_E f^2c^2\Gamma(\tau)c^{-n}\, d\mu \\ &= \int_E c^2f^2S(\mu,\Gamma)c^{-n}\, d\mu + \frac{n-2}{2}\int_E c^2f^2\mathcal{L}\tau c^{-n}\, d\mu \\ &- \frac{(n-2)^2}{4}\int_E c^2f^2\Gamma(\tau)c^{-n}\, d\mu + \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, d\mu \\ &= \int_E f^2c^2\left[S(\mu,\Gamma) + \frac{n-2}{2}(\mathcal{L}\tau - \frac{n-2}{2}\Gamma(\tau))\right]c^{-n}\, d\mu + \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, \mu \\ &= \int_E f^2S(c^{-n}\mu, c^2\Gamma)c^{-n}\, d\mu + \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, d\mu, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (5.4.2). Τελικά, βλέπουμε ότι

$$\left(\int_E f^pc^{-n}\, d\mu\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant C\left[\int_E S(c^{-n}\mu, c^2\Gamma)f^2c^{-n}\, d\mu + \int_E c^2\Gamma(f)c^{-n}\, d\mu\right]$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$. Δηλαδή, έχουμε την ανισότητα Sobolev με την ίδια σταθερά C για την τριάδα $(E, c^{-n}\mu, c^2\Gamma)$, για την γνήσια θετική συνάρτηση $c \in \mathcal{A}$. □

Στη γεωμετρία Riemann, αν η g είναι co-metric και $d\mu_g$ είναι το αντίστοιχο στοιχείο όγκου, η αλλαγή του Γ σε $c^2\Gamma$ και του $d\mu_g$ σε $c^{-n}d\mu_g$, αντιστοιχεί στη σύμμορφη αλλαγή της μετρικής g σε c^2g. Το μέτρο μ_g σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται $d\mu_g = \det(g)^{-1/2}dx$, όπου dx το μέτρο Lebesgue σε τοπικές συντεταγμένες και ο τελεστής carré du champ που αντιστοιχεί στην $g = (g^{ij})$ τοπικά παίρνει τη μορφή

$$\Gamma(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Παρατήρηση 5.4.4. Στο γενικό πλαίσιο μιας πολλαπλότητας Riemann με γεννήτορα $\mathcal{L} = \Delta_g - \nabla W\cdot\nabla$, τελεστή carré du champ τον $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$ για λείες $f : M \to \mathbb{R}$, και συμμετρικό αναλλοίωτο μέτρο $d\mu = e^{-W}d\mu_g$, όπου W λείο δυναμικό στην (M, g), η ανάλυση του τελεστή Γ_2 αποδεικνύει ότι η βαθμωτή καμπυλότητα (που ορίστηκε νωρίτερα) $\frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{sc}_g$ είναι n-σύμμορφη αναλλοίωτη απεικόνιση. Δηλαδή, ικανοποιεί την (5.4.2).

Απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Ο τελεστής Γ_2 στην (M, g) δίνεται από την

$$\Gamma_2(f) = |\nabla\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}(\mathcal{L})(\nabla f, \nabla f) \tag{5.4.6}$$

για λείες συναρτήσεις f, όπου $\nabla\nabla f = (\partial_{ij} f)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ είναι η Εσσιανή της f και $\mathrm{Ric}(\mathcal{L})$ είναι ένας συμμετρικός τανυστής που ορίζεται μέσω του τανυστή Ricci Ric_g της co-metric g ως εξής:

$$\mathrm{Ric}(\mathcal{L}) = \mathrm{Ric}_g + \nabla\nabla W.$$

Αρχικά υπολογίζουμε, για κάθε n και κάθε λεία γνήσια θετική συνάρτηση c, τον τανυστή Ricci που αντιστοιχεί στο ζευγάρι $(c^{-n}\mu, c^2\Gamma)$ από τον τανυστή Ricci που αντιστοιχεί στο ζευγάρι (μ, Γ). Υποθέτουμε αρχικά ότι η διάσταση της πολλαπλότητας ισούται με n_0 και ότι $n \neq n_0$. Οι υπολογισμοί που ακολουθούν πραγματοποιούνται στον χώρο $\mathcal{A}_0$ των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στη M.

Έστω λοιπόν $c = e^\tau$. Ο τελεστής Γ_2 που αντιστοιχεί στον γεννήτορα $c^2\mathcal{L}$ εκφράζεται συναρτήσει των Γ_2 και $\mathcal{L}$ ως εξής:

$$c^4\left[\Gamma_2(f) + 2\Gamma(\tau, \Gamma(f)) + (\mathcal{L}\tau + 2\Gamma(\tau))\Gamma(f) - 2\mathcal{L}f\Gamma(f, \tau)\right].$$

Σύμφωνα με την Πρόταση (5.4.3), και για γενικό n, σκοπός μας είναι να τροποποιήσουμε αυτόν τον τύπο συναρτήσει του τελεστή $\widehat{\mathcal{L}}$ που ορίστηκε στην (5.4.5), και για το σκοπό αυτό πρέπει να αντικαταστήσουμε τον $\Gamma_2(f)$ με $\Gamma_2(f) + (n-2)\nabla\nabla\tau(\nabla f, \nabla f)$ και τον $\mathcal{L}$ με $\mathcal{L} - (n-2)\Gamma(\tau, \cdot)$ στην προηγούμενη σχέση. Έτσι, αν $\widehat{\Gamma_2}$ είναι ο Γ_2 τελεστής του $\widehat{\mathcal{L}}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma_2}(f) = c^4[&\Gamma_2(f) + (n-2)\nabla\nabla\tau(\nabla f, \nabla f) + 2\Gamma(\tau, \Gamma(f)) \\ &+ (\mathcal{L}\tau - (n-4)\Gamma(\tau))\Gamma(f) - 2\mathcal{L}f\Gamma(f, \tau) + 2(n-2)\Gamma(f, \tau)^2].\end{aligned}$$

Οι όροι δεύτερης τάξης δίνονται από την

$$\widehat{\nabla\nabla} f = \nabla\nabla f + 2\nabla f \odot \nabla\tau - \Gamma(f, \tau)g,$$

όπου $\nabla f \odot \nabla\tau$ είναι το συμμετρικό τανυστικό γινόμενο που ισούται με

$$(\nabla f \odot \nabla\tau)(\nabla g, \nabla h) = \frac{1}{2}\left[\Gamma(f, g)\Gamma(\tau, h) + \Gamma(f, h)\Gamma(\tau, g)\right].$$

Άρα,

$$\begin{aligned}|\widehat{\nabla\nabla} f|^2 = c^4[&|\nabla\nabla f|^2 + 2\Gamma(\tau, \Gamma(f)) + 2\Gamma(f)\Gamma(\tau) \\ &+ (n_0-2)\Gamma(f, \tau)^2 - 2\Delta_g f\Gamma(f, \tau)].\end{aligned}$$

Σε αυτή τη σχέση, η διάσταση n_0 εμφανίζεται ως νόρμα, στο χώρο των συμμετρικών πινάκων, του μοναδιαίου πίνακα, με τη μορφή του όρου $\Gamma(f, \tau)g$. Ο όρος $\Delta_g f$ εμφανίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο, πάλι στο χώρο των συμμετρικών πινάκων, των $\nabla\nabla f$ και g και είναι το ίχνος του $\nabla\nabla f$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\widehat{\mathcal{L}})(\nabla f, \nabla f) = c^4[&\mathrm{Ric}(\mathcal{L})(\nabla f, \nabla f) + (n-2)\nabla\nabla\tau(\nabla f, \nabla f) \\ &+ (\mathcal{L}\tau - (n-2)\Gamma(\tau))\Gamma(f) + 2\nabla W(f)\Gamma(f, \tau) \\ &+ (2n - n_0 - 2)\Gamma(f, \tau)^2].\end{aligned}$$

Δηλαδή, με όρους τανυστών με χαμηλότερους δείκτες, δηλαδή ως συμμετρικοί τελεστές που δρουν στον εφαπτόμενο χώρο, ικανοποιούν την

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\widehat{\mathcal{L}}) &= \mathrm{Ric}(\mathcal{L}) + (n-2)\nabla\nabla\tau + (\mathcal{L}\tau - (n-2)\Gamma(\tau))g \\ &\quad + 2\nabla W \odot \nabla\tau + (2n - n_0 - 2)\nabla \odot \nabla\tau.\end{aligned}$$

Αυτός ο τύπος για την καμπυλότητας Ricci του $\widehat{\mathcal{L}}$ απλοποείται αρκετά όταν $n = n_0$ είναι η διάσταση της πολλαπλότητας και $\mathcal{L} = \Delta_g$ είναι ο τελεστής Laplace ($W = 0$). Πράγματι, τότε έχουμε

$$\mathrm{Ric}(\widehat{\Delta}_g) = \mathrm{Ric}_g + g\Delta_g\tau + (n-2)(\nabla\nabla\tau + \nabla\tau \odot \nabla\tau - \Gamma(\tau)g).$$

Παίρνοντας το ίχνος για να φτάσουμε στη βαθμωτή καμπυλότητα, εκφράζουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα $\widehat{\mathrm{sc}}_g$ του $\widehat{\mathcal{L}}$ συναρτήσει της sc_g ως εξής:

$$\widehat{\mathrm{sc}}_g = c^2\left[\mathrm{sc}_g + (n-1)\left(2\Delta_g\tau - (n-2)\Gamma(\tau)\right)\right].$$

Όμως, αφού $c = e^\tau$, η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$\widehat{\mathrm{sc}}_g = e^{2\tau}\left[\mathrm{sc}_g - \frac{4(n-1)}{n-2} e^{\frac{(n-2)\tau}{2}} \Delta_g(e^{-\frac{(n-2)\tau}{2}})\right], \tag{5.4.7}$$

και μέσω αυτής της σχέσης επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση $\frac{n-2}{4(n-1)}\mathrm{sc}_g$ ικανοποιεί τον ορισμό της σύμμορφα αναλλοίωτης απεικόνισης. □

Παρατήρηση 5.4.5. Θέτοντας $f = e^{-\frac{(n-2)\tau}{2}}$ και, ως συνήθως, $p = \frac{2n}{n-2}$, $n > 2$, ξαναγράφουμε την (5.4.7) ως

$$f^{p-1}\widehat{\mathrm{sc}}_g = f\mathrm{sc}_g - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g f. \tag{5.4.8}$$

Έτσι, από την Πρόταση 5.4.3 προκύπτει άμεσα το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.6 (σύμμορφα αναλλοίωτη ανισότητα Sobolev)**.** *Έστω Δ_g ο τελεστής Laplace-Beltrami σε μία πολλαπλότητα Riemann διάστασης $n > 2$ εφοδιασμένη με το μέτρο μ_g, τον τελεστή carré du champ $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$ και τη μορφή Dirichlet $\mathcal{E}(f) = \int_M \Gamma(f)\, d\mu_g$. Τότε, η βαθμωτή καμπυλότητα sc_g είναι n-σύμμορφη αναλλοίωτη απεικόνιση για την τριάδα (M, μ_g, Γ). Δηλαδή, αν ισχύει η ανισότητα Sobolev*

$$\|f\|_p^2 \leqslant C\left[\frac{n-2}{4(n-1)}\int_M \mathrm{sc}_g f^2\, d\mu_g + \mathcal{E}(f)\right]$$

για κάθε $f \in D(\mathcal{E})$ και $p = \frac{2n}{n-2}$, έπεται ότι η ίδια ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει αν το μέτρο αλλάξει σε $c^{-n}\mu_g$ και ο Γ σε $c^2\Gamma$, όπου c λεία γνήσια θετική συνάρτηση.

Παρακάτω συμβολίζουμε με ω_n τον όγκο της σφαίρας $\mathbb{S}^n$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$

Θεώρημα 5.4.7. *Για το μέτρο Riemann στους τρεις χώρους $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ και $\mathbb{H}^n$, $n > 2$, ισχύουν οι ακόλουθες βέλτιστες ανισότητες Sobolev για $p = \frac{2n}{n-2}$:*

(i) *Στον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

(ii) *Στη σφαίρα* $\mathbb{S}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{1}{\omega_n^{\frac{2}{n}}}\int_{\mathbb{S}^n} f^2\,d\mu + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

(iii) *Στον υπερβολικό χώρο* $\mathbb{H}^n$,

$$\|f\|_p^2 \leqslant -\frac{1}{\omega^{\frac{2}{n}}}\int_{\mathbb{H}^n} f^2\,d\mu + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}\mathcal{E}(f).$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από τη βέλτιστη ανισότητα Sobolev στη σφαίρα $\mathbb{S}^n$ που αποδείχθηκε στο Θεώρημα 5.3.6: έχουμε

$$\|f\|_p^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{4}{n(n-2)}\int_{\mathbb{S}^n}\Gamma(f)\frac{1}{\omega_n}\,d\sigma,$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\omega_n^{2/p}}\left(\int_{\mathbb{S}^n} f^p\,d\sigma\right)^{\frac{2}{p}} \leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^n} f^2\,d\sigma + \frac{4}{n(n-2)}\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^n}\Gamma(f)\,d\sigma.$$

Επομένως,

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{1}{\omega_n^{2/n}}\int_{\mathbb{S}^n} f^2\,d\sigma + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\mathcal{E}(f),$$

δηλαδή ισχύει η (ii).

Η στερεογραφική προβολή από τον $\mathbb{S}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι σύμμορφα αναλλοίωτη απεικόνιση. Επίσης, για τους τελεστές carré du champ $\Gamma(f)$, $|\nabla f|^2$ στη σφαίρα και στον $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα, ισχύει $\Gamma(f) = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^2|\nabla f|^2$ για το μέτρο $d\sigma = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^{-n}dx$. Οπότε, θεωρώντας την $c(x) = \frac{1+|x|^2}{2} > 0$ και αφού η βαθμωτή καμπυλότητα στον $\mathbb{R}^n$ είναι $\mathrm{sc}_g = 0$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.4.6 παίρνουμε

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}}\mathcal{E}(f),$$

δηλαδή τη βέλτιστη ανισότητα Sobolev στον $\mathbb{R}^n$.

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)$ του υπερβολικού χώρου, βλέπουμε ότι ο $\mathbb{H}^n$ έχει μετρική σύμμορφα ισοδύναμη με την Ευκλείδεια μετρική του $\mathbb{R}^n$. Σε τοπικές συντεταγμένες, αυτή γράφεται $g^{ij} = (x^n)^2\delta^{ij}$ για $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Άρα,

$$\begin{aligned}\Gamma(f) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = (x^n)^2\sum_{i,j=1}^n \delta^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\\ &= (x^n)^2\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = (x^n)^2|\nabla f|^2,\end{aligned}$$

όπου x^n είναι η συντεταγμένη του $(0,\infty)$ και για το αναλλοίωτο μέτρο ισχύει $d\mu(x) = (x^n)^{-n}dx$. Θεωρούμε τη λεία γνήσια θετική συνάρτηση $c(x) = x^n$. Αφού $\mathrm{sc}_g = -n(n-1)$ στον $\mathbb{H}^n$, και από πριν έχουμε $\Gamma_{\mathbb{S}^n}(f) = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^2|\nabla f|^2$, έχουμε $\Gamma_{\mathbb{H}^n}(f) = \left(\frac{2x^n}{1+|x|^2}\right)^2\Gamma_{\mathbb{S}^n}(f)$ και $d\mu =$

$\left(\frac{2x^n}{1+|x|^2}\right)^{-n} d\sigma$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.4.6 για τις $c_1(x) = \frac{2x^n}{1+|x|^2} > 0$, $\mathrm{sc}_g = -n(n-1)$ στην ανισότητα

$$\|f\|_p^2 \leqslant \frac{1}{n(n-1)\omega_n^{2/n}} \int_{\mathbb{S}^n} \mathrm{sc}_g f^2 \, d\sigma + \frac{4\mathcal{E}(f)}{n(n-2)\omega_n^{2/n}},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\|f\|_p^2 \leqslant -\frac{1}{\omega_n^{2/n}} \int_{\mathbb{H}^n} f^2 \, d\mu + \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{2/n}} \mathcal{E}(f).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.4.8. Από το Θεώρημα (5.4.6) προκύπτει μία σημαντική ιδιότητα που αφορά τις ακραίες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι δύο μετρικές που δίνονται από τους Γ και $c^2\Gamma$ έχουν σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα η οποία ισούται με $n(n-1)$. Τότε, η εξίσωση (5.4.8) του σύμμορφου μετασχηματισμού της βαθμωτής καμπυλότητας δίνει ότι η συνάρτηση $f = c^{-\frac{n-2}{2}}$ ικανοποιεί την

$$f^{p-1} - f = -c\mathcal{L}f$$

με $c = \frac{4}{n(n-2)}$ που είναι ακριβώς η ισότητα που ικανοποιούν οι ακραίες συναρτήσεις για την ανισότητα Sobolev στη σφαίρα $\mathbb{S}^n$. Υπάρχουν σύμμορφες απεικονίσεις στη σφαίρα, που είναι διαφορομορφισμοί $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, έτσι ώστε $T(\Gamma) = c^2\Gamma$. Η νέα μετρική $c^2\Gamma$ είναι η Γ μετά από αλλαγή συντεταγμένων και, αφού η καμπυλότητα είναι ανεξάρτηση από τις συντεταγμένες και αναλλοίωτη ως προς διαφορομορφισμούς, έπεται ότι η νέα μετρική έχει σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα. Έτσι, δικαιολογείται η ύπαρξη μη-σταθερών ακραίων συναρτήσεων για την ανισότητα Sobolev στη σφαίρα.

