

Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες

Περιεχόμενα

Μέρος I Γνώσεις Θεωρίας Μέτρου		1
1	σ-άλγεβρες	3
1.1	σ-άλγεβρες	3
1.2	Παραγόμενη σ-άλγεβρα	5
1.3	Τα σύνολα Borel	6
	Ασκήσεις	7
2	Μέτρα	9
2.1	Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο	9
	Ασκήσεις	10
3	Ισότητα πεπερασμένων μέτρων	12
3.1	Κλάσεις Dynkin	12
3.2	Θεώρημα μονότονης κλάσης	13
	Ασκήσεις	14
4	Κατασκευή μέτρων πιθανότητας	15
4.1	Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο	15
4.2	Επεκτάσεις μέτρων	16
4.3	Κατασκευή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$	17
	Ασκήσεις	19
5	Μετρήσιμες συναρτήσεις	21
5.1	Μετρήσιμες συναρτήσεις	21
5.2	Παραγόμενη σ-άλγεβρα από μετρήσιμες συναρτήσεις	24
	Ασκήσεις	25
6	Ολοκλήρωση	26
6.1	Ολοκλήρωμα Lebesgue	26
6.2	Οι χώροι L^p	30
6.3	Τα βασικά οριακά θεωρήματα	32
6.4	Κατανομή τυχαίας μεταβλητής	34
	Ασκήσεις	37
Μέρος II Πιθανότητες		39
7	Ανεξαρτησία	41

7.1	Ανεξαρτησία για οικογένειες και τυχαίες μεταβλητές	41
7.2	Χώροι γινόμενο	44
7.3	Κατασκευή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με δεδομένη κατανομή	45
7.4	Ολοκλήρωση σε χώρο γινόμενο	46
	Ασκήσεις	46
8	Τα λήμματα Borel-Cantelli και ο νόμος 0-1 του Kolmogorov	47
8.1	Τα λήμματα Borel-Cantelli	47
8.2	Ο νόμος 0-1 του Kolmogorov	51
	Ασκήσεις	53
9	Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών	54
9.1	Νόμος των μεγάλων αριθμών	54
	Ασκήσεις	55
10	Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές	57
10.1	Πυκνότητες στον $\mathbb{R}^n$	57
	Ασκήσεις	59
11	Χαρακτηριστικές συναρτήσεις	60
11.1	Μετασχηματισμός Fourier μέτρου πιθανότητας	60
11.2	Χαρακτηριστικές συναρτήσεις	62
11.3	Θεώρημα μοναδικότητας και εφαρμογές	64
11.4	Άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών	65
	Ασκήσεις	68
12	Είδη σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών	69
12.1	Τρόποι σύγκλισης	69
	Ασκήσεις	71
13	Σύγκλιση κατά κατανομή	72
13.1	Ασθενής Σύγκλιση	72
	Ασκήσεις	76

Μέρος Ι

Γνώσεις Θεωρίας Μέτρου

σ-άλγεβρες

1.1 σ-άλγεβρες

Έστω X μη κενό σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X δηλαδή, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Ορισμός 1.1 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ καλείται **άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες,

- (i). $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (ii). Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- (iii). Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις δηλαδή, για κάθε $n \geq 2$, αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τότε, $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.2 Από τον Ορισμό 1.1 παρατηρούμε ότι,

- $X \in \mathcal{A}$ λόγω των (i) και (ii), εφόσον $X = X \setminus \emptyset$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, εφόσον $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n X \setminus A_i$ και άρα λόγω των (ii) και (iii) $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$, εφόσον $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

Παράδειγμα 1.3 Αν X σύνολο τότε οι οικογένειες

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \{\emptyset, X\}, \\ \mathcal{A}_2 &:= \mathcal{P}(X),\end{aligned}$$

είναι άλγεβρες στο X .

Παράδειγμα 1.4 Αν $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένη ένωση διαστημάτων}\}$ εύκολα παρατηρεί κανείς ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.5 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ καλείται **σ-άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες,

- (i). $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (ii). Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- (iii). Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.6 Από τους Ορισμούς 1.1, 1.5 είναι ξεκάθαρο ότι μία σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα. Επίσης, όπως και στην περίπτωση των αλγεβρών,

- $X \in \mathcal{A}$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές, εφόσον $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus A_n$.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε, $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.7 Δεν ισχύει παντα ότι μια άλγεβρα είναι σ-άλγεβρα. Στο Παράδειγμα 1.4 εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, εφόσον δεν είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων.

Παράδειγμα 1.8 Οι οικογένειες $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ στο Παράδειγμα 1.3 είναι σ-άλγεβρες. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο X .

Παράδειγμα 1.9 Έστω $X = \{1, 2, \dots, 10\}$. Θέτουμε $B_1 := \{1, 2, 3\}, B_2 := \{4, 5, 6\}, B_3 := \{7, 8, 9, 10\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X . Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του B_2 είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο βρίσκεται και αυτό στην $\mathcal{A}$. Αντίθετα η

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί, ενώ είναι κλειστή στις ενώσεις δεν είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Τα συμπληρώματα των $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$ δεν περιέχονται στην $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.10 Έστω $X = \mathbb{R}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα (εύκολη άσκηση). Το κενό είναι αριθμήσιμο και το $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (το κενό), άρα και τα δύο ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

Όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 1.7 μία άλγεβρα δεν είναι πάντοτε σ-άλγεβρα. Η παρακάτω πρόταση μας δείχνει υπό ποιές προϋποθέσεις μια άλγεβρα είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση 1.11 Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα στο X . Αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

- (i). Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- (ii). Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- (iii). Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στην περίπτωση που ισχύει το (i). Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες δυο περιπτώσεις.

Αφού η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Θέτουμε $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$ $n = 1, 2, \dots$. Τότε, η A_n είναι αύξουσα και $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Άρα, λόγω του (i) έχουμε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

□

Πρόταση 1.12 Έστω X σύνολο και $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-άλγεβρων στο X . Τότε, η

$$\mathcal{H} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \in X : A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X .

Απόδειξη Προφανώς τα $\emptyset, X$ ανήκουν στην $\mathcal{H}$ γιατί και τα δύο είναι στοιχεία κάθε σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_i$ στο X . Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$ τότε, επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι

$$X \setminus A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I,$$

δηλαδή $X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έπεται λοιπόν ότι η $\mathcal{H}$ είναι σ-άλγεβρα. □

1.2 Παραγόμενη σ-άλγεβρα

Ορισμός 1.13 Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \text{ και } \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma\text{-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-άλγεβρών στο X που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{C}$ ορίζεται ως η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την $\mathcal{C}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{C})$, δηλαδή

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{H}} \mathcal{A}.$$

Η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X με $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$.

Από την Πρόταση 1.12 έπεται ότι η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{C}$ και εύκολα βλέπει κανείς ότι είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Προφανώς, αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Παράδειγμα 1.14 Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 1.9. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ δεν είναι σ-άλγεβρα και εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 1.15 Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} := \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του X (δηλαδή τα A_i είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το X), με $I = \{1, 2, \dots, k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ή $I = \mathbb{N}$. Για την σ-άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{C}$ έχουμε την εξής απλή περιγραφή,

$$\sigma(\mathcal{C}) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i : J \subset I \right\}. \quad (*)$$

Δηλαδή ένα σύνολο της $\sigma(\mathcal{C})$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης $\mathcal{C}$.

Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής,

- Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{C}$. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της $\mathcal{C}$ είναι της μορφής A_{i_0} για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\bigcup_{i \in J} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.

- Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει την $\mathcal{C}$ πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Γιατί οποιαδήποτε ένωση $\bigcup_{i \in J} A_i$ είναι αριθμήσιμη αφού το I είναι αριθμήσιμο. Και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα A_i με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.
- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\bigcup_{i \in J} A_i = \emptyset$, και η $J = I$ δίνει $\bigcup_{i \in J} A_i = X$. Επίσης, αν πάρουμε A της μορφής $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X \setminus A = \bigcup_{i \in I \setminus J} A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \bigcup_{i \in J_n} A_i$ όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i \in J} A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις τρεις παρατηρήσεις παίρνουμε την (*).