Παρατήρηση 5.4.9. Όμοια, μέσω της στερεογραφικής προβολής $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n$ έχουμε

$$\Gamma_{\mathbb{S}^n} = \left(\frac{1+|x|^2}{2}\right)^2 |\nabla f|^2.$$

Συγκρίνοντας τις βαθμωτές καμπυλότητες, θέτοντας $c(x) = \frac{1+|x|^2}{2}$ και $f = c^{-\frac{n-2}{2}}$, παίρνουμε

$$f^{p-1} = -\frac{4}{n(n-2)}\Delta f,$$

που είναι η ισότητα που ικανοποιούν οι ακραίες συναρτήσεις για τη βέλτιστη ανισότητα Sobolev στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι όλες οι ακραίες συναρτήσεις της ανισότητας Sobolev στον $\mathbb{R}^n$ είναι της μορφής

$$f_{\sigma,b,x_0}(x) = \left(\sigma^2 + b|x-x_0|^2\right)^{-\frac{n-2}{2}},$$

όπου $\sigma > 0$, $b > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανισότητες Gagliardo-Nirenberg και Sobolev-Kantorovich

6.1 Ανισότητες Gagliardo-Nirenberg

Σε αυτήν την παράγραφο θα επεκτείνουμε τις ανισότητες Sobolev και Nash σε μια γενικότερη οικογένεια ανισοτήτων, τις λεγόμενες ανισότητες Gagliardo-Nirenberg. Οι κλασικές ανισότητες Gagliardo-Nirenberg στον Ευκλείδειο χώρο μπορούν να οριστούν στο αφηρημένο πλαίσιο των τριάδων Markov (E,μ,Γ). Ο ορισμός που ακολουθεί μπορεί να διατυπωθεί για κάθε $p>2$, όπως όμως και για τις ανισότητες Sobolev, θεωρούμε μια παράμετρο διάστασης $n>2$ και υποθέτουμε ότι $p=\frac{2n}{n-2}$.

Ορισμός 6.1.1 (ανισότητες Gagliardo-Nirenberg)**.** *Έστω $n>2$, $p=\frac{2n}{n-2}$ και q,s τέτοιοι ώστε $1\leqslant s\leqslant q\leqslant p$. Θα λέμε ότι η τριάδα Markov (E,μ,Γ) ικανοποιεί την ανισότητα Gagliardo-Nirenberg $GN_n(q,s;A,C)$ με διάσταση n, παραμέτρους q,s και σταθερές $A\geqslant 0$, $C>0$ αν για κάθε συνάρτηση $f\in D(\mathcal{E})\cap L^s(\mu)$ ισχύει*

$$\|f\|_q \leqslant \left[A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right]^{\frac{\vartheta}{2}} \|f\|_s^{1-\vartheta}, \tag{6.1.1}$$

όπου ο $\vartheta\in[0,1]$ ορίζεται από την $\frac{1}{q}=\frac{\vartheta}{p}+\frac{1-\vartheta}{s}$.

Υποθέτουμε ότι $A\geqslant 0$ για απλότητα, αν και ο ορισμός θα μπορούσε γενικά να δοθεί για $A\in\mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ εντάσσεται στην οικογένεια ανισοτήτων Gagliardo-Nirenberg αν θέσουμε $\vartheta=1$ ή $q=s$, ενώ η ανισότητα Nash αν θέσουμε $q=2$ και $s=1$.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω (E,μ,Γ) τριάδα Markov, $n>2$, $p=\frac{2n}{n-2}$ και q,s με $1\leqslant s\leqslant q\leqslant p$. Τότε, η ανισότητα Sobolev $S_n(A,C)$ συνεπάγεται την ανισότητα Gagliardo-Nirenberg $GN_n(q,s;A,C)$. Αντίστροφα, η $GN_n(q,s;A,C)$ συνεπάγεται μια ανισότητα Sobolev $S_n(A',C')$ για κατάλληλες σταθερές A',C'.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η ανισότητα $S_n(A,C)$ με $n>2$, δηλαδή

$$\|f\|_p^2 \leqslant A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)$$

κάθε $f\in D(\mathcal{E})$. Στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.3 είδαμε ότι η συνάρτηση $\varphi : r\mapsto \ln(\|f\|_{\frac{1}{r}})$ είναι κυρτή ως προς $r>0$. Έστω $\vartheta\in[0,1]$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{q}=\frac{\vartheta}{p}+\frac{1-\vartheta}{s}$. Τότε, από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned}\ln(\|f\|_q) = \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \varphi\left(\frac{\vartheta}{p}+\frac{1-\vartheta}{s}\right) &\leqslant \vartheta\varphi\left(\frac{1}{p}\right)+(1-\vartheta)\varphi\left(\frac{1}{s}\right)\\ &= \vartheta\ln(\|f\|_p)+(1-\vartheta)\ln(\|f\|_s) = \ln\left(\|f\|_p^{\vartheta}\|f\|_s^{1-\vartheta}\right).\end{aligned}$$

Αφού η e^x είναι αύξουσα, βλέπουμε ότι $\|f\|_q\leqslant \|f\|_p^{\vartheta}\|f\|_s^{1-\vartheta}$, οπότε

$$\|f\|_q^{\frac{2}{\vartheta}}\|f\|_s^{\frac{2(\vartheta-1)}{\vartheta}} \leqslant \|f\|_p^2.$$

Από την τελευταία ανισότητα και της ανισότητα Sobolev παίρνουμε

$$\|f\|_q^{\frac{2}{\vartheta}}\|f\|_s^{\frac{2(\vartheta-1)}{\vartheta}} \leqslant A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f).$$

Άρα,

$$\|f\|_q\|f\|_s^{\vartheta-1} \leqslant \left[A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right]^{\frac{\vartheta}{2}},$$

και τελικά

$$\|f\|_q \leqslant \left[A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right]^{\frac{\vartheta}{2}}\|f\|_s^{1-\vartheta},$$

δηλαδή ισχύει η ζητούμενη ανισότητα $GN_n(q,s;A,C)$.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, υποθέτοντας ότι ισχύει η $GN_n(q,s;A,C)$ για κάποιους $1\leqslant s\leqslant q\leqslant p=\frac{2n}{n-2}$ και $\vartheta\in[0,1]$ που ορίζεται από την $\frac{1}{q}=\frac{\vartheta}{p}+\frac{1-\vartheta}{s}$, για δοθείσα $f\in D(\mathcal{E})$ εφαρμόζουμε την $GN_n(q,s;A,C)$ για τις

$$f_k := \min\{(f-2^k)_+, 2^k\}, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

και καταλήγουμε στην $S_n(A',C')$ όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.3 (iii), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του τεμαχισμού. Ξεκινάμε από τις

$$\|f_k\|_q \leqslant \left[A\|f_k\|_2^2 + C\mathcal{E}(f_k)\right]^{\frac{\vartheta}{2}}\|f_k\|_s^{1-\vartheta}. \tag{6.1.2}$$

Θεωρούμε τα μετρήσιμα σύνολα $N_k=\{f>2^k\}$, $k\in\mathbb{Z}$. Έχουμε δει ότι

$$2^k\mathbf{1}_{N_{k+1}} \leqslant f_k \leqslant 2^k\mathbf{1}_{N_k},$$

άρα ισχύουν οι

$$2^{2k}\mu(N_{k+1}) \leqslant \|f_k\|_2^2 \leqslant 2^{2k}\mu(N_k)$$

και

$$\|f_k\|_s^{1-\vartheta} = \left(\int_E f_k^s\,d\mu\right)^{\frac{1-\vartheta}{s}} \leqslant \left(\int_E 2^{ks}\mathbf{1}_{N_k}\,d\mu\right)^{\frac{1-\vartheta}{s}} \leqslant 2^{k(1-\vartheta)}\mu(N_k)^{\frac{1-\vartheta}{s}}.$$

Επίσης, έχουμε

$$\|f_k\|_q = \left(\int_E f_k^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\int_E 2^{kq} \mathbf{1}_{N_{k+1}} \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = 2^k \mu(N_{k+1})^{\frac{1}{q}}.$$

Από την (6.1.2) και τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$2^k \mu(N_{k+1})^{\frac{1}{q}} \leqslant \left[A 2^{2k} \mu(N_k) + C\mathcal{E}(f_k)\right]^{\frac{\vartheta}{2}} 2^{k(1-\vartheta)} \mu(N_k)^{\frac{1-\vartheta}{s}},$$

συνεπώς

$$\mu(N_{k+1})^{\frac{1}{q}} \leqslant b_k^{\frac{\vartheta}{2}} 2^{-\vartheta k} \mu(N_k)^{\frac{1-\vartheta}{s}},$$

όπου

$$b_k := A 2^{2k} \mu(N_k) + C\mathcal{E}(f_k) \geq 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$2^{k\vartheta q} \mu(N_{k+1}) \leqslant b_k^{\frac{\vartheta q}{2}} \mu(N_k)^{\frac{1-\vartheta}{s} q}.$$

Αφού $q\vartheta = p - \frac{q(1-\vartheta)}{s} p$, έχουμε

$$2^{kp} \mu(N_{k+1}) \leqslant 2^{k \frac{q(1-\vartheta)}{s} p} b_k^{\frac{q\vartheta}{2}} \mu(N_k)^{\frac{(1-\vartheta)q}{s}}. \tag{6.1.3}$$

Θέτουμε $\alpha_k := 2^{kp} \mu(N_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, από την (6.1.3) βλέπουμε ότι

$$\alpha_{k+1} = 2^{kp} 2 \mu(N_{k+1}) \leqslant 2^p b_k^{\frac{\vartheta q}{2}} 2^{k \frac{q(1-\vartheta)}{s} p} \mu(N_k)^{\frac{q(1-\vartheta)}{s}} = 2^p b_k^{\frac{\vartheta q}{2}} \alpha_k^{q \frac{1-\vartheta}{s}}.$$

Δηλαδή,

$$\alpha_{k+1} \leqslant 2^p b_k^{\frac{\vartheta q}{2}} \alpha_k^{\frac{q(1-\vartheta)}{s}}.$$

Έχουμε $\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{s}$, άρα $1 = \frac{\vartheta q}{p} + \frac{1-\vartheta}{s} q$ με $\vartheta q \leqslant q \leqslant p$, οπότε $\frac{p}{\vartheta q} \geq 1$. Έπεται ότι $\frac{s}{(1-\vartheta)q} \geq 1$ και οι $\frac{\vartheta q}{p}, \frac{1-\vartheta}{s} q$ είναι συζυγείς εκθέτες. Συνεπώς,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{k+1} \leqslant 2^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(b_k^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\vartheta q}{p}} \alpha_k^{\frac{q(1-\vartheta)}{s}} \leqslant 2^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\vartheta q}{p}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^{\frac{q(1-\vartheta)}{s}},$$

από την ανισότητα Hölder. Αυτό δείχνει ότι

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^{1-\frac{q(1-\vartheta)}{s}} \leqslant 2^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\vartheta q}{p}}.$$

Άρα,

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^{\frac{\vartheta q}{p}} \leqslant 2^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{\vartheta q}{p}},$$

και τελικά προκύπτει ότι

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \leqslant 2^{\frac{p^2}{\vartheta q}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{\frac{p}{2}},$$

όπου $\frac{p}{2} = \frac{n}{n-2} > 1$ αφού $n > 2$.

Ισχυρισμός 6.1.3. *Αφού $b_k \geq 0$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και $\frac{p}{2} > 1$ ισχύει*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{\frac{p}{2}} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Δείχνουμε αρχικά ότι αν $p > 2$ και $\alpha, b \geq 0$ τότε

$$\alpha^{\frac{p}{2}} + b^{\frac{p}{2}} \leqslant (\alpha + b)^{\frac{p}{2}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\alpha) = (\alpha + b)^{\frac{p}{2}} - \alpha^{\frac{p}{2}} - b^{\frac{p}{2}}$ στο $[0, \infty)$. Για κάθε $\alpha > 0$ είναι

$$f'(\alpha) = \frac{p}{2}\left((\alpha + b)^{p/2-1} - \alpha^{p/2-1}\right) > 0.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει $f(\alpha) \geq f(0) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

Υποθέτουμε ότι αν $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$ τότε

$$\alpha_1^{p/2} + \cdots + \alpha_k^{p/2} \leqslant (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)^{p/2}.$$

Τότε, για δοθέντες $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} \geqslant 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha_1^{p/2} + \cdots + \alpha_k^{p/2} + \alpha_{k+1}^{p/2} &\leqslant (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)^{p/2} + \alpha_{k+1}^{p/2} \\ &\leqslant (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1})^{p/2}.\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k^{p/2} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k\right)^{p/2},$$

και όμοια $\sum_{-N}^{-1} \alpha_k^{p/2} \leqslant \left(\sum_{-N}^{-1} \alpha_k\right)^{p/2}$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\sum_{k=-N}^{N} \alpha_k^{p/2} \leqslant \left(\sum_{k=-N}^{N} \alpha_k\right)^{p/2}.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^{p/2} \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^{p/2},$$

και ο ισχυρισμός έχει αποδειχτεί. □

Από τον ισχυρισμό έχουμε

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \leqslant 2^{p^2/\vartheta q} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\right)^{p/2}$$

και

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \leqslant A \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2k}\mu(N_k) + C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}(f_k) \leqslant \frac{4}{3} A \int_E f^2\, d\mu + C\mathcal{E}(f),$$

διότι $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{E}(f_k)\leqslant\mathcal{E}(f)$ και $\int_E f^2\,d\mu\geq\frac{3}{4}\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{2k}\mu(N_k)$ όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.3. Επίσης, έχουμε

$$\int_E f^p\,d\mu=\sum k\in\mathbb{Z}\int_{\{2^k\leqslant f\leqslant 2^{k+1}\}}\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{(k+1)p}\mu(N_k\backslash N_{k+1})\leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k.$$

Άρα,

$$\int_E f^p\,d\mu\leqslant 2^p\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k\leqslant 2^p2^{\frac{p^2}{\vartheta q}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k\right)^{p/2}\leqslant 2^{p+\frac{p^2}{\vartheta q}}\left(\frac{4}{3}A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f)\right)^{p/2},$$

και τελικά παίρνουμε

$$\|f\|_p^2\leqslant A'\|f\|_2^2+C'\mathcal{E}(f),$$

δηλαδή την $S_n(A',C')$ με $A'=\frac{16}{3}2^{\frac{2p}{\vartheta q}}A$ και $C'=42^{\frac{2p}{\vartheta q}}C$. □

Παρατήρηση 6.1.4. Έστω ότι ισχύει η ανισότητα $GN_n(q,s;A,C)$ (6.1.1). Αφού ο λογάριθμος είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\ln(\|f\|_q^2)&\leqslant\ln\left(\left[A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f)\right]^{\vartheta}\|f\|_s^{2(1-\vartheta)}\right)\\&=\vartheta\ln(A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f))+(1-\vartheta)\ln(\|f\|_s^2)\\&\leqslant\ln\left(\vartheta[A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f)]+(1-\vartheta)\|f\|_s^2\right).\end{aligned}$$

Τώρα, αφού η e^x είναι αύξουσα παίρνουμε την ασθενή μορφή της ανισότητας Gagliardo-Niremberg

$$\|f\|_q^2\leqslant\vartheta\left[A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f)\right]+(1-\vartheta)\|f\|_s^2 \tag{6.1.4}$$

για κάθε $f\in D(\mathcal{E})\cap L^s(\mu)$. Στον $\mathbb{R}^n$, αν ισχύει αυτή η ασθενής μορφή με $A=0$, τότε είναι το ίδιο καλή με τη γνήσια GN_n. Πράγματι, θεωρώντας στην (6.1.4) την $f_r(x)=f(rx)$ $(r>0)$ στη θέση της $f(x)$, έχουμε

$$\|f_r\|_q^2\leqslant C\vartheta\mathcal{E}(f_r)+(1-\vartheta)\|f_r\|_s^2.$$

Χρησιμοποιώντας το μεταχηματισμό $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ με $T(x)=rx$ και $|\det T(x)|=r^n$ για να κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|f_r\|_q^2=\frac{1}{r^{2n/q}}\|f\|_q^2$, $\|f_r\|_s^2=\frac{1}{r^{2n/s}}\|f\|_s^2$ και

$$\mathcal{E}(f_r)=\int_{\mathbb{R}^n}r^2|\nabla f(rx)|^2\,dx=r^{2-n}\mathcal{E}(f)=r^{-2n/p}\mathcal{E}(f).$$

Αντικαθιστώντας στην ανισότητα, παίρνουμε

$$\|f\|_q^2\leqslant C\vartheta r^{2n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\mathcal{E}(f)+(1-\vartheta)\|f\|_s^2r^{2n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{s}\right)}.$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς $r>0$ επιστρέφουμε στην ανισότητα $GN_n(q,s;0,C)$

Η πρόταση που ακολουθεί μας δίνει έναν διαφορετικό τρόπο γραμμικοποίησης των ανισοτήτων Gagliardo-Nirenberg.

Πρόταση 6.1.5. *Για κάθε $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ και τέτοιο ώστε $\vartheta\alpha<1$, η ανισότητα $GN_n(q,s;A,C)$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα*

$$\|f\|_q^{2\alpha}\leqslant\alpha\vartheta\left[A\|f\|_2^2+C\mathcal{E}(f)\right]+(1-\alpha\vartheta)\|f\|_s^{2\beta} \tag{6.1.5}$$

για κάθε $f\in D(\mathcal{E})\cap L^s(\mu)$, όπου $\beta=\frac{\alpha(1-\vartheta)}{1-\vartheta\alpha}$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η $GN_n(q,s;A,C)$. Θέτουμε $Q = A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)$. Τότε, η GN_n παίρνει τη μορφή

$$\|f\|_q^2 \leqslant Q^{\vartheta}\|f\|_s^{2-2\vartheta},$$

οπότε

$$\left(\frac{\|f\|_q^2}{\|f\|_s^2}\right)^{\alpha} \leqslant \left(\frac{Q}{\|f\|_s^2}\right)^{\alpha\vartheta}.$$

Από την υπόθεση έχουμε $\alpha\vartheta < 1$. Άρα, η συνάρτηση $\varphi(r) = r^{\alpha\vartheta}$ με $r > 0$ είναι κοίλη αφού $\varphi'(r) = \alpha\vartheta r^{\alpha\vartheta-1}$ και $\varphi''(r) = \alpha\vartheta(\alpha\vartheta-1)r^{\alpha\vartheta-2} < 0$. Συνεπώς, η φ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο, δηλαδή για κάθε $r_0 > 0$ ισχύει

$$\varphi(r) \leqslant \varphi'(r_0)(r-r_0) + \varphi(r_0).$$

Ισοδύναμα, μετά από στοιχειώδεις υπολογισμούς παίρνουμε

$$r^{\alpha\vartheta} \leqslant \alpha\vartheta r_0^{\alpha\vartheta-1}r + (1-\alpha\vartheta)r_0^{\alpha\vartheta}. \tag{6.1.6}$$

Επιλέγουμε $r_0 = \|f\|_s^{2\gamma}$, όπου $\gamma = \frac{\alpha-1}{1-\alpha\vartheta}$. Τότε, η (6.1.6) γίνεται

$$r^{\alpha\vartheta} \leqslant \alpha\vartheta\|f\|_s^{2(1-\alpha)}r + (1-\alpha\vartheta)\|f\|_s^{\frac{2\alpha\vartheta(\alpha-1)}{1-\alpha\vartheta}}.$$

Επομένως, για $r = \frac{Q}{\|f\|_s^2}$ έχουμε

$$\left(\frac{Q}{\|f\|_s^2}\right)^{\alpha\vartheta} \leqslant \alpha\vartheta\|f\|_s^{-2\alpha}Q + (1-\alpha\vartheta)\|f\|_s^{\frac{2\alpha\vartheta(\alpha-1)}{1-\alpha\vartheta}}.$$

Αφού $\left(\frac{Q}{\|f\|_s^2}\right)^{\alpha\vartheta} \geq \frac{\|f\|_q^{2\alpha}}{\|f\|_s^{2\alpha}}$, τελικά παίρνουμε

$$\|f\|_q^{2\alpha} \leqslant \alpha\vartheta Q + (1-\alpha\vartheta)\|f\|_s^{2\beta},$$

δηλαδή το ζητούμενο αν αντικαταστήσουμε το Q.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η ανισότητα (6.1.5). Την εφαρμόζουμε για την cf, όπου $c > 0$, και έχουμε

$$c^{2\alpha}\|f\|_q^{2\alpha} \leqslant \alpha\vartheta\left[A\|cf\|_2^2 + C\mathcal{E}(cf)\right] + (1-\alpha\vartheta)\|cf\|_s^{2\beta}.$$

Ισοδύναμα,

$$\|f\|_q^{2\alpha} \leqslant \alpha\vartheta c^{2(1-\alpha)}\left[A\|f\|_2^2 + C\mathcal{E}(f)\right] + (1-\alpha\vartheta)\|f\|_s^{2\beta}c^{2(\beta-\alpha)},$$

και $\beta - \alpha = \frac{\vartheta\alpha(\alpha-1)}{1-\alpha\vartheta}$. Ελαχιστοποιώντας ως προς $c \in (0,\infty)$ παίρνουμε την $GN_n(q,s;A,C)$ □

Στη συνέχεια θα δούμε μία νέα μέθοδο, η οποία βασίζεται στην κυρτή ανάλυση και οδηγεί σε γενικότερες ανισότητες Sobolev και Gagliardo-Nirenberg στον $\mathbb{R}^n$, με βέλτιστες σταθερές. Αρχικά δίνουμε κάποιους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 6.1.6. *Έστω $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ κυρτή συνάρτηση. Ο μετασχηματισμός Legendre της W συμβολίζεται με W^* και ορίζεται ως εξής:*

$$W^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle x,y\rangle - W(x)\}.$$

Για σχεδόν κάθε x στο πεδίο ορισμού της W, η W είναι διαφορίσιμη στο x και ισχύει

$$W^*(\nabla W(x)) + W(x) = \langle x, \nabla W(x)\rangle.$$

Έστω $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ ο χώρος των μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\, d\mu(x) < +\infty$. Θα χρειαστούμε το εξής θεώρημα του Brenier (περιγράφουμε την απόδειξη στο Παράρτημα).

Θεώρημα 6.1.7 (Brenier). *Έστω μ, ν δύο μέτρα πιθανότητας στον $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$, και έστω ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue dx. Τότε, υπάρχει κυρτή συνάρτηση φ στον $\mathbb{R}^n$, η απεικόνιση Brenier, τέτοια ώστε το ν να είναι η εικόνα του μ μέσω της απεικόνισης $T = \nabla\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Θα γράφουμε $\nabla\varphi\#\mu = \nu$. Δηλαδή, για κάθε φραγμένη συνάρτηση H στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} H\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} H(\nabla\varphi)\, d\mu.$$

Η $T = \nabla\varphi$ είναι μοναδικά ορισμένη μ-σχεδόν παντού και, αφού $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$, η απόσταση Wasserstein των μ και ν ισούται με

$$W_2(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2\, d\mu(x).$$

Αν $d\mu = f dx$ και $d\nu = g dx$, τότε μ-σχεδόν παντού ισχύει η εξίσωση Mogne-Ampère

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(\nabla^2\varphi(x)),$$

όπου $\nabla^2\varphi$ η Εσσιανή κατά Alexandrov (Borel ορισμένη σχεδόν παντού στο $\mathrm{Dom}(\varphi) = \mathrm{int}(\{\varphi < \infty\})$).

Πράγματι, από το θεώρημα Brenier, για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\zeta \in C_c(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta(y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(\nabla\varphi(x)) f(x)\, dx. \tag{6.1.7}$$

Αν υποθέσουμε ότι η φ είναι αυστηρά κυρτή, τότε η $\nabla\varphi$ είναι C^1 και $1-1$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \nabla\varphi(x)$ στο αριστερό μέλος της (6.1.7) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta(y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(\nabla\varphi(x)) g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x))\, dx. \tag{6.1.8}$$

Αφού η ζ είναι τυχούσα, συνδυάζοντας τις (6.1.6) και (6.1.7) συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(\nabla^2\varphi(x)).$$

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι $\Delta(\varphi) = \mathrm{tr}(\nabla^2\varphi)$. Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα από την κυρτή ανάλυση.

Λήμμα 6.1.8. (i) *Για κάθε $k \in (0, 1/n]$, η απεικόνιση $H \mapsto \det^k H$ είναι κοίλη στην κλάση των θετικά ορισμένων συμμετρικών πινάκων. Έπεται ότι*

$$\overset{k}{\det} H \leqslant 1 - nk + k \cdot \mathrm{tr}(H)$$

για κάθε θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα H.

(ii) *Για κάθε $k < 0$, η απεικόνιση $H \mapsto \det^k H$ είναι κυρτή γιαστην κλάση των θετικά ορισμένων συμμετρικών πινάκων. Έπεται ότι*

$$\overset{k}{\det} H \geq 1 - nk + k \cdot \mathrm{tr}(H)$$

για κάθε θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα H.

Μια απόδειξη του Λήμματος 6.1.8 δίνεται στο Convex Optimization των Boyd-Vandenberghe.

Λήμμα 6.1.9. *Έστω φ κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ με $U = \mathrm{dom}(\varphi)$. Τότε, για κάθε $f > 0$, λεία με συμπαγή φορέα στο U, ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \Delta_A \varphi \leqslant -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \nabla \varphi.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\Delta_A \varphi = \mathrm{tr}(\nabla^2 \varphi)$ ορίζεται σχεδόν παντού, είναι μη-αρνητική και η $\Delta\varphi$ (με την έννοια των κατανομών) είναι μέτρο στο U. Από το θεώρημα Rademacher, η $\nabla\varphi$ υπάρχει μ-ς.π. και ισούται με την παράγωγο της φ με την έννοια των κατανομών (βλέπε π.χ. Evans-Gariepy σελίδα 145). Άρα, ο ισχυρισμός του λήμματος ισοδυναμεί με την

$$\Delta_A \varphi \leqslant \Delta \varphi.$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε λεία θετική συνάρτηση f με συμπαγή φορέα στο U ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \Delta_A \varphi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Delta f.$$

Σταθεροποιούμε $h > 0$ και για κάθε g στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$g_h(x) := \frac{g(x + he_1) + g(x - he_1) - 2g(x)}{h^2}.$$

Τότε, θέτοντας $(\partial_A \varphi)_{11} := \mathrm{Hess}_x \varphi(e_1) e_1$ (το δεύτερο διαφορικό με την έννοια του Alexandrov, όπου αυτό υπάρχει) της φ στην κατεύθυνση e_1, έχουμε σχεδόν παντού ότι

$$\lim_{h \to 0} \varphi_h(x) = (\partial_A \varphi)_{11}.$$

Όμως, $\int \varphi_h f = \int \varphi f_h$ και αφού $\varphi_h \geq 0$ από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f (\partial_A \varphi)_{11} \leqslant \liminf_{h \to 0} \int \varphi f_h = \int \varphi (\partial f)_{11}.$$

Αντίστοιχες ανισότητες προκύπτουν για όλες τις διευθύνσεις e_i, και τελικά έχουμε $\int_{\mathbb{R}^n} f \Delta_A \varphi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Delta f$. $\square$

Το βασικό μας εργαλείο είναι το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 6.1.10 (Κυρτές ανισότητες). *Έστω $n \geq 1$ και $\alpha \geq n$ (με $\alpha > 1$ όταν $n = 1$). Έστω επίσης $W : \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\, dx < +\infty$. Τότε, για κάθε θετική και λεία συνάρτηση g που ικανοποιεί τις*

$$\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g) g^{-\alpha}\, dx < \infty \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\, dx < \infty$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^{-\alpha}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} W^{-\alpha}\,dx = 1,$$

έχουμε

$$(\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g)g^{-\alpha}\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\,dx, \tag{6.1.9}$$

με την ισότητα αν $g = W$ και η g είναι κυρτή.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση Brenier φ με $\nabla\varphi\#\mu = \nu$, όπου $d\mu = g^{-\alpha}dx$ και $d\nu = W^{-\alpha}dx$. Τότε, από την εξίσωση Monge-Ampère έχουμε ότι σχεδόν βεβαίως

$$W(\nabla\varphi) = g\left(\det \nabla^2\varphi\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Επιπλέον, αφού $\alpha \geq n$, οπότε $\frac{1}{\alpha} \leqslant \frac{1}{n}$, εφαρμόζοντας το Λήμμα (6.1.8) με $k = \frac{1}{\alpha}$ παίρνουμε

$$\left(\det \nabla^2\varphi\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1 - \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\Delta\varphi,$$

όπου $\Delta\varphi = \mathrm{tr}(\nabla^2\varphi)$. Ολοκληρώνοντας ως προς το μέτρο $g^{-\alpha}dx$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση Mogne-Ampère βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(\nabla\varphi)g^{-\alpha}\,dx \leqslant \left(1-\frac{n}{\alpha}\right)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi g^{1-\alpha}\,dx.$$

Από το Λήμμα 6.1.9 έπεται ότι

$$\alpha\int_{\mathbb{R}^n} W(\nabla\varphi)g^{-\alpha}\,dx \leqslant (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx + (\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} g^{-\alpha}\nabla g\nabla\varphi\,dx. \tag{6.1.10}$$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Legendre W^*,

$$\nabla g\nabla\varphi \leqslant W(\nabla\varphi) + W^*(\nabla g).$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα στην (6.1.10) και αναδιατάσσοντας τους όρους που προκύπτουν, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(\nabla\varphi)g^{-\alpha}\,dx \leqslant (\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g)g^{-\alpha}\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx.$$

Όμως, από τον ορισμό της φ έχουμε $\nabla\varphi\#g^{-\alpha} = W^{-\alpha}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(\nabla\varphi)g^{-\alpha}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(\nabla\varphi)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} W\,d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\,dx.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\,dx \leqslant (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\,dx + (\alpha-1)\int_{\mathbb{R}^n} W^*(\nabla g)g^{-\alpha}\,dx,$$

που ήταν το ζητούμενο. Τέλος, αν $g = W$ και η g είναι κυρτή, από τη σχέση

$$W^*(\nabla W(x)) + W(x) = \langle x, \nabla(x)\rangle$$

με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα. $\square$

Από το Θεώρημα 6.1.10 θα οδηγηθούμε αρχικά στην ανισότητα Sobolev και στη συνέχεια στην ανισότητα Gagliardo-Nirenberg στον $\mathbb{R}^n$, για τυχούσα νόρμα $\|\cdot\|$. Θεωρούμε τη δυϊκή νόρμα

$$\|y\|_* = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \langle x, y\rangle.$$

Ο μετασχηματισμός Legendre της απεικόνισης $x \mapsto \frac{\|x\|^q}{q}, q > 1$ είναι η συνάρτηση $y \mapsto \frac{\|y\|_*^p}{p}$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $n \geq 1$, $\alpha \geq n$ και $q > 1$. Θεωρούμε την $W(x) = \frac{\|x\|^q}{q} + C$ για $x \in \mathbb{R}^n$, επιλέγοντας $C > 0$ ώστε να ισχύει $\int_{\mathbb{R}^n} W^{-\alpha} = 1$. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$W^*(y) = \frac{\|y\|_*^p}{p} - C.$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.1.10 για την W. Αρχικά παρατηρούμε ότι η C είναι καλά ορισμένη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha} < \infty$ αν ικανοποιούνται τα εξής:

(i) αν $\alpha \geq n+1$ τότε $p > 1$.

(ii) αν $\alpha \in [n, n+1)$ τότε $1 < p < \frac{n}{n+1-\alpha} := \overline{p}$ (με $\overline{p} = n$ όταν $\alpha = n$).

Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα (i), (ii). Τότε, για κάθε λεία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με $\int g^{-\alpha} = 1$ η ανισότητα (6.1.9) γίνεται

$$D \leqslant \frac{\alpha - 1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla g\|_*^p}{g^\alpha}\, dx + (\alpha - n) \int_{\mathbb{R}^n} g^{1-\alpha}\, dx, \tag{6.1.11}$$

όπου $D = (\alpha - 1)C + \int_{\mathbb{R}^n} W^{1-\alpha}\, dx$ για σταθερά $W, \alpha > 1$. Αυτή είναι η βασική ανισότητα που θα χρειαστούμε.