1.3 Τα σύνολα Borel

Υπενθυμίζουμε ότι αν X σύνολο μια τοπολογία στο X είναι μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X έτσι ώστε,

- (i) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- (ii) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
- (iii) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις αυθαίρετες ενώσεις.

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ ανοικτά σύνολα. Τα συμπληρώματα των ανοικτών συνόλων καλούνται κλειστά σύνολα.

Ορισμός 1.16 Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{T})$ που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{T}$ στο X ονομάζεται Borel σ-άλγεβρα και τα στοιχεία αυτής σύνολα Borel. Συνήθως συμβολίζουμε την $\sigma(\mathcal{T})$ με $\mathcal{B}(X)$.

Γενικά η οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων δεν είναι σ-άλγεβρα. Για το λόγο αυτό τη μεγαλώνουμε λίγο για να πάρουμε μια σ-άλγεβρα. Η $\mathcal{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα.

Παράδειγμα 1.17 Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική η οποία παράγει μία τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$. Η τοπολογία αυτή είναι η συνήθης τοπολογία του $\mathbb{R}^n$ και τα ανοικτά σύνολα αυτής είναι ακριβώς τα ανοικτά σύνολα που καθορίζονται από την Ευκλείδεια μετρική.

Πρόταση 1.18 Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι σύνολο Borel.

Απόδειξη Απο τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{T}) =: \mathcal{B}(X)$. Αν F είναι κλειστό, τότε $X \setminus F \in \mathcal{B}(X)$ ως ανοικτό. Αλλά η $\mathcal{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \setminus F$ να περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$. Άρα $F \in \mathcal{B}(X)$. $\square$

Παρακάτω, θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία (Παράδειγμα 1.17).

Πρόταση 1.19 Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.

Απόδειξη Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα είναι

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b).$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοιχτά και το $[a, b]$ είναι κλειστό. Για το $(a, b]$ γράφουμε

$$(a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty)).$$

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έπεται ότι $(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Όμοια δείχνουμε ότι $[a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε ξεκινώντας από διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος φορών τις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 1.20 Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(a, b] : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{(a, b) : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

$$\text{Τότε } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3).$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει τα ανοιχτά σύνολα άρα και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα κλειστά σύνολα, συνεπώς και την $\sigma(\mathcal{F})$. Τα διαστήματα της $\mathcal{A}_1$ είναι κλειστά άρα $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1)$. Για την $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2)$ παρατηρούμε ότι $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$ και για την $\sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3)$ ότι $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n})$. Τέλος, για την $\sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων. $\square$

Με παρόμοια επιχειρήματα κανείς μπορεί να δείξει ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}.$$

Παρατήρηση 1.21 Όμοια με το Θεώρημα 1.20 στον $\mathbb{R}^n$ για τις οικογένειες $\mathcal{F}$ των κλειστών συνόλων και

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n\} : b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n\} : a_i < b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{(x_1, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \dots, n\} : a_i < b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i\},\end{aligned}$$

έχουμε $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$.

Η απόδειξη γίνεται με παρόμοια επιχειρήματα.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $X := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}\} \\ \mathcal{A}_2 &:= \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}\}\end{aligned}$$

- (α) Είναι οι $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρες;
- (β) Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

1.2 Σε αυτή την άσκηση παίρνουμε $X := \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(β) Για την οικογένεια $\mathcal{A}_0 := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.

(γ) Να δείξετε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$ **δεν** είναι σ-άλγεβρα.

1.3 Αν στο Παράδειγμα 1.15 η διαμέριση $\mathcal{C}$ του X έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το I είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το X υπεραριθμήσιμο), να δοθεί περιγραφή της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(\mathcal{C})$.

1.4 Για την οικογένεια $\mathcal{C} := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.5 Να δείξετε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση.

1.6 Έστω $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία στοιχείων μίας σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο, ώστε $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

1.7 Έστω $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση.

(α) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X , θέτουμε

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y .

(β) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y , θέτουμε

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X .

Υπενθυμίζουμε ότι για $B \subset Y$, συμβολίζουμε με $f^{-1}(B)$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \in B\}$.

Μέτρα

2.1 Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο

Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα στο X . Καλούμε το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμο χώρο.

Ορισμός 2.1 Μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ λέμε κάθε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες,

- (i). $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii). $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geq 1}$ ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου** και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**.

Παράδειγμα 2.2 (Αριθμητικό μέτρο) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και

$$\mu(A) := \begin{cases} n & , \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο και έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & , \text{αν το } A \text{ είναι άπειροσύνολο} \end{cases},$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Το μ είναι το αριθμητικό μέτρο στο X .

Παράδειγμα 2.3 (Μέτρο Dirac) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1 & , \text{αν } x \in A \\ 0 & , \text{αν } x \in X \setminus A \end{cases},$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η συνάρτηση δ_x είναι μέτρο, και ονομάζεται μέτρο Dirac στο x .

Παράδειγμα 2.4 (Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) Παίρνουμε $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο λ στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ώστε

$$\lambda(I) = \text{μήκος}(I), \quad (*)$$

για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, για $a < b$ πραγματικούς, έχουμε $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = b - a$, $\lambda((a, \infty)) = \infty$.

Πως μπορούμε να ορίσουμε μία τέτοια συνάρτηση; Ξέρουμε τις τιμές της στα διαστήματα, τα οποία είναι στοιχεία του $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, και οι ιδιότητες του μέτρου καθορίζουν μοναδικά τις τιμές της σε ενώσεις διαστημάτων. Αυτό όμως δεν αρκεί. Χρειάζεται να την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδεικνύεται ότι μία τέτοια επέκταση είναι δυνατή και γίνεται μοναδικά. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό μέτρο στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την (*). Την κατασκευή αυτού του μέτρου μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε οποιοδήποτε βιβλίο θεωρίας μέτρου.

Ορισμός 2.5 Ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$ και μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$.

Αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας. Για έναν χώρο πιθανότητας συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Παράδειγμα 2.6 (Διακριτό μέτρο πιθανότητας) Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Έστω $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ώστε $\sum_{x \in \Omega} f(x) = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \sum_{x \in A} f(x).$$

Η συνάρτηση $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω . Σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ δίνει μάζα $f(x)$. Το διακριτό μέτρο πιθανότητας είναι γενίκευση του μέτρου Dirac.

Παράδειγμα 2.7 (Ρίψη νομίσματος) Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0, 1]$ να φέρει κορώνα, και $1 - p$ να φέρει γράμματα, ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Παίρνουμε $\Omega := \{K, \Gamma\}$, $f(K) = p$, $f(\Gamma) = 1 - p$. Προκύπτει έτσι ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\mathbf{P}^{(p)}$, και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K, \Gamma\}, \mathcal{P}(\{K, \Gamma\}), \mathbf{P}^{(p)})$.

Παράδειγμα 2.8 (Μέτρο περιορισμός) Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $A_0 \in \mathcal{A}$ τότε, η συνάρτηση $\mu_{A_0} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ που ορίζεται ως $\mu_{A_0}(A) = \mu(A \cap A_0)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο (Άσκηση). Το μ_{A_0} έχει συγκεντρωμένη όλη του την μάζα στο A_0 αφού $\mu_{A_0}(X \setminus A_0) = \mu((X \setminus A_0) \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$.

Παράδειγμα 2.9 (Κανονικοποιημένο μέτρο περιορισμός) Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ότι $0 < \mu(A_0) < 1$ (οι ακραίες περιπτώσεις 0 και 1 δεν έχουν ενδιαφέρον), τότε το μ_{A_0} έχει συνολική μάζα $\mu_{A_0}(\Omega) = \mu(A_0) < 1$, δηλαδή δεν είναι μέτρο πιθανότητας. Το κανονικοποιούμε ορίζοντας ένα νέο μέτρο, το $\mathbf{P}_{A_0} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, ως εξής

$$\mathbf{P}_{A_0}(A) = \frac{\mu_{A_0}(A)}{\mu_{A_0}(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)},$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το $\mathbf{P}_{A_0}$ είναι μέτρο πιθανότητας, και δίνει όλη του την μάζα στο σύνολο A_0 .