Αρχικά δείχνουμε την ανισότητα Sobolev:

Θεώρημα 6.1.11. *Έστω $n \geq 2, p \in (1, n)$ και $p^* = \frac{np}{n-p}$. Τότε, η ανισότητα*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C_{n,p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

ισχύει για κάθε λεία συνάρτηση f τέτοια ώστε οι ποσότητες είναι καλά ορισμένες. Η βέλτιστη σταθερά $C_{n,p}$ πιάνεται από την απεικόνιση $x \mapsto (1 + \|x\|^q)^{\frac{p-n}{p}}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha = n$, $n > 2$ και θεωρούμε $p \in (1, n)$. Τότε, η ανισότητα (6.1.11) γίνεται

$$\frac{Dp}{n-1} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla g\|_*^p}{g^n}\, dx$$

για κάθε λεία συνάρτηση g με $\int_{\mathbb{R}^n} g^{-n}\, dx = 1$. Θέτοντας $f = g^{\frac{p-n}{p}}$, οπότε $g^{-n} \Rightarrow f^{\frac{pn}{n-p}}$, έχουμε $\nabla g = \frac{p}{p-n} f^{\frac{n}{p-n}} \nabla f$ και χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό της δυϊκής νόρμας γράφουμε την τελευταία ανισότητα στη μορφή

$$\frac{Dp}{n-1} \left|\frac{n-p}{p}\right|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p\, dx$$

για κάθε λεία συνάρτηση f με $\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{np}{n-p}}\,dx = 1$. Επομένως, αφαιρώντας την κανονικοποίηση παίρνουμε

$$\frac{Dp}{n-1}\left|\frac{n-p}{p}\right|^p\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{np}{n-p}}\,dx\right)^{\frac{n-p}{n}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx.$$

Η ανισότητα είναι βέλτιστη αφού ισχύει ως ισότητα όταν $g = W$ ή ισοδύναμα όταν $f(x) = \left(C + \frac{\|x\|^q}{q}\right)^{\frac{p-n}{p}}$. □

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ξανά την (6.1.11) για να καταλήξουμε σε ανισότητες Gagliardo-Nirenberg. Θεωρούμε λοιπόν $\alpha > n$ (η περίπτωση $\alpha = n$ αντιστοιχεί στην ανισότητα Sobolev) και $p \neq \alpha$ έτσι ώστε να ικανοποιούύνται οι συνθήκες (i), (ii). Θεωρώντας την $h = g^{\frac{p-\alpha}{p}}$, έχουμε $\nabla g = \frac{p}{p-\alpha} h^{\frac{\alpha}{p-\alpha}}\nabla h$ και η ανισότητα (6.1.11) γίνεται

$$D \leqslant \frac{\alpha-1}{p}\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{p}{p-\alpha}\right|^p h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\|h^{\frac{\alpha}{p-\alpha}}\nabla h\|_*^p\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\,dx.$$

Επομένως,

$$1 \leqslant D_2\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla h\|_*^p\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\,dx$$

για κάθε λεία συνάρτηση h τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx = 1$, όπου $D_2 = \frac{\alpha-1}{p}\left|\frac{p}{p-\alpha}\right|^p\frac{1}{D}$ θετική σταθερά που εξαρτάται από τα D, α και p. Αφαιρώντας την κανονικοποίηση, δηλαδή εφαρμόζοντας την τελευταία ανισότητα για την

$$l = \frac{h}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}}}$$

που ικανοποιεί την $\int_{\mathbb{R}^n} l^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx = 1$, παίρνουμε

$$1 \leqslant \frac{D_2}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha}}}\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla h\|_*^p\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},$$

δηλαδή

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha}} \leqslant D_2\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla h\|_*^p\,dx + (\alpha-n)\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\,dx\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{1-p}{\alpha}}$$

για κάθε λεία συνάρτηση h τέτοια ώστε οι ποσότητες στο αριστερό και δεξιό μέλος να είναι καλά ορισμένες. Για να καταλήξουμε σε μια συμπαγή μορφή της παραπάνω ανισότητας θεωρούμε την $h(x) = f(\lambda x)$ και ελαχιστοποιούμε ως προς $\lambda > 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}\left(1-\frac{1-p}{\alpha-p}\vartheta\right)} \leqslant D_3\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx\right)^{\frac{1-\vartheta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{p(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha-p}\vartheta},$$

όπου $D_3 = D_3(n,p,\alpha) > 0$ και $\vartheta = \frac{p(\alpha-n)}{p(\alpha-n)+n} \in (0,1)$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με τα πρόσημα των $1 - \frac{1-p}{\alpha-p}\vartheta = \frac{\alpha}{\alpha-p}\frac{(\alpha-n-1)p+n}{p(\alpha-n)+n}$ και $\frac{\alpha-1}{\alpha-p}\vartheta$:

(i) Αν $p < \alpha$, τότε και οι δύο συντελεστές είναι θετικοί, είτε $n \leqslant \alpha < n+1$ είτε $\alpha \geq n+1$.

(ii) Αν $p > \alpha$, τότε σε συνδυασμό με τους περιορισμούς (i), (ii) βλέπουμε ότι και οι δύο συντελεστές είναι αρνητικοί.

Συνοψίζουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 6.1.12 (ανισότητες Gagliardo-Nirenberg)**.** *Έστω $n \geq 1$ και $\alpha > n$. Τότε,*

(i) *Για κάθε $1 < p < \alpha$, η ανισότητα*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}} \leqslant D^+_{n,p,\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx\right)^{\frac{\vartheta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\right)^{\frac{\alpha-p}{p(\alpha-1)}(1-\vartheta)}$$

ισχύει για κάθε λεία συνάρτηση f τέτοια ώστε οι ποσότητες στο αριστερό και στο δεξιό μέλος να είναι καλά ορισμένες. Ο $\vartheta \in [0,1]$ είναι η μοναδική λύση της

$$\frac{\alpha-p}{\alpha} = \vartheta\frac{n-p}{n} + (1-\vartheta)\frac{\alpha-p}{\alpha-1}$$

και η $D^+_{n,p,\alpha}$ είναι η βέλτιστη σταθερά όπου πιάνεται στις ακραίες συναρτήσεις $x \mapsto (1+\|x\|^q)^{\frac{p-\alpha}{p}}$.

(ii) *Αν $p > \alpha$ όταν $\alpha \geq n+1$ ή $p \in (\alpha, \frac{n}{n+1-\alpha})$ όταν $\alpha \in [n, n+1)$, τότε η ανισότητα*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{p(\alpha-1)}{\alpha-p}}\right)^{\frac{\alpha-p}{p(\alpha-1)}} \leqslant D^-_{n,p,\alpha}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_*^p\,dx\right)^{\frac{\vartheta'}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{\frac{\alpha p}{\alpha-p}}\,dx\right)^{\frac{\alpha-p}{\alpha p}(1-\vartheta')}$$

ισχύει για κάθε λεία συνάρτηση f τέτοια ώστε οι ποσότητες στο αριστερό και στο δεξιό μέλος να είναι καλά ορισμένες. Εδώ, ο $\vartheta' \in [0,1]$ είναι η μοναδική λύση της $\frac{p-\alpha}{\alpha-1} = \vartheta'\frac{p-n}{n} + (1-\vartheta')\frac{p-\alpha}{\alpha}$ και η $D^+_{n,p,\alpha}$ είναι η βέλτιστη σταθερά που πιάνεται στις ακραίες συναρτησεις $x \mapsto (1+\|x\|^q)^{\frac{p-\alpha}{p}}$. Σε αυτή την περίπτωση οι εκθέτες των ολοκληρωμάτων είναι αρνητικοί.

Παρατήρηση 6.1.13. Η ανισότητα στην περίπτωση (i) του θεωρήματος είναι η *οικογένεια Del Pino-Dolbeault* των βέλτιστων ανισοτήτων Gagliardo-Nirenberg. Μάλιστα, παίρνοντας $p=2$, $\alpha = \nu$ και $q = \frac{2\nu}{\nu-2}$, $s = \frac{2(\nu-1)}{\nu-2}$, έχουμε

$$\frac{1}{q} = \vartheta\frac{n-2}{2n} + (1-\vartheta)\frac{1}{s}$$

και η ανισότητα της περίπτωσης (i) του θεωρήματος γίνεται

$$\|f\|_q^2 \leqslant D^+_{n,2,\nu}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|^2\,dx\right)^{\vartheta}\|f\|_s^{2(1-\vartheta)},$$

όπου $\mathcal{E}(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|^2\,dx$.

6.2 Ανισότητες Sobolev-Kantorovich

Πρόσφατα, οι E. Cinti και F. Otto απέδειξαν κάποιες νέες ανισότητες ανισότητες παρεμβολής, οι οποίες προέκυψαν από τη μελέτη προβλημάτων υπεραγωγιμότητας στη Φυσική. Συγκεκριμένα, έδειξαν ότι για κάθε θετική, περιοδική και λεία συνάρτηση $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ με $\int_{[0,1]^n} f\,dx = 1$ ισχύει η ανισότητα

$$\|(f-C)_+\|_r^{\vartheta} \leqslant C\|\nabla f\|_1 \cdot W_2(f,1) \tag{6.2.1}$$

όπου $r = \frac{3n+2}{3n}$, $\vartheta = \frac{3n+2}{2n}$ και η σταθερά $C > 0$ εξαρτάται μόνο από το n. Ως συνήθως, $(f-C)_+ = \max\{f-C, 0\}$ και $W_2(f,1)$ είναι η απόσταση Wasserstein των μέτρων πιθανότητας fdx και $1dx$ που θα ορίσουμε παρακάτω. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η παραπάνω ανισότητα ανήκει σε μία ευρύτερη οικογένεια ανισοτήτων παρεμβολής, οι οποίες ισχύουν σε γενικότερο πλαίσιο και καλούνται ανισότητες Sobolev-Kantorovich. Θα δουλέψουμε στο πλαίσιο πολλαπλοτήτων Riemann με μη αρνητική καμπυλότητα Ricci.

Έστω λοιπόν (M,g) μια πλήρης συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με μέτρο dx και έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στην M με λεία πυκνότητα ως προς dx. Τότε, η n-διάστατη πολλαπλότητα (M,g,μ) έχει δομή μετρικού χώρου πιθανότητας με κανονικοποιημένο στοιχείο όγκου $dx = d\mu$. Θα δουλέψουμε στο μετρικό χώρο πιθανότητας (M,g,μ) κάνοντας επιπλέον την υπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,N)$, η οποία αντιστοιχεί σε ένα μη-αρνητικό κάτω φράγμα για την καμπυλότητα Ricci.

Έστω μ,ν δύο μέτρα πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του M και $p \geq 1$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(M)$ το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στην M και με $\mathcal{P}_p(M)$ το σύνολο

$$\Big\{\mu \in \mathcal{P}(M) : \int_M d(x_0,x)^p \mu(dx) < \infty\Big\},$$

όπου x_0 τυχόν σημείο της M και $d(x,y)$ είναι η απόσταση Riemann μετξύ των x,y στην πολλαπλότητα M. Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι η απόσταση αυτή εφοδιάζει τη M με τη δομή μετρικού χώρου και ορίζεται από την

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma) : \gamma : [\alpha,\beta] \to M, \gamma(\alpha) = x, \gamma(\beta) = y\}$$

όπου $\gamma : [\alpha,\beta] \to M$ λεία καμπύλη από το $\mathbb{R}$ στη M και $L(\gamma)$ είναι το μήκος της καμπύλης γ. Η p-απόσταση Kantorovich-Wasserstein των $\mu,\nu \in \mathcal{P}(M)$ ορίζεται ως εξής:

$$W_p(\mu,\nu) = \inf\left(\int_{M\times M} d(x,y)^p\, d\pi(x,y)\right)^{1/p},$$

όπου το infimum υπολογίζεται πάνω από όλα τα ταιριάσματα $\pi \in \mathcal{P}(M\times M)$ με περιθώριες κατανομές τα μ,ν.

Με αυτούς τους ορισμούς, η γενική οικογένεια ανισοτήτων παρεμβολής Sobolev-Kantorovich παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω (M,g,μ) πολλαπλότητα Riemann όπως παραπάνω, και $d\mu = e^{-V}dx$, όπου $V : M \to \mathbb{R}$ είναι λεία θετική πυκνότητα. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0,N)$ για κάποιο $N \geq 1$. Τότε, για κάθε $p,q \geq 1$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία* *εξαρτάται μόνο από τα p, q, N τέτοια ώστε, για κάθε μέτρο πιθανότητας $d\nu = f d\mu$ με λεία πυκνότητα f ως προς το μ,*

$$\|(f - C)_+\|_r^{\vartheta} \leqslant C\|\nabla f\|_q \cdot W_p(\mu, \nu), \tag{6.2.2}$$

όπου $r = \frac{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{N}}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} > 1$ και $\vartheta = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.

Αυτό είναι το βασικό θεώρημα που θα αποδείξουμε σε αυτή την παράγραφο.

Παρατηρήσεις 6.2.2. (α) Η ανισότητα (6.2.2) στον επίπεδο n-διάστατο τόρο είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος για $q = 1, p = 2$ και $N = n$, για τα οποία είναι $r = \frac{3n+2}{3n}$.
(β) Η ανισότητα (6.2.2) του Θεωρήματος 6.2.1 μπορεί να εκφραστεί στην ασθενέστερη μορφή

$$\|f\|_r \leqslant C + C\|\nabla f\|_q^{1/\vartheta} W_p(\nu, \mu)^{1/\vartheta}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής διάχυσης που αντιστοιχεί στην (M, g, μ) με $d\mu = e^{-V}dx$ είναι ο $\mathcal{L} = \Delta - \nabla V \cdot \nabla$, με αναλοίωτο κι αντιστρέψιμο μέτρο το μ, και σχετίζεται με την ημιομάδα θερμότητας $\{P_t\}_{t\geq 0}$. Ο τελεστής carré du champ ορίζεται από την $\Gamma(f, g) = \nabla f \cdot \nabla g$, οπότε $\Gamma(f) = |\nabla f|^2$. Άρα, η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, N)$ για κάποιο $N \geq 1$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(|\nabla f|^2\right) - \nabla f \cdot \nabla \mathcal{L} f \geq \frac{1}{N}(\mathcal{L} f)^2$$

για κάθε λεία συνάρτηση $f : M \to \mathbb{R}$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 θα χρειαστούμε δύο βασικά εργαλεία. Το πρώτο είναι η γνωστή ανισότητα Harnack που έχουμε δείξει σε προηγούμενη παράγραφο και υπενθυμίζουμε παρακάτω:

Πρόταση 6.2.3 (ανισότητα Harnack υπό τη συνθήκη $CD(0, N)$)**.** *Έστω (M, g, μ) πολλαπλότητα Riemann με τις ιδιότητες που περιγράψαμε νωρίτερα, που ικανοποιεί τη συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, N)$. Για κάθε μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στην M και για κάθε $t, s > 0$ και $x, y \in M$, ισχύει η ανισότητα*

$$P_t f(y) \leqslant P_{t+s}(x) \left(\frac{t+s}{t}\right)^{N/2} e^{\frac{d(x,y)^2}{4s}}.$$

Το δεύτερο εργαλείο μας είναι μια ψευδο-Poincaré ανισότητα:

Πρόταση 6.2.4. *Έστω (M, g, μ) πολλαπλότητα Riemann στην οποία ικανοποιείται η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, N)$. Για κάθε λεία συνάρτηση f στην M και κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\|f - P_t f\|_q \leqslant B\sqrt{t}\|\nabla f\|_q, \tag{6.2.3}$$

όπου $B > 0$ αριθμητική σταθερά (π.χ. $B = \sqrt{2}$) για $1 \leqslant q \leqslant 2$, ενώ για $q \geq 2$ η σταθερά $B > 0$ εξαρτάται μόνο από το N.

Απόδειξη. Αφού ισχύει η $CD(0, N)$, τετριμμένα ισχύει και η $CD(0, \infty)$. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπό αυτή τη συνθήκη έχουμε

$$2s|\nabla P_s h|^2 \leqslant P_s(h^2) - (P_s h)^2 \tag{6.2.4}$$

Σταθεροποιούμε $t > 0$ και για $f \in L^2(\mu)$ θέτουμε

$$\Lambda(s) = P_s\left((P_{t-s}f)^2\right)$$

για $s \in [0,t]$. Τότε,

$$\Lambda'(s) = P_s\left(\mathcal{L}(P_{t-s}f)^2 - 2P_{t-s}f\mathcal{L}P_{t-s}f\right) = 2P_s\left(\Gamma(P_{t-s}f)\right),$$

παίρνοντας υπόψη την $\mathcal{L}f^2 = 2f\mathcal{L}f + 2\Gamma(f)$ που ισχύει από την ιδιότητα διάχυσης. Ολοκληρώνοντας στο $[0,t]$ παίρνουμε

$$P_t(f^2) - (P_tf)^2 = 2\int_0^t P_s\left(\Gamma(P_{t-s}f)\right)\,ds. \tag{6.2.5}$$

Σε προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε δείξει ότι, υπό τη συνθήκη $CD(\rho,\infty)$, για κάθε $t \geq 0$ ισχύει το ασθενές φράγμα κλίσης

$$\Gamma(P_tf) \leqslant e^{-2\rho t}P_t\left(\Gamma(f)\right).$$

Υπό τη συνθήκη $CD(\rho,\infty)$ η (6.2.5) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} P_t(f^2) - (P_tf)^2 &\geq 2\int_0^t e^{2\rho t}\Gamma\left(P_s(P_{t-s}f)\right)\,ds \\ &= 2\int_0^t e^{2\rho t}ds\Gamma(P_tf) = \frac{e^{2\rho t}-1}{\rho}\Gamma(P_tf). \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε $CD(0,\infty)$, άρα για $\rho \to 0$ είναι

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{e^{2\rho t}-1}{\rho} = \frac{d}{d\rho}e^{2\rho t}\Big|_{\rho=0} = 2t.$$

Δηλαδή, υπό τη συνθήκη $CD(0,\infty)$ έχουμε

$$P_t(f^2) - (P_tf)^2 \geq 2t\Gamma(P_tf). \tag{6.2.6}$$

Στο πλαίσιο που δουλεύουμε, για κάθε $h : M \to \mathbb{R}$ ισχύει $\Gamma(h) = |\nabla h|^2$. Επομένως, για κάθε $s > 0$ και κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $h : (M,g,\mu) \to \mathbb{R}$, η σχέση (6.2.6) γίνεται

$$2s|\nabla P_sh|^2 \leqslant P_s(h^2) - (P_sh)^2,$$

που είναι ακριβώς η ζητούμενη σχέση (6.2.4).

Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση h, από τη σχέση $\mathcal{L}P_sf = \frac{d}{ds}P_sf$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_M h(f - P_tf)\,d\mu &= -\int_0^t\int_M h\mathcal{L}P_sf\,d\mu\,ds \\ &= -\int_0^t\int_M hP_s(\mathcal{L}f)\,d\mu\,ds \\ &= -\int_0^t\int_M P_sh\mathcal{L}f\,d\mu\,ds \\ &= \int_0^t\int_M \Gamma(P_sh,f)\,d\mu\,ds \\ &= \int_0^t\int_M \langle\nabla P_sh,\nabla f\rangle\,d\mu\,ds, \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η $P_s(\mathcal{L}f) = \mathcal{L}P_s f$ και στην τρίτη η συμμετρία του μέτρου.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $1 \leqslant q \leqslant 2$. Αν q' είναι ο συζυγής εκθέτης του q, έχουμε $2 \leqslant q' \leqslant \infty$. Από τη σχέση (6.2.4) έχουμε

$$|\nabla P_s h| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2s}} \left(P_s(h^2) - (P_s h)^2\right)^{1/2},$$

συνεπώς

$$|\nabla P_s h|^{q'} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^{q'} \left(P_s(h^2) - (P_s h)^2\right)^{q'/2}.$$

Ολοκληρώνοντας στην πολλαπλότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla P_s h|^{q'}\, d\mu &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^{q'} \int_M \left(P_s(h^2) - (P_s h)^2\right)^{q'/2} d\mu \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^{q'} \int_M \left(P_s(h^2)\right)^{q'/2} d\mu \\
&\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^{q'} \int_M P_s(h^{q'})\, d\mu \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^{q'} \int_M h^{q'}\, d\mu.
\end{aligned}$$

Για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα Jensen για την ημιομάδα P_s, αφού $\frac{q'}{2} \geq 1$, και για την τελευταία ισότητα το αναλλοίωτο του μέτρου μ. Άρα,

$$\|\nabla P_s h\|_{q'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2s}} \|h\|_{q'}. \tag{6.2.7}$$

Τότε λόγω δυϊσμού, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - P_t f\|_q &= \sup\left\{\left|\int_M h(f - P_t f)\, d\mu\right| : \|h\|_{q'} = 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_0^t \int_M \langle \nabla P_s h, \nabla f\rangle\, d\mu\, ds\right| : \|h\|_{q'} = 1\right\} \\
&\leqslant \int_0^t \|\nabla P_s h\|_{q'} \|\nabla f\|_q\, ds,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση $\int_M h(f - P_t f)\, d\mu = \int_0^t \int_M \langle \nabla P_s h, \nabla f\rangle\, d\mu\, ds$ που δείξαμε πριν και, για την τελευταία ανισότητα, την ανισότητας Hölder. Η ανισότητα αυτή, σε συνδυασμό με την (6.2.7), δίνει

$$\|f - P_t f\|_q \leqslant \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2s}}\, ds \|\nabla f\|_q \|h\|_{q'},$$

και, αφού $\|h\|_{q'} = 1$, τελικά παίρνουμε

$$\|f - P_t f\|_q \leqslant \sqrt{2}\sqrt{t} \|\nabla f\|_q,$$

δηλαδή το ζητούμενο για $1 \leqslant q \leqslant 2$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $q \geqslant 2$. Έστω q' ο συζυγής εκθέτης. Τότε, για κάθε $h : M \to \mathbb{R}$ με $\|h\|_{q'} \leqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_M h(f - P_t f)\, d\mu &= \int_0^t \int_M \nabla P_s h \cdot \nabla f \, d\mu \, ds \\ &\leqslant \|\nabla f\|_q \int_0^t \|\nabla P_s h\|_{q'} \, ds\end{aligned}$$

από την ανισότητα Hölder. Αφού ισχύει η συνθήκη καμπυλότητας-διάστασης $CD(0, N)$, ισχύει η ανισότητα Li-Yau όπως έχουμε δείξει στο Πόρισμα 5.1.6. Δηλαδή, για κάθε λεία θετική συνάρτηση h και για κάθε $s > 0$ ισχύει

$$\frac{|\nabla P_s h|^2}{(P_s h)^2} - \frac{\Delta P_s h}{P_s h} \leqslant \frac{n}{2s}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $(P_s h)^{q'}$ έχουμε

$$(P_s h)^{q'-2} |\nabla P_s h|^2 - \Delta P_s h (P_s h)^{q'-1} \leqslant \frac{n}{2s} (P_s h)^{q'}.$$

Αφού $\mathcal{L} = \Delta$ και $\Gamma = \nabla \cdot \nabla$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη στην M και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\{P_s\}_{s \geq 0}$ είναι συστολή, έχουμε

$$q' \int_M (P_s h)^{q'-2} |\nabla P_s h|^2 \, d\mu \leqslant \frac{n}{2s} \int_M h^{q'} \, d\mu.$$

Αφού $q \geq 2$ έχουμε $1 \leqslant q' \leqslant 2$, άρα $\frac{2}{q'} \geq 1$. Από την ανισότητα Hölder και την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\|\nabla P_s h\|_{q'} \leqslant \left(\frac{n}{2q's}\right)^{1/2} \|h\|_{q'} \leqslant \left(\frac{n}{2s}\right)^{1/2} \|h\|_{q'}.$$

Άρα,

$$\int_M h(f - P_t f)\, d\mu \leqslant \|\nabla f\|_q \|h\|_{q'} \int_0^t \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2s}} \, ds = \sqrt{2n}\sqrt{t} \|\nabla f\|_q \|h\|_{q'}.$$

Παίρνοντας supremum πάνω από τα $\|h\|_{q'} \leqslant 1$ καταλήγουμε στην

$$\|f - P_t f\|_q \leqslant \sqrt{2n}\sqrt{t} \|\nabla f\|_q$$

για κάθε $q \geq 2$. □

Παρατήρηση 6.2.5. Στην περίπτωση $q = p = 2$ η ανισότητα του Θεωρήματος 6.2.1 παίρνει τη μορφή της ακόλουθης ανισότητας Sobolev-Poincaré:

$$\|f\|_r \leqslant CD(M) \|\nabla f\|_2, \tag{6.2.8}$$

για λείες συναρτήσεις f με μέση τιμή $\int_M f \, d\mu = 0$, όπου $r = \frac{2N}{N-2}$ για $N > 2$ και $D(M)$ είναι η διάμετρος της πολλαπλότητας, για την οποία έχουμε $D(M) \geq W_2(\mu, \nu)$. Η απόδειξη αυτής της ανισότητας είναι σύντομη και μπορεί να γίνει με ανεξάρτητο τρόπο. Έστω $f : M \to \mathbb{R}$ με μέση τιμή 0. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 6.2.4 με $q \geq 2$, για κάθε $t \geq 0$ έχουμε

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2t} \|\nabla f\|_2 + \|P_t f\|_2. \tag{6.2.9}$$

Από την ανισότητα Harnack της Πρότασης 6.2.3 με $s = D^2 := D(M)^2$, για κάθε $f > 0$ στην M και κάθε $x, y \in M$ και $t \geq 0$ έχουμε

$$P_t f(y) \leqslant 2\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/2} P_{t+D^2} f(x),$$

αφού $d(x,y) \leqslant D$. Ολοκληρώνοντας ως προς τη μεταβλητή x, και λόγω του αναλλοίωτου της ημιομάδας, συμπεραίνουμε ότι

$$\|P_t f\|_\infty \leqslant 2\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/2} \|f\|_1,$$

δηλαδή

$$\|P_t\|_{1,\infty} \leqslant 2\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/2}.$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η P_t είναι συστολή, άρα $\|P_t\|_{1,1} \leqslant 1$. Παίρνουμε $p_1 = 1, q_1 = \infty, p_2 = 1, q_2 = 1$ και για $\vartheta \in [0,1]$ ορίζουμε p_ϑ, q_ϑ έτσι ώστε $\frac{1}{p_\vartheta} = \frac{\vartheta}{p_1} + \frac{1-\vartheta}{p_2} = 1$, άρα $p_\vartheta = 1$, και $\frac{1}{q_\vartheta} = \frac{\vartheta}{q_1} + \frac{1-\vartheta}{q_2} = 1-\vartheta$, άρα $q_\vartheta = \frac{1}{1-\vartheta}$. Από το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin έχουμε $\|P_t\|_{p_\vartheta,q_\vartheta} \leqslant K_1^\vartheta K_2^{1-\vartheta}$, όπου $K_2 = 1$ και $K_1 = 2\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/2}$. Επιλέγουμε $\vartheta = \frac{1}{2}$ και έχουμε $\|P_t\|_{1,2} \leqslant \left(2\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/2}\right)^{1/2}$, δηλαδή

$$\|P_t f\|_2 \leqslant \sqrt{2}\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/4} \|f\|_1.$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την (6.2.9) παίρνουμε

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2t}\|\nabla f\|_2 + \sqrt{2}\left(1+\frac{D^2}{t}\right)^{N/4} \|f\|_1$$

για κάθε $t \geq 0$ και κάθε λεία συνάρτηση f. Ελαχιστοποιώντας ως προς $t > 0$ παίρνουμε την ανισότητα τύπου Nash

$$\|f\|_2 \leqslant C\left[\|f\|_2 + D\|\nabla f\|_2\right]^{\frac{N}{N+2}} \|f\|_1^{\frac{2}{N+2}},$$

όπου η σταθερά $C > 0$ εξαρτάται μόνο από τη διάσταση N.

Από την Πρόταση (3.3.3) γνωρίζουμε ότι η ανισότητα Nash συνεπάγεται μια ανισότητα Sobolev

$$\|f\|_r \leqslant C'[\|f\|_2 + D\|\nabla f\|_2],$$

όπου $r = \frac{2N}{N-2}$ για $N > 2$. Όμως, αφού το μέτρο μας είναι μέτρο πιθανότητας, έχουμε παρατηρήσει (μετά από την Πρόταση 3.3.3) ότι αν $\int_M f\,d\mu = 0$ τότε η ανισότητα Nash συνεπάγεται μία ανισότητα Poincaré με σταθερά ανάλογη της διαμέτρου, δηλαδή ισχύει

$$\|f\|_2 \leqslant C'' D\|\nabla f\|_2,$$

όπου $C'' = C''(N) > 0$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε

$$\|f\|_r \leqslant C_3 D(M)\|\nabla f\|_2,$$

όπου $C_3 = C'(1 + C'')$, δηλαδή τη ζητούμενη ανισότητα Sobolev-Poincaré.

Περνάμε τώρα στην απόδειξη της γενικής μορφής του Θεωρήματος 6.2.1. θα βασιστούμε σε μια ασθενούς τύπου εκτίμηση, η οποία διατυπώνεται στην Πρόταση 6.2.7, για την απόδειξη της οποίας θα χρειαστούμε το θεώρημα δυϊσμού του Kantorovich που διατυπώνουμε παρακάτω:

Θεώρημα 6.2.6 (θεώρημα δυϊσμού, Kantorovich)**.** *Έστω $c : M \times M \to [0,\infty]$ συνάρτηση κόστους όπου $c = d$ η γεωδαισιακή απόσταση και $\mu, \nu \in \mathcal{P}(M)$. Τότε,*

$$W_p(\mu,\nu)^p = \sup \left(\int_M u \, d\mu - \int_M u \, d\nu \right)$$

όπου το supremum υπολογίζεται πάνω από όλες τις 1-Lipschitz συναρτήσεις u.

Πρόταση 6.2.7. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.2.1, δηλαδή σε μια πολλαπλότητα Riemann που ικανοποιεί τη συνθήκη $CD(0,N)$, υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από τα p, q, N τέτοια ώστε*

$$\sup_{u \geq C} u^{\vartheta} \mu(f \geq u)^{\vartheta/r} \leqslant C \|\nabla f\|_q W_p(\mu,\nu),$$

για κάθε λεία πυκνότητα f, όπου $\vartheta = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{N}$.

Απόδειξη. Έστω $f > 0$ λεία πυκνότητα πιθανότητας στη M και $d\nu = f d\mu$. Έχουμε $f = |f| = |f - P_t f + P_t f| \leqslant |f - P_t f| + P_t f$ (αφού $f > 0 \Longrightarrow P_t f > 0$). Άρα,

$$\{f \geq 2u\} \subseteq \{|f - P_t f| \geq u\} \cup \{P_t f \geq u\},$$

και από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(f \geq 2u) &\leqslant \mu(|f - P_t f| \geq u) + \mu(P_t f \geq u) \\ &= \mu(|f - P_t f|^q \geq u^q) + \mu(P_t f \geq u) \\ &\leqslant \frac{1}{u^q} \int_M |f - P_t f|^q \, d\mu + \mu(P_t f \geq u) \\ &= \frac{1}{u^q} \|f - P_t f\|_q^q + \mu(P_t f \geq u). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 6.2.4 και την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$\mu(f \geq 2u) \leqslant \frac{B^q t^{q/2}}{u^q} \|\nabla f\|_q^q + \mu(P_t f \geq u). \tag{6.2.10}$$

Θεωρούμε το μετρήσιμο σύνολο $F = \{P_t f \geq u\}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mu(P_t f \geq u) &\leqslant \frac{1}{u} \int_F P_t f \, d\mu = \frac{1}{u} \int_M \mathbf{1}_F P_t f \, d\mu \\ &= \frac{1}{u} \int_M P_t(\mathbf{1}_F) f \, d\mu = \frac{1}{u} \int_M P_t(\mathbf{1}_F) \, d\nu. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα δυϊσμού του Kantorovich, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\int_M P_t(\mathbf{1}_F) \, d\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} W_p(\mu,\nu)^p + \int_M \widehat{Q_\varepsilon} P_t(\mathbf{1}_F) \, d\mu, \tag{6.2.11}$$

όπου η συνέλιξη $\widehat{Q_\varepsilon}$ ορίζεται ως εξής:

$$\widehat{Q_\varepsilon}P_t(\mathbf{1}_F)(x) = \sup_{y\in M}\Big[P_t(\mathbf{1}_F)(y) - \frac{1}{\varepsilon}d(x,y)^p\Big],$$

και σαν συνάρτηση κόστους $c(x,y)$ θεωρήσαμε τη γεωδαισιακή απόσταση $d(x,y)^p$. Για κάθε $x \in M$, το supremum μπορεί να περιοριστεί στα y για τα οποία $d(x,y)^p \leqslant \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Harnack με ts στη θέση του s, παίρνουμε

$$P_t(\mathbf{1}_F)(y) \leqslant P_{t(s+1)}(\mathbf{1}_F)(x)(1+s)^{N/2}e^{\frac{d(x,y)^2}{4ts}}$$

για κάθε $s>0$ και κάθε $x,y\in M$. Ειδικότερα, για κάθε y τέτοιο ώστε $d(x,y)^p \leqslant \varepsilon$, θέτοντας $\varepsilon = (ts)^{p/2}$ βλέπουμε ότι

$$P_t(\mathbf{1}_F)(y) \leqslant 2(1+s)^{N/2}P_{t(s+1)}(\mathbf{1}_F)(x).$$

Άρα, γι' αυτή την επιλογή του ε, από τον ορισμό της συνέλιξης $\widehat{Q_\varepsilon}$ προκύπτει ότι

$$\widehat{Q_\varepsilon}P_t(\mathbf{1}_F)(x) \leqslant 2(1+s)^{N/2}P_{t(s+1)}(\mathbf{1}_F)(x),$$

οπότε

$$\int_M \widehat{Q_\varepsilon}P_t(\mathbf{1}_F)(x)\,d\mu \leqslant 2(1+s)^{N/2}\int_M P_{t(s+1)}(\mathbf{1}_F)\,d\mu = 2(1+s)^{N/2}\mu(F)$$

λόγω του αναλλοίωτου του μέτρου. Τότε, από την ανισότητα Markov και την (6.2.11), για $\varepsilon = (ts)^{p/2}$ έχουμε

$$\mu(F) = \mu(P_tf \geq u) \leqslant \frac{1}{u}\int_M P_t(\mathbf{1}_F)\,d\nu \leqslant \frac{1}{u(ts)^{p/2}}W_p(\mu,\nu)^p + \frac{2}{u}(1+s)^{N/2}\mu(F).$$