Τα αξιώματα στον ορισμό του μέτρου συνεπάγονται αρκετές χρήσιμες ιδιότητες για μία τέτοια συνάρτηση. Καταγράφουμε κάποιες στην παρακάτω πρόταση. Η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 2.10 Έστω μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,

- (i). $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$.
- (ii). Αν $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu \in A \subset B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$ και αν $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (iii). Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- (iv). Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\mu(A_1) < \infty$, τότε $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Άσκήσεις

- 2.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δείξετε ότι, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.
- 2.2 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$.
 - (α) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 0$, για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.
 - (β) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 1$, για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

2.3 Να βρεθεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I'}$ οικογένειες στοιχείων της $\mathcal{F}$ ώστε,

$$(\alpha) \mathbf{P}(A_i) = 0, \text{ για κάθε } i \in I, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}, \text{ αλλά } \mathbf{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \neq 0.$$

$$(\beta) \mathbf{P}(B_i) = 1, \text{ για κάθε } i \in I', \text{ αλλά } \bigcap_{i \in I'} B_i = \emptyset.$$

2.4 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_\beta)_{\beta \in B}$ οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Αν $\mathbf{P}(A_\beta) > 0$, για κάθε $\beta \in B$, να δείξετε ότι το B είναι αριθμήσιμο.

Ισότητα πεπερασμένων μέτρων

3.1 Κλάσεις Dynkin

Ορισμός 3.1 Έστω X σύνολο. Μία οικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται κλάση **Dynkin** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες,

- (i). $X \in \mathcal{D}$.
- (ii). Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
- (iii). Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Παρατήρηση 3.2 Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin και κάθε κλάση Dynkin είναι άλγεβρα. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν.

Όπως και στην περίπτωση των σ-αλγεβρών, για κάθε οικογένεια $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X , υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin που την περιέχει. Αυτή περιγράφεται ως η τομή όλων των κλάσεων Dynkin που περιέχουν την $\mathcal{A}$. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\delta(\mathcal{A})$.

Συνοψίζοντας πέρνουμε την ακόλουθη πρόταση, της οποίας η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή στην περίπτωση των σ-αλγεβρών και για το λόγο αυτό παραλείπεται.

Πρόταση 3.3 Έστω X σύνολο και $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Τότε, η οικογένεια

$$\delta(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ κλάση Dynkin και } \mathcal{A} \subset \mathcal{D} \},$$

- είναι κλάση Dynkin στο X και
- είναι η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{A}$.

Η $\delta(\mathcal{A})$ είναι η κλάση Dynkin που παράγεται από την $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 3.4 Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $\delta(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$, εφόσον η $\sigma(\mathcal{A})$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την $\mathcal{A}$.

Η επόμενη πρόταση μας δείχνει πότε μία κλάση Dynkin είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση 3.5 Έστω X σύνολο και $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin στο X . Αν η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές τότε, η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα στο X .

Απόδειξη Από τον Ορισμό 3.1 της κλάσης Dynkin έχουμε ότι $X \in \mathcal{D}$ λόγω του (i) και αν $A \in \mathcal{D}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{D}$ λόγω των (i) και (ii). Επίσης, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις εφόσον είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και στα συμπληρώματα. Αυτό σε συνδιασμό με την ιδιότητα (iii) του Ορισμού 3.1 και την Πρόταση 1.11 μας εξασφαλίζει ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα. □

3.2 Θεώρημα μονότονης κλάσης

Θεώρημα 3.6 (Θεώρημα μονότονης κλάσης) Έστω X σύνολο και $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε, $\delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.

Το Θεώρημα **Μονότονης Κλάσης** λέγεται και Θεώρημα **Π-Λ**.

Απόδειξη Ισχύει ότι $\delta(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Άρα, αν δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{A})$ είναι σ-άλγεβρα τότε, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \delta(\mathcal{A})$, εφόσον η $\sigma(\mathcal{A})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{A}$. Με βάση την Πρόταση 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{A})$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $A, B \in \delta(\mathcal{A})$, τότε $A \cap B \in \delta(\mathcal{A})$.

Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε,

$$\mathcal{D}(A) = \{B \in \delta(\mathcal{A}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{A})\}.$$

Βήμα 1. Για $A \in \mathcal{A}$, έχουμε

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(A) \subset \delta(\mathcal{A})$, εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές,
- Η $\mathcal{D}(A)$ είναι κλάση Dynkin (αφήνεται ως άσκηση).

Άρα $\mathcal{D}(A) = \delta(\mathcal{A})$, εφόσον η $\delta(\mathcal{A})$ είναι η ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{A}$.

Βήμα 2. Για $B \in \delta(\mathcal{A})$, έχουμε

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(B)$, από το Βήμα 1, και προφανώς $\mathcal{D}(B) \subset \delta(\mathcal{A})$,
- Η $\mathcal{D}(B)$ είναι κλάση Dynkin (αφήνεται ως άσκηση).

Άρα, όπως στο Βήμα 1, έχουμε ότι $\mathcal{D}(B) = \delta(\mathcal{A})$. Συνεπώς αν $C \in \delta(\mathcal{A})$, τότε $B \cap C \in \delta(\mathcal{A})$. Όμως το $B \in \delta(\mathcal{A})$ είναι τυχόν, άρα $B \cap C \in \delta(\mathcal{A})$, για κάθε $A, B \in \delta(\mathcal{A})$, και το ζητούμενο αποδείχθηκε. $\square$

Το επόμενο πόρισμα είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα του θεωρήματος Μονότονης Κλάσης.

Πόρισμα 3.7 Έστω X σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, σ-άλγεβρα, και μ, ν πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, με $\mu(X) = \nu(X)$, τα οποία συμφωνούν σε μία οικογένεια $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, κλειστή στις πεπερασμένες τομές.

Αν $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, τότε $\mu = \nu$ στην $\mathcal{A}$.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$. Τότε,

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
- Η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin.

Πράγματι, ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής και για τον δεύτερο έχουμε,

(i). $X \in \mathcal{B}$ από υπόθεση.

(ii). Αν $A, C \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$.

(iii). Αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{B}$ τότε,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Άρα, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin, έχουμε ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$. Όμως, από το Θεώρημα Μονότονης Κλάσης, $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$ και τελικά, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Ασκήσεις

3.1

3.2

3.3

Κατασκευή μέτρων πιθανότητας

4.1 Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο, που αποτελούν την απλούστερη μορφή μέτρων πιθανότητας και δεν απαιτούν χρήση εξειδικευμένων εργαλείων.

Αν Ω αριθμήσιμο σύνολο, στο Παράδειγμα 2.6 είδαμε πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο μέτρο, δεδομένου ότι υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$. Η σ-άλγεβρα που επιλέξαμε είναι η $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Αυτό προκύπτει φυσιολογικά, δεδομένου ότι ζητάμε $\{\omega\} \in \mathcal{A}$, για κάθε $\omega \in \Omega$, συνεπώς αναγκαστηρά $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, εφόσον κάθε $A \subset \Omega$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}$, $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$.

Θεώρημα 4.1 Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Τότε,

- (i). Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.
- (ii). Έστω $(q_\omega)_{\omega \in \Omega}$ ακολουθία αριθμών στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = q_\omega$, για κάθε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $q_\omega \geq 0$, για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\sum_{\omega \in \Omega} q_\omega = 1$.

Απόδειξη (i). Έστω $A \subset \Omega$. Τότε $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$ και εφόσον Ω αριθμήσιμο,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

- (ii). $\Rightarrow$ Ισχύει ότι $q_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, άρα $q_\omega \geq 0$ εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο στο Ω . Επίσης,

$$\sum_{\omega \in \Omega} q_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο Ω .

$\Leftarrow$ Προκύπτει από το Παράδειγμα 2.6. □

Παράδειγμα 4.2 (Κατανομή Poisson) Έστω $\Omega = \mathbb{N}$ και $\lambda > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Η $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί της απαιτήσεις του Θεωρήματος 4.1. Πράγματι, $p_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

Συνεπώς ορίζεται μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{k\}) = p_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το μέτρο αυτό καλείται κατανομή **Poisson**.

Ορισμός 4.3 Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ καλείται ομοιόμορφο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \epsilon$, για κάθε $\omega \in \Omega$, δηλαδή το $\mathbf{P}$ δίνει την ίδια μάζα σε κάθε $\omega \in \Omega$.