Αυτό ισχύει για κάθε $s>0$, άρα επιλέγοντας $s = 2^{-5}u^{2/N}$ έχουμε $\frac{2}{u}(1+s)^{N/2} \leqslant \frac{1}{2}$ αν υποθέσουμε ότι το $u \geq C = C_N$ είναι αρκετά μεγάλο. Συνδυάζοτας τα παραπάνω με την ανισότητα (6.2.10) παίρνουμε

$$\mu(f\geq 2u) \leqslant \frac{B^q t^{q/2}}{u^q}\|\nabla f\|_q^q + \frac{2^{5p/2+1}}{t^{p/2}u^{1+p/N}}W_p(\nu,\mu)^p.$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς t βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $t_0 = \frac{p}{q}\frac{2^{5p/2+1}}{u^{1+p/N}}\frac{u^q}{B^q}\frac{W_p(\nu,\mu)^p}{\|\nabla f\|_q^q}$. Αντικαθιστώντας το t_0, μετά από πράξεις βλέπουμε ότι

$$\mu(f\geq 2u) \leqslant \frac{1}{u^r}C_1\|\nabla f\|_q^{\frac{r}{\vartheta}}W_p(\nu,\mu)^{\frac{r}{\vartheta}},$$

οπότε

$$\sup_{u\geq C} u^{\vartheta}\mu(f\geq u)^{\frac{\vartheta}{r}} \leqslant C\|\nabla f\|_q W_p(\nu,\mu),$$

δηλαδή το ζητούμενο με $C = B^{\frac{pq}{p+q}}(2^{5p/2+1})^{\frac{q}{p+q}}\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p+q}} + \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p+q}}\right)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1. Θεωρούμε το μετρήσιμο σύνολο $F = \{P_t f \geq u\}$ μετρήσιμο. Για κάθε $n > 0$ και $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(f \geq 2u) &= \mu\left(\{f \geq 2u\} \cap F\right) \cup \left(\{f \geq 2u\} \cap F^c\right) \\
&\leqslant \mu\left(\{f \geq 2u, P_t f \leqslant u\}\right) + \mu\left(\{f \geq 2u, P_t f \geq u\}\right) \\
&= \mu(f - P_t f \geq u) + \mu(f \geq 2u) \\
&\leqslant \mu(|f - P_t f| \geq u) + \frac{1}{2u}\int_M \mathbf{1}_F f\, d\mu \\
&\leqslant \frac{B^q t^{q/2}}{u^q}\|\nabla f\|_q^q + \frac{1}{2u}\int_M \mathbf{1}_F f\, d\mu,
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Markov και στην τελευταία η Πρόταση 6.2.4. Θα εφαρμόσουμε την τεχνική του τεμαχισμού. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k := \min\{(f - 2^k)_+, 2^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$2^k \mathbf{1}_{\{f > 2^{k+1}\}} \leqslant f_k \leqslant 2^k \mathbf{1}_{\{f \geq 2^k\}}.$$

Θέτουμε επίσης $u = 2^{k-1}, t = t_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, και θεωρούμε τα μετρήσιμα σύνολα $A_k = \{2^k \leqslant f \leqslant 2^{k+1}\}, F_k = \{P_{t_k} f_k \geq 2^{k-1}\}$. Τότε, αφού $f_k \leqslant f$ και $f d\mu = d\nu$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(f_k \geq 2^k) &\leqslant \frac{(2B)^q}{2^{qk}} t_k^{q/2} \int_{A_k} |\nabla f_k|^q\, d\mu + \frac{1}{2^k}\int_M \mathbf{1}_{F_k} f_k\, d\mu \\
&\leqslant \frac{(2B)^q}{2^{qk}} t_k^{q/2} \int_{A_k} |\nabla f|^q\, d\mu + \frac{1}{2^k}\int_M \mathbf{1}_{F_k}\, d\nu.
\end{aligned}$$

Έστω $k_0 \geq 0$, το οποίο θα καθοριστεί στη συνέχεια, και k_1 το οποίο μπορούμε να υποθέσουμε οσοδήποτε μεγάλο καθώς στο τέλος θα το στείλουμε στο άπειρο. Πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη ανισότητα με 2^{rk} και αθροίζοντας πάνω από τα $k \in I = \{k_0, k_0 + 1, \ldots, k_1\}$, έχουμε

$$\sum_{k \in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) \leqslant (2B)^q \sum_{k \in I} 2^{(r-q)k} t_k^{q/2} \int_{A_k} |\nabla f|^q\, d\mu + \int_M \varphi\, d\nu, \tag{6.2.12}$$

όπου $\varphi = \sum\limits_{k \in I} 2^{(r-1)k} \mathbf{1}_{F_k}$ και χρησιμοποιήσαμε την $\mu(f \geq 2^{k+1}) = \mu(f_k \geq 2^k)$. Θεωρούμε τη συνέλιξη

$$\widehat{Q_\varepsilon}\varphi(x) = \sup_{y \in M}\left[\varphi(y) - \frac{1}{\varepsilon} d(x,y)^p\right] = \sup_{y \in M}\left[\sum_{k \in I} 2^{(r-1)k} \mathbf{1}_{F_k}(y) - \frac{1}{\varepsilon} d(x,y)^p\right]_+ .$$

Τότε, από το θεώρημα δυϊσμού του Kantorovich, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\int_M \varphi\, d\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} W_p(\nu, \mu)^p + \int_M \widehat{Q_\varepsilon}\varphi\, d\mu. \tag{6.2.13}$$

Ισχυρισμός 6.2.8. *Ισχύει*

$$\sum_{k \in I} 2^{(r-1)k} \mathbf{1}_{F_k}(y) \leqslant c \cdot \sum_{k \in I} 2^{(r-1)k} \mathbf{1}_{F_k}(y), \tag{6.2.14}$$

όπου η σταθερά $c = c_r > 0$ εξαρτάται μόνο από το $r > 1$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ορίζουμε

$$K(y)=\sup\{k:\mathbf{1}_{F_k}(y)\neq 0\}.$$

Αν $K(y)=\infty$ τότε η ανισότητα του ισχυρισμού ισχύει αφού το δεξιό μέλος της (6.2.14) ισούται με άπειρο. Αν $K(y)<\infty$, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}2^{(r-1)k}\mathbf{1}_{F_k}(y)&\leqslant\sum_{k=0}^{K(y)}2^{(r-1)k}=\frac{2^{(r-1)(K(y)+1)}-1}{2^{r-1}-1}\\&=\frac{(2^{K(y)})^{r-1}2^{r-1}-1}{2^{r-1}-1}\leqslant(2^{K(y)})^{r-1}\frac{2^{r-1}}{2^{r-1}-1}\\&=\frac{2^{r-1}}{2^{r-1}-1}\sup_{0\leqslant k\leqslant\infty}\{(2^k)^{r-1}\mathbf{1}_{F_k}(y)\}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, η (6.2.14) ισχύει. □

Έχοντας αποδείξει τον ισχυρισμό, συνεχίζουμε την απόδειξη του θεωρήματος. Σταθεροποιώντας κάποιο $x\in M$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{Q_\varepsilon}\varphi(x)&\leqslant c\cdot\sup_{y\in M}\sup_{k\in I}\Big[2^{(r-1)k}\mathbf{1}_{F_k}(y)-\frac{1}{c\varepsilon}d(x,y)^p\Big]_+\\&\leqslant c\cdot\sup_{k\in I}\sup_{y\in M}\Big[2^{(r-1)k}\mathbf{1}_{F_k}(y)-\frac{1}{c\varepsilon}d(x,y)^p\Big]_+.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\widehat{Q_\varepsilon}\varphi(x)\leqslant c\sum_{k\in I}\sup_{y\in M_k(x)}2^{(r-1)k}\mathbf{1}_{F_k}(y),\tag{6.2.15}$$

όπου $M_k(x):=\{y\in F_k:d(x,y)^p\leqslant c\varepsilon r^{(r-1)k}\},k\in I$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Harnack με $t=t_k$ και $s=t_ks_k=(c\varepsilon)^{2/p}2^{2(r-1)k/p}$ και αφού $F_k=\{P_{t_k}f_k\geq 2^{k-1}\}$, για κάθε $y\in M_k(x)$ έχουμε

$$\mathbf{1}_{F_k}(y)\leqslant 2^{-k+1}P_{t_k}f_k(y)\leqslant 2^{-k+2}(1+s_k)^{N/2}P_{t_k(s_k+1)}f_k(x).$$

Συνεπώς, από την (6.2.15) προκύπτει ότι

$$\widehat{Q_\varepsilon}\varphi(x)\leqslant 4c\sum_{k\in I}2^{(r-2)k}(1+s_k)^{N/2}P_{t_k(s_k+1)}f_k(x).$$

Άρα,

$$\int_M\widehat{Q_\varepsilon}\varphi\,d\mu\leqslant 4c\sum_{k\in I}2^{(r-1)k}(1+s_k)^{N/2}\mu(f\geq 2^k)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\int_M P_{t_k(s_k+1)}f_k\,d\mu=\int_M f_k\,d\mu\leqslant 2^k\mu(f\geq 2^k)$, που ισχύει γιατί το μ είναι αναλλοίωτο και $f_k\leqslant 2^k\mathbf{1}_{\{f\geq 2^k\}}$.

Επιλέγουμε $t_k=\lambda 2^{-2(r-q)k/q}$ και αντικαθιστούμε το ε με $\lambda^{p/2}\varepsilon$, όπου $\lambda>0$. Τότε,

$$\int_M\widehat{Q}_{\lambda^{p/2}\varepsilon}\varphi\,d\mu\leqslant 4c\sum_{k\in I}2^{(r-1)k}[1+(c\varepsilon)^{2/p}2^{r'k}]^{N/2}\mu(f\geq 2^k),$$

όπου $r' = \frac{2}{p}(r-1) + \frac{2}{q}(r-q)$. Άρα, έχουμε φράξει το $\int_M \varphi\, d\nu$.

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k\in I} 2^{(r-q)k} t_k^{q/2} \int_{A_k} |\nabla f|^2\, d\mu \leqslant \lambda^{q/2} \sum_{k\in I} \int_{A_k} |\nabla f|^q\, d\mu \leqslant \lambda^{q/2} \int_M |\nabla f|^q\, d\mu.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τις (6.2.12) και (6.2.13) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) &\leqslant (2B)^q \lambda^{q/2} \|\nabla f\|_q^q + \frac{1}{\lambda^{p/2}\varepsilon} W_p(\nu,\mu)^p \\ &\quad + 4c \sum_{k\in I} 2^{(r-1)k} [1 + (c\varepsilon)^{2/p} 2^{r'k}]^{N/2} \mu(f \geq 2^k).\end{aligned}$$

Θα θέλαμε τώρα να απορροφήσουμε το άθροισμα των $k \in I$ του δεξιού μέλους στο άθροισμα στο αριστερό μέλος. Παρατηρούμε ότι $r = (r-1) + \frac{N}{2} r'$ εξ ορισμού του r. Για κάθε $\eta > 0$ υπάρχουν $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ και $k_0 = k_0(\eta) \geq 0$ αρκετά μεγάλο (που εξαρτάται από τα p, r, N) τέτοια ώστε

$$2^{(r-1)k} [1 + (c\varepsilon)^{2/p} 2^{r'k}]^{N/2} \leqslant \eta 2^{rk}$$

για κάθε $k \geq k_0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) &\leqslant (2B)^q \lambda^{q/2} \|\nabla f\|_q^q + \frac{1}{\lambda^{p/2}\varepsilon} W_p(\nu,\mu)^p \\ &\quad + 4c\eta \sum_{k\in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^k).\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $2^{r+3}\eta c \leqslant 1$, τότε

$$\sum_{k\in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) \leqslant 2(2B)^q \lambda^{q/2} \|\nabla f\|_q^q + \frac{2}{\lambda^{p/2}\varepsilon} W_p(\nu,\mu)^p + c\eta 2^{rk_0+3} \mu(f \geq 2^{k_0}). \tag{6.2.16}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(2^{k_0})^r \mu(f \geq 2^{k_0}) \leqslant C^{r/\vartheta} \|\nabla f\|_q^{r/\vartheta} W_p(\nu,\mu)^{r/\vartheta}$$

από την Πρόταση 6.2.7. Ελαχιστοποιώντας την (6.2.16) ως προς λ και κάνοντας χρήση του παραπάνω φράγματος, βλέπουμε ότι για k_0 αρκετά μεγάλο υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$, με $C_1 = C_1(p,q,N)$, τέτοια ώστε

$$\sum_{k\in I} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) \leqslant C_1 \|\nabla f\|_q^{r/\vartheta} W_p(\nu,\mu)^{r/\vartheta}. \tag{6.2.17}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\|(f-C)_+\|_r^r &= \int_0^\infty \mu(f \geq C + t)\, d(t^r) \\ &\leqslant 2^{(k_0+1)r} \mu(f \geq C) + (2^{2r} - 2^r) \sum_{k\geq k_0} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1}) \\ &\leqslant 2^{2r} \sum_{k\geq k_0} 2^{rk} \mu(f \geq 2^{k+1})\end{aligned}$$

αν, για παράδειγμα, $C = 2^{k_0+1}$. Στέλνουμε το $k_1 \to \infty$. Τότε, από την (6.2.17) έχουμε

$$\|(f-C)_+\|_r^{\vartheta} \leqslant C_2 \|\nabla f\|_q W_p(\nu,\mu),$$

δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Παράρτημα

7.1 Το θεώρημα παρεμβολής του Riesz

Έστω (p_0, q_0) και (p_1, q_1) δύο ζεύγη δεικτών με $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$. Υποθέτουμε ότι

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0} \quad \text{και} \quad \|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1},$$

όπου T είναι ένας γραμμικός τελεστής. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να πούμε ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p$$

για άλλα ζεύγη (p, q). Όπως θα δούμε, αυτή η ανισότητα ισχύει αν οι τιμές των p και q ικανοποιούν κατάλληλη γραμμική σχέση στην οποία εμφανίζονται οι αντίστροφοι των δεικτών p_0, p_1, q_0 και q_1.

Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματος εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Έστω (X, μ) και (Y, ν) δύο χώροι μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^{p_0} + L^{p_1}$ όλων των συναρτήσεων f στον (X, μ) που γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(X, \mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(X, \mu)$. Ομοίως ορίζουμε τον χώρο $L^{q_0} + L^{q_1}$ (που αποτελείται από συναρτήσεις στον (Y, ν)).

Θεώρημα 7.1.1 (Riesz). *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής από τον $L^{p_0} + L^{p_1}$ στον $L^{q_0} + L^{q_1}$. Υποθέτουμε ότι ο T είναι φραγμένος από τον L^{p_0} στον L^{q_0} και από τον L^{p_1} στον L^{q_1}. Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $M_0, M_1 > 0$ ώστε*

$$\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0} \ \text{ για κάθε } f \in L^{p_0}$$

και

$$\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1} \ \text{ για κάθε } f \in L^{p_1}.$$

Αν το ζεύγος (p, q) ικανοποιεί τις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

για κάποιον $0 \leqslant t \leqslant 1$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q, και

$$\|T(f)\|_q \leqslant M \|f\|_p$$

για κάθε $f \in L^p$. *Επιπλέον,* $M \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$.

Πρέπει να τονίσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για L^p-χώρους συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές, διότι η απόδειξή του χρησιμοποιεί τεχνικές μιγαδικής ανάλυσης. Ξεκινώντας από τη λωρίδα $0 \leqslant \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 1$ στο μιγαδικό επίπεδο, θα ορίσουμε μια αναλυτική συνάρτηση Φ που σχετίζεται με τον T, τέτοια ώστε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1}$ να μεταφράζονται σε κάποια φράγματα για την Φ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$ αντίστοιχα. Κατόπιν, το συμπέρασμα θα προκύψει από το γεγονός ότι η Φ θα είναι φραγμένη στο σημείο t του πραγματικού άξονα.

Η ανάλυσή μας για την Φ θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 7.1.2 (το λήμμα των τριών ευθειών)**.** *Έστω* $\Phi(z)$ *μια ολόμορφη συνάρτηση στη λωρίδα* $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\,(z) < 1\}$, *η οποία είναι επίσης συνεχής και φραγμένη στην κλειστή θήκη της* S. *Αν*

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(iy)| \quad \textit{και} \quad M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(1+iy)|,$$

τότε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\Phi(t+iy)| \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Απόδειξη. Κάνουμε αρχικά την επιπλέον υπόθεση ότι $M_0 = M_1 = 1$ και $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi(x+iy)| \to 0$ καθώς το $|y| \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε $M = \sup|\Phi(z)|$ όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα z στην κλειστή θήκη της S. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M > 0$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{z_n\}$ σημείων της S με $|\Phi(z_n)| \to M$ καθώς το $n \to \infty$. Λόγω της υπόθεσής μας για την Φ, η ακολουθία $\{z_n\}$ δεν μπορεί να τείνει στο απειρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{z_{k_n}\}$ της $\{z_n\}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο z_0 στην κλειστή θήκη της S. Από την αρχή του μεγίστου, το z_0 δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο της λωρίδας (αλλιώς, η Φ είναι σταθερή και το συμπέρασμα έπεται κατά προφανή τρόπο). Άρα, το z_0 ανήκει στο σύνορο της S, όπου έχουμε $|\Phi| \leqslant 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $M \leqslant 1$ και έχουμε το ζητούμενο γι' αυτήν την ειδική περίπτωση.

Αν απλώς υποθέσουμε ότι $M_0 = M_1 = 1$, ορίζουμε

$$\Phi_\epsilon(z) = \Phi(z) e^{\epsilon(z^2-1)}, \qquad \epsilon > 0.$$

Χρησιμοποιώντας την $e^{\epsilon[(x+iy)^2-1]} = e^{\epsilon(x^2-1-y^2+2ixy)}$, βλέπουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)| \leqslant 1$ στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Επιπλέον,

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |\Phi_\epsilon(x+iy)| \to 0 \ \text{ καθώς το } \ |y| \to \infty,$$

αφού η Φ είναι φραγμένη. Συνεπώς, από την πρώτη περίπτωση, γνωρίζουμε ότι $|\Phi_\epsilon(z)| \leqslant 1$ για κάθε z στην κλειστή θήκη της S. Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$, βλέπουμε ότι $|\Phi| \leqslant 1$ όπως θέλαμε.

Τέλος, αν δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία για τις τιμές των M_0 και M_1, ορίζουμε $\tilde{\Phi}(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} \Phi(z)$, και παρατηρούμε ότι η $\tilde{\Phi}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της προηγούμενης περίπτωσης: η $|\tilde{\Phi}|$ είναι φραγμένη από 1 στις ευθείες $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ και $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Άρα, $|\tilde{\Phi}(z)| \leqslant 1$ για κάθε $z \in S$, και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι απλή συνάρτηση. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p = 1$.

Θεωρούμε τον συζυγή εκθέτη q^* του q και θα δείξουμε ότι

$$\left|\int (Tf)\cdot g\,d\nu\right| \leqslant M\|f\|_p\|g\|_{q^*} \tag{7.1.1}$$

για κάθε $g \in L^{q^*}(Y,\nu)$. Αν αποδείξουμε την (7.1.1), από δυϊσμό έπεται ότι

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p.$$

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $p<\infty$ και $q>1$. Θεωρούμε απλή συνάρτηση $f\in L^p$, και ορίζουμε

$$f_z = |f|^{\gamma(z)}\frac{f}{|f|} \ \text{ όπου } \ \gamma(z) = p\left(\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1}\right)$$

και

$$g_z = |g|^{\delta(z)}\frac{g}{|g|} \ \text{ όπου } \ \delta(z) = q^*\left(\frac{1-z}{q_0^*}+\frac{z}{q_1^*}\right),$$

με τους q^*, q_0^* και q_1^* να συμβολίζουν τους συζυγείς εκθέτες των q, q_0 και q_1 αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι $f_t = f$ και

$$\|f_z\|_{p_0} = 1 \ \text{ αν } \ \mathrm{Re}\,(z) = 0$$

ενώ

$$\|f_z\|_{p_1} = 1 \ \text{ αν } \ \mathrm{Re}\,(z) = 1.$$

Όμοια, $\|g_z\|_{q_0^*} = 1$ αν $\mathrm{Re}\,(z)=0$ και $\|g_z\|_{q_1^*}=1$ αν $\mathrm{Re}\,(z)=1$. Επίσης, $g_t = g$. Το τέχνασμα είναι να θεωρήσουμε την

$$\Phi(z) = \int (Tf_z)\cdot g_z\,d\nu.$$

Αφού η f είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής $f=\sum_k a_k\chi_{E_k}$ με τα σύνολα E_k να είναι ξένα και να έχουν πεπερασμένο μέτρο, βλέπουμε ότι η f_z είναι επίσης απλή, και

$$f_z = \sum_k |a_k|^{\gamma(z)}\frac{a_k}{|a_k|}\,\chi_{E_k}.$$

Αφού η $g=\sum_j b_j\chi_{F_j}$ είναι επίσης απλή, έχουμε

$$g_z = \sum_j |b_j|^{\delta(z)}\frac{b_j}{|b_j|}\chi_{F_j}.$$

Συνεπώς,

$$\Phi(z) = \sum_{j,k} |a_k|^{\gamma(z)}|b_j|^{\delta(z)}\frac{a_k}{|a_k|}\,\frac{b_j}{|b_j|}\left(\int T(\chi_{E_k})\chi_{F_j}\,d\nu\right),$$

άρα η συνάρτηση Φ είναι ολόμορφη στη λωρίδα $0<\mathrm{Re}\,(z)<1$, και είναι φραγμένη και συνεχής στην κλειστή της θήκη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος στον L^{p_0} με νόρμα M_0, βλέπουμε ότι αν $\mathrm{Re}\,(z)=0$ τότε

$$|\Phi(z)| \leqslant \|T(f_z)\|_{q_0}\|g_z\|_{q_0^*} \leqslant M_0\|f_z\|_{p_0} = M_0.$$

Όμοια βλέπουμε ότι $|\Phi(z)| \leqslant M_1$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = 1$. Από το λήμμα των τριών ευθειών συμπεραίνουμε ότι η $|\Phi|$ φράσσεται από $M_0^{1-t}M_1^t$ στην ευθεία $\mathrm{Re}\,(z) = t$. Αφού $\Phi(t) = \int (Tf)g\,d\nu$, έχουμε το ζητούμενο, τουλάχιστον στην περίπτωση που η f είναι απλή.

Γενικά, αν $f \in L^p$ και $1 \leqslant p < \infty$, επιλέγουμε μια ακολουθία $\{f_m\}$ απλών συναρτήσεων στον L^p έτσι ώστε $\|f_n - f\|_p \to 0$. Αφού $\|T(f_n)\|_q \leqslant M\|f_n\|_p$, βλέπουμε ότι η $\{T(f_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον L^q. Αν δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} T(f_n) = T(f)$ σχεδόν παντού, τότε θα έχουμε και $\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p$.

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε $f = f^U + f^L$, όπου $f^U(x) = f(x)$ αν $|f(x)| \geqslant 1$ και $f^U(x) = 0$ αλλιώς, ενώ $f^L(x) = f(x)$ αν $|f(x)| < 1$ και $f^L(x) = 0$ αλλιώς. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε κάθε f_n σαν άθροισμα $f_n = f_n^U + f_n^L$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p_0 \leqslant p_1$ (η περίπτωση $p_0 \geqslant p_1$ εξετάζεται με ανάλογο τρόπο). Τότε, $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$, και αφού $f \in L^p$ έχουμε $f^U \in L^{p_0}$ και $f^L \in L^{p_1}$. Επιπλέον, αφού $\|f_n - f\|_p \to 0$, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $\|f_n^U - f^U\|_{p_0} \to 0$ και $\|f_n^L - f^L\|_{p_1} \to 0$. Από την υπόθεση, $T(f_n^U) \to T(f^U)$ στον L^{q_0} και $T(f_n^L) \to T(f^L)$ στον L^{q_1}. Περνώντας σε κατάλληλες υπακολουθίες βλέπουμε ότι η $T(f_n) = T(f_n^U) + T(f_n^L)$ συγκλίνει στην $T(f)$ σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(β) Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις $q = 1$ και $p = \infty$. Στην περίπτωση $p = \infty$ έχουμε αναγκαστικά $p_0 = p_1 = \infty$, οπότε οι υποθέσεις $\|T(f)\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_\infty$ και $\|T(f)\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_\infty$ σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder μας δίνουν

$$\|T(f)\|_q \leqslant (\|T(f)\|_{q_0})^{1-t}(\|T(f)\|_{q_1})^t \leqslant M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_\infty.$$

Τέλος, αν $p < \infty$ και $q = 1$, τότε $q_0 = q_1 = 1$ και μπορούμε επιλέγοντας $g_z = g$ για κάθε z να ακολουθήσουμε την ίδια πορεία με αυτήν της απόδειξης για την περίπτωση $q > 1$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 7.1.3. Ένας λίγο διαφορετικός, αλλά χρήσιμος, τρόπος να δούμε το Θεώρημα 7.1.1 είναι ο εξής: υποθέτουμε ότι ο γραμμικός τελεστής T είναι αρχικά ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου. Ρωτάμε για ποιά ζεύγη (p,q) ο T είναι ισχυρού τύπου (p,q), δηλαδή υπάρχει $M = M_{p,q} > 0$ ώστε

$$\|T(f)\|_q \leqslant M\|f\|_p \tag{7.1.2}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Η χρήσιμη ιδιότητα της κλάσης των απλών συναρτήσεων είναι ότι είναι η ίδια για όλους τους χώρους L^p. Επιπλέον, αν η (7.1.2) ισχύει, τότε ο T επεκτείνεται μονοσήμαντα στον L^p και αν $p < \infty$ τότε η (7.1.2) εξακολουθεί να ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mu)$, με την ίδια σταθερά $M_{p,q}$ (το ίδιο ισχύει και για $p = \infty$ αν $\mu(X) < \infty$).

Ξεκινώντας από αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε το *διάγραμμα Riesz* του T να αποτελείται από όλα τα σημεία $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ για τα οποία ο T είναι ισχυρού τύπου $(1/x, 1/y)$ και θέτουμε $M_{x,y}$ την μικρότερη θετική σταθερά για την οποία ισχύει

$$\|T(f)\|_{1/y} \leqslant M_{x,y}\|f\|_{1/x} \tag{7.1.3}$$

για κάθε απλή συνάρτηση f. Με αυτήν την ορολογία έχουμε το εξής:

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω T ένας γραμμικός τελεστής ορισμένος στις απλές συναρτήσεις του X, τις οποίες απεικονίζει σε συναρτήσεις του Y οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε σύνολο πεπερασμένου μέτρου.*

(α) *Το διάγραμμα Riesz του T είναι κυρτό υποσύνολο του $[0,1] \times [0,1]$.*

(β) *Η $(x,y) \mapsto \log M_{x,y}$ είναι κυρτή συνάρτηση σε αυτό το σύνολο.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός του Θεωρήματος 7.1.4 μας λέει ότι αν $(x_0,y_0) = (1/p_0, 1/q_0)$ και $(x_1,y_1) = (1/p_1, 1/q_1)$ είναι δύο σημεία στο διάγραμμα Riesz του T, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T. Αυτό προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 7.1.1. Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι αρκεί να ελέγξουμε την κυρτότητα της $\log M_{x,y}$ σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που περιέχεται στο διάγραμμα Riesz του T, κάτι που προκύπτει από την ανισότητα $M \leqslant M_0^{1-t} M_1^t$ του Θεωρήματος 7.1.1. □

Λόγω της διατυπωσης του Θεωρήματος 7.1.4, το Θεώρημα 7.1.1 συχνά αποκαλείται «θεώρημα κυρτότητας του Riesz».

7.2 Θεωρία Hille-Yosida

Η θεωρία Hille-Yosida μελετά ημιομάδες φραγμένων τελεστών σε χώρους Banach. Παρουσιάζουμε εδώ τα βασικά αποτελέσματα στο γενικότερο πλαίσιο για ημιομάδες τελεστών $P_t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ όπου $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ είναι πραγματικός διαχωρίσιμος χώρος Banach, ωστόσο θα μας απασχολήσουν μόνο οι εφαρμογές τους για ημιομάδες Markov σε χώρους L^p. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι υπάρχει πυκνός γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{D}$ του $\mathcal{B}$ στον οποίο η συνάρτηση $t \mapsto P_t x$ έχει φραγμένη παράγωγο στο σημείο $t = 0$, δηλαδή ότι ο γεννήτορας $\mathcal{L}$ της ημιομάδας είναι φραγμένος και το πεδίο ορισμού του είναι πυκνό σε κάθε L^p.

Ορισμός 7.2.1 (ημιομάδα)**.** Μια οικογένεια $\{P_t\}_{t \geqslant 0}$ γραμμικών τελεστών $P_t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $t \geqslant 0$ λέγεται ημιομάδα συστολών αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $t \geqslant 0$ και $x \in \mathcal{B}$ ισχύει $\|P_t x\| \leqslant \|x\|$.

(ii) Για κάθε $t, s \geqslant 0$ ισχύει $P_{t+s} = P_t \circ P_s$.

(iii) Για κάθε $x \in \mathcal{B}$ ισχύει $\lim_{t \to 0} P_t x = x =: P_0 x$.

Από τη γραμμικότητα των P_t και το γεγονός ότι είναι συστολές προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathcal{B}$ η συνάρτηση $t \mapsto P_t x$ είναι συνεχής: πράγματι, αν $s \geqslant 0$ έχουμε

$$\|P_{t+s}x - P_t x\| = \|P_t(P_s x - x)\| \leqslant \|P_s x - x\|,$$

και όμοια, αν $0 \leqslant s \leqslant t$ έχουμε

$$\|P_{t-s}x - P_t x\| \leqslant \|x - P_t x\|,$$

οπότε η συνέχεια έπεται από την ιδιότητα (iii).

Έστω ν φραγμένο μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^+$. Ορίζουμε τον τελεστή $P_\nu : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με

$$P_\nu := \int_0^\infty P_t \, d\nu(t).$$

Δηλαδή, $P_\nu(x) = \int_0^\infty P_t x \, d\nu(x)$, όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα έχει την έννοια του ορίου αθροισμάτων Riemann της μορφής

$$\sum_i P_{t_i}(x) \cdot \nu([a_i, a_{i+1}))$$

πάνω από μια ακολουθία διαμερίσεων του $\mathbb{R}^+$ μέσω της οποίας προσεγγίζεται το μέτρο ν. Όταν το ν είναι πεπερασμένο μέτρο, αυτός ο τελεστής είναι φραγμένος στον $\mathcal{B}$ και η νόρμα του φράσσεται από $|\nu|([0,\infty))$. Σε αυτό το πλαίσιο, η ιδιότητα (ii) μεταφράζεται ως εξής: αν ν, ν' είναι φραγμένα μέτρα στο $\mathbb{R}^+$ τότε

$$P_\nu P_{\nu'} = P_{\nu'} P_\nu = \int_0^\infty \int_0^\infty P_{t+s} d\nu(t) d\nu'(s). \tag{7.2.1}$$

Μας ενδιαφέρει η ειδική περίπτωση του επιλύοντος τελεστή, ο οποίος ορίζεται για κάθε $\lambda > 0$ από την

$$R_\lambda := \int_0^\infty P_t \cdot e^{-\lambda t} dt, \tag{7.2.2}$$

δηλαδή αντιστοιχεί στο μέτρο $d\nu(t) = e^{-\lambda t} dt$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $t \geqslant 0$ και $x \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$R_\lambda P_t x = e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} ds.$$

Άρα,

$$\mathcal{L}(R_\lambda P_t x) = \left(\lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} dx - e^{\lambda t} e^{-\lambda t} P_t x \right) \Big|_{t=0} = \lambda R_\lambda x - x. \tag{7.2.3}$$

Από τις (7.2.1) και (7.2.2) βλέπουμε επίσης ότι για κάθε $\lambda, \lambda' > 0$ ισχύει

$$R_\lambda - R_{\lambda'} = (\lambda' - \lambda) R_\lambda R_{\lambda'} = (\lambda' - \lambda) R_{\lambda'} R_\lambda, \tag{7.2.4}$$

δηλαδή

$$R_\lambda = R_{\lambda'}(\mathrm{Id} + (\lambda' - \lambda) R_\lambda).$$

Από αυτήν την ταυτότητα βλέπουμε ότι η εικόνα του R_λ στον $\mathcal{B}$ περιέχεται στην εικόνα του $R_{\lambda'}$, και εναλλάσσοντας τους ρόλους των λ και λ' συμπεραίνουμε ότι αυτή η εικόνα του R_λ είναι τελικά ανεξάρτητη από το λ. Ορίζουμε $D = \mathrm{Im}(R_\lambda)$, όπου λ οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός.

Από την ιδιότητα (i) έχουμε $\lim\limits_{t \to 0} P_t x = x$ και $\lambda R_\lambda x = \int_0^\infty P_{s/\lambda} x \cdot e^{-s} ds$, άρα για κάθε $x \in \mathcal{B}$ παίρνουμε

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda x = x \int_0^\infty e^{-s} ds = x.$$

Άρα ο D είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{B}$. Σταθεροποιούμε $\lambda > 0$ και ορίζουμε έναν τελεστή $\mathcal{L}$ στον D θέτοντας

$$\mathcal{L}x = \lambda x - y,$$

όπου $x = R_\lambda y$. Έτσι, μπορούμε να δούμε τον $\mathcal{L}$ ως την παράγωγο της $P_t x$ στο σημείο $t = 0$:

$$\mathcal{L}x = \lim_{t\to 0} \frac{P_t x - x}{t}.$$

Πράγματι,

$$R_\lambda P_t x = e^{\lambda t} \int_t^\infty P_t x \cdot e^{-\lambda s} ds,$$

άρα

$$d_t R_\lambda P_t x\Big|_{t=0} = \left(\lambda e^{\lambda t} \int_t^\infty P_s x \cdot e^{-\lambda s} dx - e^{-\lambda t} e^{\lambda t} P_t x\right)\Big|_{t=0} = \lambda R_\lambda x - x.$$

Συνεπώς, γενικότερα, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$d_t P_t x = \mathcal{L} P_t x = P_t \mathcal{L} x.$$

Στην περίπτωση των ημιομάδων Markov, ο D είναι το γνωστό πεδίο ορισμού $D(\mathcal{L})$ του γεννήτορα $\mathcal{L}$ της ημιομάδας και έχουμε $\overline{D(\mathcal{L})} = L^p$ για κάθε $p \geqslant 1$.