Παρατήρηση 4.4 Από τον Ορισμό 4.3 συμπαίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \quad \forall A \subset \Omega.$$

Πράγματι, εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας,

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \epsilon = \epsilon |\Omega|.$$

Άρα $\epsilon = \frac{1}{|\Omega|}$. Όμως $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \epsilon = \epsilon |A|$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Τα ομοιόμορφα μέτρα μοντελοποιούν πειράματα που έχουν “ισοπίθανα” αποτελέσματα.

Παράδειγμα 4.5 Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Τότε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Για $\omega \in \Omega$ θέτουμε $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\mathbf{P}$ είναι ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Παράδειγμα 4.6 (Υπεργεωμετρική κατανομή) Μία κάλπη περιέχει N άσπρα και M μαύρα αριθμημένα σφαιρίδια, $(1, 2, \dots, N)$ και $(N+1, N+2, \dots, N+M)$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε n από αυτά χωρίς επανάθεση, $1 \leq n \leq N+M$. Τότε ο δειγματικός μας χώρος είναι,

$$\Omega = \{A \subset \{1, 2, \dots, N+M\} : |A| = n\},$$

και κάθε στοιχείο του Ω είναι μία δυνατή εξαγωγή. Για τον πληθάνημο του Ω έχουμε,

$$|\Omega| = \binom{N+M}{n}.$$

Για λόγους συμμετρίας όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ που ορίζεται στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ έχει $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{N+M}{n}}$, για κάθε $A \subset \Omega$. Έστω τώρα $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ και $D = \{A \subset \Omega : A \text{ έχει } k \text{ άσπρα σφαιρίδια}\}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(D) = \frac{|D|}{\binom{N+M}{n}} = \frac{\binom{N}{k} \binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

4.2 Επεκτάσεις μέτρων

Στην περίπτωση ενός αριθμήσιμου δειγματικού χώρου, όπως ήδη έχουμε δει, είναι εύκολο να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας. Όταν ο χώρος είναι υπεραριθμήσιμος οι ίδιες τεχνικές δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Μπορούμε όμως, όταν έχουμε ένα μέτρο ορισμένο σε μία άλγεβρα, να το επεκτείνουμε “φυσιολογικά” σε μία σ-άλγεβρα. Για το επόμενο θεώρημα θα μας χρειαστεί ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.7 Έστω Ω σύνολο και $\mathcal{F}_0$ άλγεβρα στο Ω . Μία συνάρτηση $\mathbf{P} : \mathcal{F}_0 \rightarrow [0, 1]$ λέγεται μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}_0$ αν,

(i). $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(ii). Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{F}_0$, με $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_0$, έχουμε ότι $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n)$.

Θεώρημα 4.8 (Επέκτασης Καραθεωδωρή) Έστω Ω σύνολο και $\mathcal{F}_0$ άλγεβρα στο Ω . Αν $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}_0$ τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathbf{P}}$ στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$ έτσι ώστε $\tilde{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_0} = \mathbf{P}$.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο τη μοναδικότητα. Για την απόδειξη της ύπαρξης ο αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί σε οποιοδήποτε κλασσικό σύγγραμμα θεωρίας μέτρου.

Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ μέτρα πιθανότητας στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$ που συμφωνούν στην $\mathcal{F}_0$. Τότε, από το Πρόσχημα 3.7, αφού η $\mathcal{F}_0$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, έχουμε ότι τα $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ συμφωνούν στην $\sigma(\mathcal{F}_0)$. $\square$

4.3 Κατασκευή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Ορισμός 4.9 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$ λέγεται η συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ με,

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση κατανομής μετράει τη μάζα που δίνει το μέτρο, μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο. Παρακάτω χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί:

$$\mathbf{F}(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathbf{F}(x) \text{ και } \mathbf{F}(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \mathbf{F}(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 4.10 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και $\mathbf{F}$ η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Τότε,

- (i). Η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα συνάρτηση.
- (ii). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{F}(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{F}(x) = 1$.
- (iii). $\mathbf{P}((x, y)) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)$, $-\infty \leq x \leq \infty$, με τις συμβάσεις $(x, \infty] = (x, \infty)$ και $(x, x] = \emptyset$.

Απόδειξη (i). Έστω $x \leq y$. Τότε, $\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{P}((-\infty, y]) - \mathbf{P}((-\infty, x]) = \mathbf{P}((-\infty, y] \setminus (-\infty, x]) = \mathbf{P}((x, y]) \geq 0$.

(ii). Επειδή η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, τα όρια υπάρχουν και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}((-\infty, -n]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

ενώ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{F}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}((-\infty, n]) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

(iii). Για $x, y \in \mathbb{R}$ το είδαμε στην απόδειξη του (i). Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται ως άσκηση. $\square$

Θεώρημα 4.11 Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ίδια συνάρτηση κατανομής. Τότε, $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Απόδειξη Έστω $\mathcal{C} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και γνωρίζουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Από το Πρόσχημα 3.7 τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ταυτίζονται στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, εφόσον έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής και για το λόγο αυτό ταυτίζονται στην $\mathcal{C}$. $\square$

Παρατήρηση 4.12 Αν ξέρουμε τη συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F}$ ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$, τότε γνωρίζουμε τη συμπεριφορά του σε σύνολα που προκύπτουν από διαστήματα της μορφής $(x, y]$, με συνήθης συνολοθεωρητικές πράξεις, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\mathbf{P}((x, y]) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)$.

Όταν έχουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι εύκολο να βρούμε τη συνάρτηση κατανομής του. Πότε όμως, μία συνάρτηση $\mathbf{F}$ ορίζει μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.13 Μία συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής,

- (i). Η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα.
- (ii). Η $\mathbf{F}$ είναι δεξιά συνεχής.
- (iii). $\mathbf{F}(-\infty) = 0$ και $\mathbf{F}(\infty) = 1$, όπου $\mathbf{F}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{F}(x)$ και $\mathbf{F}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{F}(x)$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Τα (i) και (iii) τα είδαμε στην Πρόταση 4.10. Για το (ii), έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $\mathbf{F}$ αύξουσα το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \mathbf{F}(x)$ υπάρχει και έχουμε,

$$\mathbf{F}(x_0^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(x_0 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}((-\infty, x_0 + \frac{1}{n}]) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_0 + \frac{1}{n}]\right) = \mathbf{P}((-\infty, x_0]) = \mathbf{F}(x_0).$$

$\Leftarrow$ Έστω $\mathbf{F}$ που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii). Θέτουμε

$\mathcal{B}_0 = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων της μορφής } (x, y] \text{ με } -\infty \leq x \leq y \leq \infty\}$,
 πάλι με τις συμβάσεις $(x, \infty] = (x, \infty)$ και $(x, x] = \emptyset$, $x \in \mathbb{R}$. Για $A \in \mathcal{B}_0$ έχουμε ότι,

$$A = \bigcup_{i=1}^n (x_i, y_i], \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N},$$

και τα στοιχεία της ένωσης είναι ξένα ανά δύο. Ορίζουμε,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}(y_i) - \mathbf{F}(x_i)).$$

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι άλγεβρα και ότι $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, ισχύει ότι το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\mathcal{B}_0$, η απόδειξη του οποίου είναι απαιτητική και για τον λόγο αυτό παραλείπεται.

Από το Θεώρημα 4.8 υπάρχει μοναδική επέκταση του $\mathbf{P}$ στην $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Η συνάρτηση κατανομής της επέκτασης του $\mathbf{P}$ είναι η $\mathbf{F}$. □

Πόρισμα 4.14 Έστω $\mathbf{F}$ συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε τα εξής,

- (i). $\mathbf{P}((x, y]) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x)$.
- (ii). $\mathbf{P}(\{x\}) = \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^-)$.
- (iii). $\mathbf{P}([x, y]) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x^-)$.
- (iv). $\mathbf{P}([x, y)) = \mathbf{F}(y^-) - \mathbf{F}(x^-)$.
- (v). $\mathbf{P}((x, y)) = \mathbf{F}(y^-) - \mathbf{F}(x)$.

Απόδειξη Το (i) το έχουμε δεί. Για το (ii) έχουμε,

$$\mathbf{P}(\{x\}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left((x - \frac{1}{n}, x]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x - \frac{1}{n})) \stackrel{(i)}{=} (\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^-)).$$

Για το (iii),

$$\mathbf{P}([x, y]) = \mathbf{P}(\{x\}) + \mathbf{P}((x, y]) \stackrel{(i), (ii)}{=} \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^-) + \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x^-).$$

Τα (iv) και (v) προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Παρατήρηση 4.15 Έστω $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n, n \in \mathbb{N}$, μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ θετικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. εύκολα βλέπει κανείς ότι το $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{P}_i$ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Το $\mathbf{Q}$ είναι ο κυρτός συνδυασμός των μέτρων $\mathbf{P}_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα 4.16 Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και δ_{x_0} το μέτρο Dirac στην $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, στο x_0 . Η συνάρτηση κατανομής του δ_{x_0} είναι η,

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_0 \\ 1 & , x \geq x_0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $\delta_{x_0}(\{x_0\}) = 1 = \mathbf{F}(x_0) - \mathbf{F}(x_0^-)$.

Παράδειγμα 4.17 Έστω $S \subset \mathbb{R}$ αριθμήσιμο και $(a_i)_{i \in S}$ ακολουθία θετικών αριθμών, έτσι ώστε $\sum_{i \in S} a_i = 1$. Ορίζουμε $\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in S} a_i \mathbf{1}_{i \in A}$. Εύκολα βλέπουμε ότι το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$ έχουμε,

$$\mathbf{F}(\{x\}) - \mathbf{F}(\{x^-\}) = \mathbf{P}(\{x\}) = \begin{cases} a_x & , x \in S \\ 0 & , x \notin S \end{cases}.$$

Δηλαδή, η $\mathbf{F}$ είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του S .

Παράδειγμα 4.18 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, $f \geq 0$, Riemann ολοκληρώσιμη με $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$.

Ορίζουμε $\mathbf{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, με $\mathbf{P}(A) = \int_A f(x) dx$, για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας και η f λέγεται πυκνότητα του $\mathbf{P}$. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\mathbf{P}(\{x\}) = \int_{\{x\}} f(x) dx = 0.$$

Άρα $\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x^-) = 0$, δηλαδή η $\mathbf{F}$ είναι συνεχής.

Παρατήρηση 4.19 Δεν προκύπτουν όλα τα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ από πυκνότητες. Στα Παραδείγματα 4.16 και 4.17 οι συναρτήσεις κατανομής των δύο μέτρων, έχουν σημεία ασυνέχειας.

Τα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ τα λέμε και κατανομές στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

4.1 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $\mathbf{F}$ η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Να δείξετε ότι η $\mathbf{F}$ μπορεί να έχει αριθμήσιμο το πλήθος άλματα.

4.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[\frac{1}{i}, \infty]}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathbf{F}$ είναι συνάρτηση κατανομής για κάποιο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στο $\mathbb{R}$ και να βρεθούν οι πιθανότητες των,

(α) $A = [1, \infty)$.

(β) $B = [\frac{1}{10}, \infty)$.

(γ) $C = \{\emptyset\}$.

(δ) $D = [0, \frac{1}{2}]$.

(ε) $E = (-\infty, 0)$.

(ζ) $F = (0, \infty)$.

4.3 Έστω $\mathbf{P}_1$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα $f(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}$, και $\mathbf{P}_2$ κατανομή στο $\mathbb{R}$ που δίνει μάζα $\frac{1}{2}$ στα $-2, 3$. Για $\lambda \in (0, 1)$ και θεωρώντας τον κυρτό συνδιασμό $\mathbf{P}$ των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$, να υπολογιστούν,

(α) η $\mathbf{P}((0, 4))$.

(β) η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 5.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι. Μία συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow E$ καλείται **μετρήσιμη** αν,

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \quad \forall A \in \mathcal{E}. \quad (*)$$

Λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ (ή και $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη), ειδικά όταν στον ίδιο χώρο μελετάμε πολλές σ-άλγεβρες ταυτόχρονα. Στην περίπτωση που ο Ω είναι τοπολογικός χώρος, μία $\mathcal{B}(\Omega)$ -μετρήσιμη συνάρτηση τη λέμε **Borel-μετρήσιμη**.

Για το σύνολο $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$, συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{f \in A\}$. Όμοια, αν $E = \mathbb{R}$ το $\{f < a\}$ συμβολίζει το σύνολο $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\}$ και όμοια για τα $\{f \leq a\}$, $\{f = a\}$ κ.ο.κ.

Επίσης, σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, μία μετρήσιμη συνάρτηση τη λέμε **τυχαία μεταβλητή**. Συνήθως τη συμβολίζουμε με X .

Παρατήρηση 5.2 Γιατί απαιτούμε από μία συνάρτηση $X : \Omega \rightarrow E$ να έχει την ιδιότητα $(*)$; Γιατί όταν ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στην $\mathcal{F}$, θέλουμε να μπορούμε να μιλάμε για πιθανότητες της μορφής $\mathbf{P}(X \in A)$, $A \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\mathbf{P}(X^{-1}(A))$. Πρέπει, επομένως, το $X^{-1}(A)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{P}$, το οποίο είναι η $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 5.3 Έστω $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ οικογένεια, ώστε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$. Τότε, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$ αν και μόνο αν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{E} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Τότε η $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ και εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι,

- $E \in \mathcal{B}$ γιατί $f^{-1}(E) = \Omega$ και $\Omega \in \mathcal{F}$,
- αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $f^{-1}(E \setminus A) = \Omega \setminus f^{-1}(A)$ και εφόσον $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα έχουμε ότι $\Omega \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Άρα $E \setminus A \in \mathcal{B}$ και
- αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στην $\mathcal{B}$ τότε,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}.$$

Συνεπώς, $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$. Όμως, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Άρα, $\mathcal{B} = \mathcal{E}$.
 $\Leftarrow$ Προφανές, αφού $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$.

□

Θα μας απασχολήσουν, κυρίως, μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ και $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε το $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ με $[-\infty, \infty]$. Για καθένα από αυτά τα σύνολα η σ-άλγεβρα που θα χρησιμοποιούμε είναι η Borel σ-άλγεβρα, όπως έχει οριστεί στο Κεφάλαιο 1.

Γενικά, αν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $f : \Omega \rightarrow E$ μετρήσιμη συνάρτηση θα παίρνουμε ως σ-άλγεβρα στο E την $\mathcal{B}(E)$.

Πόρισμα 5.4 Έστω $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ συνάρτηση. Τότε, η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Αν $\mathcal{C} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, γνωρίζουμε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, από το Θεώρημα 5.3, προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα διαστήματα $(-\infty, a)$ με $(-\infty, a]$ ή γενικά από οποιαδήποτε οικογένεια διαστημάτων που παράγουν την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει αν έχουμε μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Παράδειγμα 5.5 Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 1.15, έχουμε μία αριθμήσιμη διαμέριση $\mathcal{C} := \{A_i : i \in I\}$ ενός συνόλου Ω , και $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{C})$.

Μία μετρήσιμη συνάρτηση στον $(\Omega, \mathcal{F})$ πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης. Πράγματι, έστω f μετρήσιμη και $i_0 \in I$. Ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $a < b$ στο A_{i_0} . Θα έπρεπε λοιπόν το σύνολο $A_{i_0} \cap \{f < b\}$ να ανήκει στην $\mathcal{F}$. Όμως, αυτό το σύνολο είναι μή κενό και γνήσιο υποσύνολο του A_{i_0} . Τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει στην $\mathcal{F}$ (δες στο Παράδειγμα 1.15 για την περιγραφή της $\mathcal{F}$).

Επίσης, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μία συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης είναι μετρήσιμη. Άρα, αυτές είναι ακριβώς όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας του συνόλου των μετρησίμων συναρτήσεων. Εν ολίγοις, έχουμε ότι αν ξεκινήσει κανείς με μετρήσιμες συναρτήσεις και τις συνδυάσει με κάποιο “φυσιολογικό” τρόπο, προκύπτουν πάλι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 5.6 Έστω f, g μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε, μετρήσιμες είναι επίσης οι συναρτήσεις

$$af, |f|, f + g, fg, f/g, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}, f^+, f^-,$$

όπου η εν λόγω συνάρτηση ορίζεται ώστε να είναι σταθερή και ίση με μία αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας $(\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0)$.