7.3 Η απεικόνιση του Brenier

Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «*μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο*» εννοούμε μια απεικόνιση $\varphi : K \to T$ που είναι 1-1, επί και έχει Ιακωβιανή με σταθερή ορίζουσα ίση με $\mathrm{vol}_n(T)/\mathrm{vol}_n(K)$. Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $\psi : K \to T$ που έχει αυτή την ιδιότητα: η Ιακωβιανή της ψ θα είναι θετικά ορισμένη, κάτι που θα εξασφαλίσουμε ορίζοντας $\psi = \nabla f$ για μια, κατάλληλη, δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση f. Χρησιμοποιώντας αυτή την απεικόνιση, η οποία ονομάζεται «απεικόνιση Brenier» μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη της ανισότητας Brunn-Minkowski ως εξής: αφού $(I_n + \psi)(K) \subseteq K + T$, έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K+T) \geqslant \int_K |\det J(I_n+\psi)(x)| dx = \int_K |\det(I_n + \mathrm{Hess} f)(x)| dx = \int_K \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i(x)) dx,$$

όπου $\lambda_i(x)$ είναι οι μη αρνητικές ιδιοτιμές της $\mathrm{Hess} f$. Επιπλέον, αφού η ψ διατηρεί τον όγκο, έχουμε $\prod_{i=1}^n \lambda_i(x) = \mathrm{vol}_n(T)/\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $x \in K$. Συνεπώς, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K+T) \geqslant \int_K \Big(1 + \Big[\prod_{i=1}^n \lambda_i(x)\Big]^{1/n}\Big)^n dx = \big(\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}\big)^n.$$

Θέλουμε λοιπόν να ορίσουμε μια απεικόνιση της μορφής $\psi = \nabla f$ για κάποια κυρτή συνάρτηση f ορισμένη στο K, έτσι ώστε $\psi(K) = T$. Αρχικά, θα γενικεύσουμε την έννοια της «διατήρησης του όγκου» για απεικονίσεις που μεταφέρουν ένα μέτρο σε κάποιο άλλο. Φυσικά, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την περίπτωση που τα δύο μέτρα είναι τα ομοιόμορφα μέτρα κάποιων κυρτών σωμάτων.

Ορισμός 7.3.1. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ως υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $C_\infty(\mathbb{R}^n)^*$, του δυϊκού χώρου των άπειρες φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο. Έστω $\mu,\ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ έχει *περιθώρια* τα μ και ν αν για οποιεσδήποτε φραγμένες Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχυουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)d\gamma(x,y)$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g(y)d\gamma(x,y).$$

Ορισμός 7.3.2 (Rockafellar)**.** Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η G είναι *κυκλικά μονότονη* αν για κάθε $m \geqslant 2$ και $(x_i, y_i) \in G$, $i \leqslant m$, έχουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle + \langle y_2, x_3 - x_2\rangle + \cdots + \langle y_m, x_1 - x_m\rangle \leqslant 0.$$

Πρόταση 7.3.3. *Έστω μ και ν δύο Borel μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ που έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν.*

Η απόδειξη της Πρότασης 7.3.3 βασίζεται στο διακριτό λήμμα που ακολουθεί και σε ένα επιχείρημα προσέγγισης.

Λήμμα 7.3.4. *Θεωρούμε $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$ και τα μέτρα πιθανότητας*

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \ \text{και}\ \nu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{y_i}.$$

Υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν.

Απόδειξη. Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \ldots, m\}$ θεωρούμε το μέτρο

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{(x_{\sigma(i)}, y_i)}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το γ_σ έχει περιθώρια τα μ και ν για κάθε σ. Θέτουμε

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^m \langle y_i, x_{\sigma(i)}\rangle.$$

Θα δείξουμε ότι αν η $F(\sigma)$ είναι μέγιστη τότε ο φορέας $(x_{\sigma(i)}, y_i)$ του γ_σ είναι κυκλικά μονότονος.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $F(I)$ είναι μέγιστη, όπου I είναι η ταυτοτική μετάθεση. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $G = \{(x_i, y_i) : i \leqslant m\}$ είναι κυκλικά μονότονο. Έστω $k \leqslant m$ και $i_1, \ldots, i_k$ διακεκριμένοι δείκτες και ας θεωρήσουμε τα σημεία $(x_{i_s}, y_{i_s}) \in G$. Αν σ είναι η μετάθεση που ορίζεται από τις $\sigma(i_s) = i_{s+1}$ αν $s < k$, $\sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(i) = i$ αλλιώς, τότε

$$\begin{aligned} 0 \geqslant F(\sigma) - F(I) &= \sum_{s=1}^k \big(\langle y_{i_s}, x_{\sigma(i_s)}\rangle - \langle y_{i_s}, x_{i_s}\rangle\big) \\ &= \langle y_{i_1}, x_{i_2} - x_{i_1}\rangle + \langle y_{i_2}, x_{i_3} - x_{i_2}\rangle + \cdots + \langle y_{i_k}, x_{i_1} - x_{i_k}\rangle. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 7.3.3. Για δοθέντα μ και ν ορίζουμε ακολουθίες διακριτών μέτρων πιθανότητας $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$ που συγκλίνουν στην ασθενή-$*$ τοπολογία. Από το Λήμμα 7.3.4, για κάθε n υπάρχει γ_n με κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ_n, ν_n. Ένα επιχείρημα συμπάγειας (που χρησιμοποιεί το θεώρημα Arzéla-Ascoli) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ασθενώς-$*$ υπακολουθιακού ορίου γ της γ_n. Το γ έχει κι αυτό κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν. $\square$

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα της κυκλικής μονοτονίας ενός συνόλου με αυτήν του να περιέχεται στο υποδιαφορικό κάποιας κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 7.3.5 (Rockafellar). *Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Τότε, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το G είναι κυκλικά μονότονο.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης ειναι κυκλικά μονότονο. Έστω $(x_i, y_i) \in \partial(f)$, $i = 1, \ldots, m$ (δηλαδή, $y_i \in \partial(f)(x_i)$). Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle y_1, x_2 - x_1\rangle &\leqslant f(x_2) - f(x_1)\\
\langle y_2, x_3 - x_2\rangle &\leqslant f(x_3) - f(x_2)\\
&\vdots\\
\langle y_m, x_1 - x_m\rangle &\leqslant f(x_1) - f(x_m)
\end{aligned}$$

από τον ορισμό του υποδιαφορικού. Προσθέτοντας τις ανισότητες παίρνουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle + \langle y_2, x_3 - x_2\rangle + \cdots + \langle y_m, x_1 - x_m\rangle \leqslant 0.$$

Συνεπώς, κάθε $G \subseteq \partial(f)$ είναι κυκλικά μονότονο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι το G είναι μη κενό και κυκλικά μονότονο, και σταθεροποιούμε $(x_0, y_0) \in G$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f(x) = \sup\big\{\langle y_m, x - x_m\rangle + \langle y_{m-1}, x_m - x_{m-1}\rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0\rangle\big\},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα $m \geqslant 0$ και $(x_i, y_i) \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Η συνάρτηση f είναι κυρτή ως supremum μιας οικογένειας αφφινικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας την κυκλική μονοτονία του G ελέγχουμε εύκολα ότι $f(x_0) = 0$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι γνήσια. Τέλος, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό της f: Έστω $(x, y) \in G$. Θα δείξουμε ότι

$$t + \langle z - x, y\rangle < f(z)$$

για κάθε $t < f(x)$ και κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Από αυτό έπεται ότι $(x, y) \in \partial(f)$. Αφού $t < f(x)$, υπάρχουν $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in G$ τέτοια ώστε

$$t < \langle y_m, x - x_m\rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0\rangle.$$

Από τον ορισμό της f βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
f(z) &\geqslant \langle y, z - x\rangle + \langle y_m, x - x_m\rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0\rangle\\
&> \langle y, z - x\rangle + t,
\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ορισμός 7.3.6. Έστω μ, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται μ-σχεδόν παντού και ικανοποιεί την

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$. Τότε, λέμε ότι η T *μεταφέρει* το μ στο ν και γράφουμε $T\mu = \nu$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $T\mu = \nu$ αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(T(x))d\mu(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για κάθε μ και $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ υπάρχει απεικόνιση που είναι η κλίση μιας κυρτής συνάρτησης και μεταφέρει το μ στο ν. Ο Brenier απέδειξε την ύπαρξη και τη μοναδικότητά της κάνοντας κάποιες υποθέσεις ολοκληρωσιμότητας για τις ροπές των μ και ν, οι οποίες αργότερα αφαιρέθηκαν από τον McCann. Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος είναι η εξής.

Θεώρημα 7.3.7 (Brenier-McCann). *Έστω μ, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και έστω ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ να ορίζεται μ-σχεδόν παντού και να ικανοποιεί την $(\nabla f)\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.3.3 βλέπουμε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν. Από την Πρόταση 7.3.5, ο φορέας του γ περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι κυρτή και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, η f είναι διαφορίσιμη μ-σχεδόν παντού. Αφού $\mathrm{supp}(\gamma) \subset \partial(f)$, από τον ορισμό του υποδιαφορικού έχουμε $y = \nabla f(x)$ σχεδόν για όλα τα ζεύγη (x, y) ως προς γ. Τότε, για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int g(y)d\nu(y) &= \int g(y)d\gamma(x,y) = \int g(\nabla f(x))d\gamma(x,y)\\ &= \int g(\nabla f(x))d\mu(x),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την $(\nabla f)\mu = \nu$. □

Σημειώνουμε ότι αποτελέσματα ομαλότητας από την θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα της απεικόνισης Brenier. Στην ειδική περίπτωση που το μ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο κυρτό σώμα K και το ν είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο άλλο κυρτό σώμα T, ένα θεώρημα ομαλότητας του Caffarelli δείχνει ότι η f μπορεί να υποτεθεί δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο θεώρημα, από το οποίο μπορούμε επίσης να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski όπως εξηγήσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 7.3.8. *Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f \in C^2(K)$ τέτοια ώστε η $\psi = \nabla f : K \to T$ να είναι 1-1, επί και να διατηρεί τον όγκο.*

Βιβλιογραφία

[1] C. Ané, S. Blachére, D. Chafai, P. Fougéres, I. Gentil, F. Marlieu, C. Roberto and G. Scheffer, *Sur les Inégalités des Sobolev Logarithmiques*. Panoramas et Synthéses, vol. 10 (Société Mathématique de France, Paris, (2000).

[2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs **202**, Amer. Math. Soc. (2015).

[3] T. Aubin, *'Equations différentielles non linéaires et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire*. J. Math. Pures Appl. **55** (3) (1976), 269-296.

[4] T. Aubin, *Espaces de Sobolev sur les variétés Riemanniennes*. Bull. Sci. Math. **100**(2), 149-173 (1976).

[5] T. Aubin, *Problémes isopérimétriques et espaces de Sobolev*. J. Differ. Geom. **11**(4), 573-598 (1976).

[6] T. Aubin, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampére Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 252, Springer, New York, (1982).

[7] D. Bakry, *L'hypercontractivité et son utilisation en théory des semigroups*, in *Lectures on Probability Theory*, Saint-Flour, 1992. Lecture Notes in Math., vol. 1581 (Springer, Berlin, 1994), pp. 1-114.

[8] D. Bakry, F. Bolley and I. Gentil, *Dimension dependent hypercontractivity for Gaussian kernels*. Probab. Theory Relat. Fields **154** (3), 845-874 (2012).

[9] D. Bakry, T. Coulhon, M. Ledoux and L. Saloff-Coste, *Sobolev inequalities in disguise*. Indiana Univ. Math. J. **44** (4), 1033-1074 (1995).

[10] D. Bakry and M. 'Emery, *Diffusions hypercontractives*, in *Séminaire des Probabilités, XIX*, 1983/1984. Lecture Notes in Math., vol.1123 (Springer, Berlin, 1985), pp. 177-206.

[11] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348. Springer (2014).

[12] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259-281.

[13] D. Bakry and M. Ledoux *A logarithmic Sobolev form of the Li-Yau parabolic inequality*. Rev. Mat. Iberoam. **22** (2), 683-702 (2006).

[14] F. Baudoin and N. Garofalo, *Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries*. Preprint, 2012.

[15] W. Beckner, *Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality*. Forum Math. **11** (1), 105-137 (1999).

[16] W. Beckner and M. Pearson, *On sharp Sobolev embedding and the logarithmic Sobolev inequality*. Bull. Lond. Math. Soc. **30** (1), 80-84 (1998).

[17] F. Bolley, D. Cordero-Erausquin, Y. Fujita, I. Gentil and A. Guillin, *New sharp Gagliardo-Nirenberg-Sobolev inequalities and an improved Borell-Brascamp-Lieb inequality*. Hal, archives-ouvertes hal-01464530v2.

[18] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York (2011).

[19] E. A. Carlen, S. Kusuoka and D. W. Stroock, *Upper bounds for symmetric Markov transition functions*. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **23** (2), 245-287 (1987).

[20] E. A. Carlen and M. Loss, *Sharp constant in Nash's inequality*. Int. Math. Res. Not. **7**, 213-215 (1993).

[21] G. Carron, *Inégalités isopérimétriques de Faber-Krahn et conséquences*, in *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle*, Luminy, 1992. Sémin. Congr., vol. 1 (Soc. Math. France, Paris, 1996), pp. 205-232.

[22] E. Cinti and F. Otto. *Interpolation inequalities in pattern formation* (2014).

[23] H. Delin, *A proof of the equivalence between Nash and Sobolev inequalities*. Bull. Sci. Math. **120** (4), 405-411 (1996).

[24] M. Del Pino and J. Dolbeault, *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*. J. Math. Pures Appl. **81** (9), 847-875 (2002).

[25] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd edn. Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence (2010).

[26] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics (Springer, Berlin, 2001). Reprint of the 1998 edition.

[27] A. Grigor'yan, *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 47, American Mathematical Society, Providence (2009).

[28] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*. Amer. J. Math. **97** (4) (1975), 1061-1083.

[29] E. Hebey and M. Vaugon, *The best constant problem in the Sobolev embedding theorem for complete Riemannian manifolds*. Duke Math. J. **79**(1), 235-279 (1995).

[30] B. Helffer, *Semiclassical Analysis , Witten Laplacians, and Statistical Mechanics*. Series in Partial Differential Equations and Applications, vol. 1 (World Scientific, River Edge (2002).

[31] M. Ledoux, *Remarks on logarithmic Sobolev constants, exponential integrability and bounds on the diameter*. J. Math. Kyoto Univ. **35** (2), 211-220 (1995).

[32] M. Ledoux, *Sobolev-Kantorovich inequalities*. Anal. Geom. Metr. Spaces 2015 (3) 157-166.

[33] P. Li and S.-T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*. Acta Math. **156** (3-4), 153-201 (1986).

[34] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*. Amer. J. Math. **80**, 931-954 (1958).

[35] O. S. Rothaus, *Hypercontractivity and the Bakry-Emery criterion for compact Lie groups*. J. Funct. Anal. **65** (3), 358-367 (1986).

[36] G. Royer, *An Initiation to Logarithmic Sobolev Inequalities*, SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 14, American Mathematical Society, Providence (2007).

[37] L. Saloff-Coste, *Convergence to equilibrium and logarithmic Sobolev constant on manifolds with Ricci curvature bounded below*. Colloq. Math. **67** (1), 109-121 (1994).

[38] R. Schoen, *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*. J. Differ. Geom. **20** (2), 479-495 (1984).

[39] R. Schoen, *Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics*, in *Topics in Calculus of Variations*, Montecatini Terme, 1987. Lecture Notes in Math., vol. 1365 (Springer, Berlin, 1989), pp. 120-154.

[40] R. Schoen and S.-T. Yau, *Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature*. Invent. Math. **92** (1), 47-71 (1988).

[41] A. J. Stam, *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*. Inf. Control **2**, 101-112 (1959).

[42] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton Mathematical Series, vol.32, Princeton University Press, Princeton (1971).

[43] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110**, 353-372 (1976).

[44] C. Villani, *Optimal transport. Old and new*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 338 Springer (2009).

[45] K. Yosida, *Functional Analysis*, 6th edn. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 123, Springer, Berlin (1980).