Πρόταση 5.7 Έστω $(f_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,

(i). Οι συναρτήσεις

$$\inf_{n \geq 1} f_n, \sup_{n \geq 1} f_n, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

είναι επίσης μετρήσιμες.

(ii). Αν η $(f_n)_{n \geq 1}$ συγκλίνει σημειακά σε μία συνάρτηση f , τότε η $f = \lim f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Παρακάτω, για $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ συνάρτηση, γράφουμε ότι η f είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ μετρήσιμη για να δηλώσουμε ότι η f είναι $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη και η σ-άλγεβρα στο E είναι η $\mathcal{E}$.

Θεώρημα 5.8 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E}), (G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : \Omega \rightarrow E, g : E \rightarrow G$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε η $g \circ f : \Omega \rightarrow G$ είναι $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ μετρήσιμη.

Απόδειξη Έστω $A \in \mathcal{G}$. Τότε, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Όμως, $g^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ άρα $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$ από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(\Omega, \mathcal{T})$, $(E, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι, μία συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής αν για κάθε $V \in \mathcal{S}$ έχουμε ότι $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.

Θεώρημα 5.9 Έστω $(\Omega, \mathcal{T})$, $(E, \mathcal{S})$ τοπολογικοί χώροι και $f : \Omega \rightarrow E$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ τότε, η f είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ μετρήσιμη.

Απόδειξη Για την οικογένεια $\mathcal{S}$ έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{E}$ και $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{F}$, διότι f συνεχής. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 5.3. $\square$

Θεώρημα 5.10 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Τότε,

- (i). Για $A \subset \Omega$, η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.
- (ii). Αν $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη, τότε η $g(f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη Θα δείξουμε μόνο το (i).

Αν $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε,

$$(\mathbf{1}_A)(B) = \begin{cases} \emptyset & , \text{αν } 0, 1 \notin B \\ \Omega \setminus A & , \text{αν } 0 \in B, 1 \notin B \\ A & , \text{αν } 0 \notin B, 1 \in B \\ \Omega & , \text{αν } 0, 1 \in B \end{cases} \quad (**)$$

Αν $\mathbf{1}_A$ μετρήσιμη, τότε, για $B = \{1\}$, $(\mathbf{1}_A)(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε από την (**) έχουμε $(\mathbf{1}_A)(B) \in \mathcal{F}$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Ορισμός 5.11 Μία συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο.

Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση είναι $a_1, a_2, \dots, a_n$, και θέσουμε $A_i := X^{-1}(\{a_i\})$ τότε η $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ είναι μια διαμέριση του Ω , και η f γράφεται

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Προφανώς μία απλή f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι μετρήσιμα.

Πρόταση 5.12 Έστω $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία¹ $(f_n)_{n \geq 1}$ μη αρνητικών, απλών, μετρησίμων συναρτήσεων ώστε $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ κατά σημείο.

Απόδειξη Για $n \geq 1$, θέτουμε

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & , \text{αν } f(\omega) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \text{ με } k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n & , \text{αν } f(\omega) \geq n \end{cases}.$$

Κάθε f_n είναι μη αρνητική, μετρήσιμη, και απλή αφού το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο, και παίρνει την τιμή $k/2^n$, όπου $0 \leq k \leq n2^n - 1$, στο μετρήσιμο σύνολο $f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))$, και την τιμή n στο $f^{-1}([n, \infty])$.

Τώρα, αν $f(\omega) < \infty$, έχουμε $f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$, άρα $|f_n(\omega) - f(\omega)| < 2^{-n}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n \rightarrow \infty$ για $n \rightarrow \infty$.

Για το ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, παρατηρούμε τα εξής:

¹ Δηλαδή $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \geq 1$.

- Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n$ που είναι αύξουσα ακολουθία.
- Αν $f(\omega) < \infty$, έστω $n \geq 1$, θα δείξουμε ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις,

- (α) $f(\omega) < n$.
 (β) $f(\omega) \in [n, n+1)$.
 (γ) $f(\omega) \geq n+1$.

Για το (α) παρατηρούμε ότι το $f_n(\omega)$ θα ισούται με το αριστερό άκρο του διαστήματος $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Για τον καθορισμό του $f_{n+1}(\omega)$, χωρίζουμε το $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ σε δύο μισά, τα

$$\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right), \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$$

και το $f_{n+1}(\omega)$ ισούται με το αριστερό άκρο του μισού στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Άρα είναι τουλάχιστον $k2^{-n} = f_n(\omega)$. Οι περιπτώσεις (β) και (γ) αφηγούνται ως άσκηση. $\square$

5.2 Παραγόμενη σ-άλγεβρα από μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 5.13 Έστω Ω σύνολο. Για μία συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$, παραγόμενη σ-άλγεβρα από την f ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Το ότι αυτό το σύνολο είναι σ-άλγεβρα το έχουμε δει στην Άσκηση 1.7 (β). Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο Ω η οποία κάνει την f μετρήσιμη στον $(\Omega, \sigma(f))$. Βέβαια αν η f είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα έχουμε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.14 Παίρνουμε $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+}$. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο ως το δειγματικό χώρο για μία ακολουθία ρίψεων ενός νομίσματος. Το -1 παριστά το αποτέλεσμα “Κορώνα” και το 1 το αποτέλεσμα “Γράμματα”. Για $n \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε την συνάρτηση $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$X_n(\omega) = \begin{cases} -1 & , \text{αν } \omega_n = -1 \\ 1 & , \text{αν } \omega_n = 1 \end{cases},$$

όπου $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$. Η X_n παίρνει μόνο δύο τιμές. Οπότε η $\sigma(X_n)$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{\emptyset, \Omega, A_{n,-1}, A_{n,1}\}$ με

$$A_{n,-1} := X_n^{-1}(\{-1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = -1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{-1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]},$$

$$A_{n,1} := X_n^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]},$$

όπου $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

Ορισμός 5.15 Έστω Ω σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ οικογένεια συναρτήσεων στο Ω , με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, παραγόμενη σ-άλγεβρα από τις συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(f_i)\right).$$

Το σύνολο στο δεξί μέλος έχει οριστεί στην Παράγραφο 1.2. Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες.

Παράδειγμα 5.16 Συνεχίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα. Θα περιγράψουμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$. Για δεδομένη ακολουθία $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$ θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned} A_s &:= \{(s_1, s_2, \dots, s_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) : x_i \in \{-1, 1\} \text{ για κάθε } i \geq n+1\} \\ &= X_1^{-1}(\{s_1\}) \cap X_2^{-1}(\{s_2\}) \cap \dots \cap X_n^{-1}(\{s_n\}). \end{aligned}$$

Δηλαδή το A_s περιέχει όλες τις άπειρες ακολουθίες από -1 και 1 που το αρχικό τους τμήμα είναι το s και μετά είναι ελεύθερες να έχουν ότι θέλουν. Για μιά ακολουθία που ανήκει στο A_s , η συμπεριφορά της ως τον χρόνο n είναι γνωστή.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η $\mathcal{F}_n$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την διαμέριση $\mathcal{C} := \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n\}$ του Ω .

Από τον ορισμό της, η $\mathcal{F}_n$ πρέπει να περιέχει τα $X_i^{-1}(\{s_i\})$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και το A_s , που είναι πεπερασμένη τομή των $X_i^{-1}(\{s_i\})$. Επομένως $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_n$. Από την άλλη, κάθε X_i με $1 \leq i \leq n$ είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma(\mathcal{C})$. Για παράδειγμα,

$$X_i^{-1}(\{1\}) = \bigcup \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n \text{ με } s_i = 1\}$$

είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\sigma(\mathcal{C})$, άρα στοιχείο της. Από την ελαχιστότητα της $\mathcal{F}_n$, έπεται ότι $\mathcal{F}_n \subset \sigma(\mathcal{C})$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Ασκήσεις

- 5.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Να δείξετε ότι για μία $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
 - (α) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
 - (β) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό σύνολο.
 - (γ) $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$, για κάθε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς.
- 5.2 Έστω Ω τοπολογικός χώρος και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Να δείξετε ότι η f είναι Borel-μετρήσιμη.
- 5.3 Έστω $X : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}$.
- 5.4 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας. Να δείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$:
 - (α) $\{\lim_n X_n = -\infty\}, \{\lim_n X_n = \infty\}$.
 - (β) $\{\lim_n X_n \text{ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός}\}$.
- 5.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Αν $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες, να δείξετε ότι το $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμο.

Ολοκλήρωση

6.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Βήμα 1: Πρώτα θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα για μη αρνητικές, απλές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός 6.1 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση, $f \geq 0$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ και συμβολίζουμε με $\int f d\mu$, ως εξής:

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i),$$

όταν $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ σε κανονική μορφή, με τη σύμβαση ότι $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Παρατήρηση 6.2 Το ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης f δεν εξαρτάται από τη μορφή στην οποία γράφεται αυτή. Αν $f = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j}$, όπου $b_j \geq 0$, για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, και $(B_j)_{j=1}^m$ ξένα ανά δύο, τότε ισχύει ότι $\int f d\mu = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\bigcup_{j=1}^m B_j = X$.

Αν αυτό δεν ισχύει, θέτουμε $B_{m+1} = X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j$ και $b_{m+1} = 0$ και έτσι έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Έστω ότι η f σε κανονική μορφή γράφεται ως $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Εύκολα βλέπουμε ότι αν $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, τότε $a_i = b_j$. Επιπλέον, $A_i = \bigcup_{j=1}^m (A_i \cap B_j)$ και $B_j = \bigcup_{i=1}^n (B_j \cap A_i)$. Έτσι έχουμε,

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j). \end{aligned}$$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue για απλές, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 6.3 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,

- (i). $\int a f \, d\mu = a \int f \, d\mu$, για $a \geq 0$.
- (ii). $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
- (iii). Αν $f \leq g$, τότε $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Βήμα 2: Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Από την Πρόταση 5.12, κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι όριο μιας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων. Επιπλέον, η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα. Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6.4 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu : s \text{ απλή, } 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Παρατήρηση 6.5 Ο Ορισμός 6.4, στην περίπτωση όπου η f είναι απλή, συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1. Επιπλέον, για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες της Πρότασης 6.3. Οι (i) και (iii) προκύπτουν εύκολα από τον Ορισμό 6.4. Για την (ii) είναι απαραίτητη η χρήση του επόμενου θεωρήματος, ένα από τα βασικότερα θεωρήματα σύγκλισης στη Θεωρία Μέτρου, του οποίου η απόδειξη είναι απαιτητική και για το λόγο αυτό παραλείπεται.

Θεώρημα 6.6 (Μονότονης σύγκλισης του Lebesgue) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αύξουσα ακολουθία μετρίσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Τότε, $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$.

Βήμα 3: Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα για μετρήσιμες συναρτήσεις, όχι απαραίτητα μη αρνητικές.

Ορισμός 6.7 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

εφόσον δεν υπάρχει απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f είναι (Lebesgue) ολοκληρώσιμη. Διαφορετικά λέμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Παρατήρηση 6.8 Τα $\int f^+ \, d\mu$ και $\int f^- \, d\mu$ ορίζονται από το Βήμα 2 (Ορισμός 6.4). Το ολοκλήρωμα μίας μετρήσιμης συνάρτησης, όταν αυτό ορίζεται, παίρνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι μία μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f \, d\mu < \infty$ αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Παρατήρηση 6.9 Για ολοκληρώσιμες μετρήσιμες συναρτήσεις, με πεπερασμένο ολοκλήρωμα, ισχύουν πάλι οι αντίστοιχες ιδιότητες (i), (ii) και (iii) της Πρότασης 6.3. Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση.

Παρακάτω, δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε υποσύνολα.

Ορισμός 6.10 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ μετρήσιμος χώρος, $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, ολοκληρώσιμη, και $A \subset X$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα (Lebesgue) της f ως προς το μέτρο μ στο A ως εξής:

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Παρατήρηση 6.11 Στον Ορισμό 6.10, αν $A = X$, το $\int_X f \, d\mu$ είναι το ολοκλήρωμα της f στον Ορισμό 6.7. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι αν $A \subset B$ ισχύει ότι $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

Παρατήρηση 6.12 Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ το ολοκλήρωμα μίας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ το λέμε μέση τιμή της X και αντί του $\int X \, d\mathbf{P}$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{E}(X)$.

Συνοψίζουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.13 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$ της X ορίζεται,

$$\mathbf{E}(X) := \int X \, d\mathbf{P}.$$

Παρατήρηση 6.14 Αντίστοιχα, αν $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε τη μέση τιμή της X πάνω στο A ως $\mathbf{E}(X \mathbf{1}_A)$ και συμβολίζουμε με $\mathbf{E}(X; A)$, εφόσον η $\mathbf{E}(X \mathbf{1}_A)$ μπορεί να οριστεί.

Δύο ειδικές περιπτώσεις μέσης τιμής είναι οι εξής:

- (i). Αν η X ισούται με μία σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbf{E}(X) = c$ γιατί η X είναι απλή.
- (ii). Αν $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)$.

Το (ii) σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της μέσης τιμής που θα δούμε παρακάτω είναι πολύ χρήσιμη (Ασκήσεις 6.1 -6.3, 6.6).

Όπως και με τις μετρήσιμες συναρτήσεις, για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 6.15 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X, Y : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές, και $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

- (i). $\mathbf{E}(aX) = a \mathbf{E}(X)$.
- (ii). $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E} X + \mathbf{E} Y$.
- (iii). Αν $X \leq Y$, τότε $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

Στην περίπτωση ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή η Πρόταση 6.15 παίρνει την εξής γενικότερη μορφή:

Πρόταση 6.16 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X, Y : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X|, \mathbf{E}|Y| < \infty$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

- (i). $\mathbf{E}(aX) = a \mathbf{E}(X)$.
- (ii). $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E} X + \mathbf{E} Y$.
- (iii). Αν $X \leq Y$, τότε $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

Παρατήρηση 6.17 Σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, λέμε ότι μία ιδιότητα Ψ ισχύει σχεδόν παντού αν $\mu(\{x \in X : \eta \Psi \text{ δεν ισχύει}\}) = 0$. Αντίστοιχα, σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, λέμε ότι η Ψ ισχύει με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια.

Πρόταση 6.18 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ μερήσιμες συναρτήσεις. Τότε,

$$(i). \text{ Αν } \mu(\{f \neq g\}) = 0, \text{ τότε } \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

$$(ii). \int f \, d\mu = 0 \text{ αν και μόνο αν } \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

$$(iii). \text{ Αν } \int f \, d\mu < \infty, \text{ τότε } \mu(f = \infty) = 0.$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο το (ii). Τα (i) και (iii) αποδεικνύονται όμοια.

$\Rightarrow$ Έστω ότι $\int f \, d\mu = 0$. Θέτουμε $A_n = \{f \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu = \int f \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \geq \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα $\mu(A_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, $\{f > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ και $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0$. Συνεπώς,

$$\mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

$\Leftarrow$ Έστω ότι $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$. Τότε,

$$\int f \, d\mu = \int_{\{f=0\}} f \, d\mu + \int_{\{f \neq 0\}} f \, d\mu = \int_{\{f=0\}} f \, d\mu = 0.$$

□

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, η Πρόταση 6.18 παίρνει την εξής μορφή:

Πρόταση 6.19 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε,

$$(i). \text{ Αν } \mathbf{P}(X = Y) = 1, \text{ τότε } \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y).$$

$$(ii). \mathbf{E}(X) = 0 \text{ αν και μόνο αν } \mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

$$(iii). \text{ Αν } \mathbf{E}(X) < \infty, \text{ τότε } \mathbf{P}(X = \infty) = 0.$$

Παρατήρηση 6.20 Γενικότερα, για ολοκληρώσιμες μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και πεπερασμένο ολοκλήρωμα, ισχύουν οι ιδιότητες (i) και (ii) της Πρότασης 6.18. Τέλος, για τέτοιες συναρτήσεις, η ιδιότητα (iii) της Πρότασης 6.18 μας λέει ότι αυτές παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού (άσκηση).

Παρακάτω δίνεται χωρίς απόδειξη μία χρήσιμη ιδιότητα του ολοκληρώματος Lebesgue.

Πρόταση 6.21 (Ανισότητα Jensen) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, $\mu \in \int |f| \, d\mu < \infty$, και $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mu(\{f \in I\}) = 1$ και $\int |\Phi(f)| \, d\mu < \infty$. Τότε,

$$\Phi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \Phi(f) \, d\mu.$$

Ορισμός 6.22 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Ορίζουμε τη διασπορά $\mathbf{Var}(X)$ της X ως εξής:

$$\mathbf{Var}(X) := \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2).$$

Παρατήρηση 6.23 Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$, όπως έχουμε ήδη σημειώσει (Παρατήρηση 6.8), είναι πραγματικός αριθμός λόγω της $\mathbf{E}|X| < \infty$. Η διασπορά, όμως, ενδέχεται να παίρνει την τιμή ∞ . Ένας άλλος χρήσιμος τύπος για τη διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής είναι, $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$. Έτσι βλέπουμε ότι αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $\mathbf{Var}(X) < \infty$.

Τέλος, δίνουμε δύο σημαντικές ανισότητες διατυπωμένες στη γλώσσα των πιθανοτήτων. Αντίστοιχες ισχύουν και στην περίπτωση μετρήσιμων συναρτήσεων σε τυχόντα χώρο μέτρου.

Πρόταση 6.24 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i). (Ανισότητα Markov) Αν $X : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή τότε,

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}, \quad \forall a > 0.$$

(ii). (Ανισότητα Chebyshev) Αν $X : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή, με $\mathbf{E}|X| < \infty$, τότε,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}, \quad \forall a > 0.$$

Απόδειξη (i) Χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της μέσης τιμής. Έχουμε $X \geq a \mathbf{1}_{X \geq a}$. Άρα,

$$\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(a \mathbf{1}_{X \geq a}) = a \mathbf{P}(X \geq a).$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) στην τυχαία μεταβλητή $|X - \mathbf{E}(X)|^2$. Τότε,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbf{E}\{|X - \mathbf{E}(X)|^2\}}{a^2} = \frac{\mathbf{Var}(X)}{a^2}$$

□

6.2 Οι χώροι L^p

Ορισμός 6.25 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή και $p \in [1, \infty)$. Ορίζουμε

$$\|X\|_p := (\mathbf{E}(|X|^p))^{1/p}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) := \{X : X \text{ τυχαία μεταβλητή στο } \Omega \text{ και } \|X\|_p < \infty\}.$$

Όταν είναι σαφές ποιός είναι ο χώρος Ω και ποιά η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}$, θα γράφουμε $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ αντί $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Παρατήρηση 6.26 Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \rightarrow [0, \infty)$, ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i). $\|\lambda X\|_p = |\lambda| \|X\|_p$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii). $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(P)$ είναι διανυσματικός χώρος. Όμως, η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$ δεν είναι νόρμα διότι δεν ικανοποιεί την ιδιότητα " $\|X\|_p = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ ", εφόσον μία τυχαία μεταβλητή X ενδέχεται να μην είναι μηδενική αλλά να ισούται με 0 με πιθανότητα 1, δηλαδή $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, και επομένως $\|X\|_p = 0$. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να ορίσουμε στον $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ την εξής σχέση ισοδυναμίας:

$$X \sim Y \text{ αν } \mathbf{P}(X = Y) = 1,$$

δηλαδή ταυτίζουμε δύο τυχαίες μεταβλητές αν είναι ίσες με πιθανότητα 1. Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας το συμβολίζουμε με $L^p(\mathbf{P})$.

Σχεδόν ότι συνάρτηση έχουμε ορίσει στον $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ μπορούμε να ορίσουμε και στον $L^p(\mathbf{P})$. Πώς; Μέσω ενός αντιπροσώπου. Ας το δούμε για τη συνάρτηση $\|\cdot\|_p$.

Έστω $H \in L^p(\mathbf{P})$ και X ένα στοιχείο της κλάσης αυτής (το στοιχείο αυτό το λέμε *εκδοχή* της H). Ορίζουμε, $\|H\|_p := \|X\|_p$. Ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου X γιατί αν Y είναι ένας άλλος αντιπρόσωπος, τότε, με βάση το (i) της Πρότασης 6.18, θα έχουμε $\|X\|_p = \|Y\|_p$.

Για μετροθεωρητικές υποθέσεις, δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι ίσες με πιθανότητα 1 τις θεωρούμε ως ταυτόσημα αντικείμενα. Έτσι, και τον χώρο $L^p(\mathbf{P})$ τον βλέπουμε ως χώρο τυχαίων μεταβλητών και όχι ως χώρο κλάσεων ισοδυναμίας.

Τώρα η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$ ορισμένη στον $L^p(\mathbf{P})$ είναι νόρμα γιατί, για μία $X \in L^p(\mathbf{P})$, η $\|X\|_p = 0$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, άρα η κλάση της X είναι η κλάση της μηδενικής συνάρτησης. Αυτή η κλάση είναι το 0 του διανυσματικού χώρου $L^p(\mathbf{P})$.

Πρόταση 6.27 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε,

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Απόδειξη Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$0 \leq \mathbf{E}((\lambda X + Y)^2) = \lambda^2 \mathbf{E}(X^2) + 2\lambda \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(Y^2). \quad (*)$$

Η διακρίνουσα της τετραγωνικής εξίσωσης ως προς λ στην (*) είναι

$$4\mathbf{E}(XY)^2 - 4\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2),$$

και εφόσον η εξίσωση είναι μη αρνητική, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \mathbf{E}(X^2)^{1/2} \mathbf{E}(Y^2)^{1/2},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. $\square$

Γενικότερη της Cauchy-Schwarz είναι η ανισότητα Hölder. Διατυπώνεται, χωρίς απόδειξη, στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.28 (Ανισότητα Hölder) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές και $p, q \in (1, \infty)$ έτσι ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε,

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Πρόταση 6.29 Αν X τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $1 \leq r < s$ ισχύει ότι,

$$\|X\|_r \leq \|X\|_s.$$

Απόδειξη Είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder όπου την θέση της X έχει η $|X|^r$, την θέση της Y έχει η σταθερή συνάρτηση 1 και $p = s/r$, $q = s/(s - r)$. Τότε,

$$\mathbf{E}|X|^r = \mathbf{E}(|X|^r 1) \leq \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s} (\mathbf{E}(1^q))^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s},$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 6.30 Η Πρόταση 6.29 μας λέει ότι αν $1 \leq r < s$ τότε, $L^s(\mathbf{P}) \subset L^r(\mathbf{P})$. Ο εγκλεισμός αυτός όμως έπεται και πιο εύκολα παρατηρώντας ότι $|X|^r \leq |X|^s + 1$ (το 1 καλύπτει την περίπτωση που $|X(\omega)| < 1$).

Γνωρίζουμε ότι κάθε νόρμα σε ένα διανυσματικό χώρο ορίζει μία μετρική. Έτσι, και η νόρμα $\|\cdot\|_p$ ορίζει μία μετρική d_p στον χώρο $L^p(\mathbf{P})$. Ισχύει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα 6.31 Ο μετρικός χώρος $(L^p(\mathbf{P}), d_p)$ είναι πλήρης.

Όταν είναι σαφές ποιό είναι το μέτρο $\mathbf{P}$, τότε γράφουμε L^p αντί $L^p(\mathbf{P})$.

6.3 Τα βασικά οριακά θεωρήματα

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνονται τα βασικότερα θεωρήματα σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Lebesgue. Ήδη έχουμε δει ένα από αυτά (Θεώρημα 6.6). Οι περισσότερες από τις αποδείξεις των θεωρημάτων αυτής της παραγράφου θεωρούνται απαιτητικές και για το λόγο αυτό παραλείπονται.

Θεώρημα 6.32 (Λήμμα Fatou) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Θεώρημα 6.33 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $|f_n| \leq g$, όπου $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική, με $\int g \, d\mu < \infty$. Τότε,

$$\int |f| \, d\mu < \infty \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Μία εφαρμογή του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης σε χώρους πεπερασμένου μέτρου είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.34 (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ και $f_n \leq M$, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε,

$$\int |f| \, d\mu < \infty \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$, όπου το μέτρο $\mathbf{P}$ έχει πυκνότητα $f(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε,

$$X_n(x) = n \mathbf{1}_{(0,1/n)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η X_n είναι απλή τυχαία μεταβλητή και $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) = \mathbf{E}(0) = 0$$

και

$$\mathbf{E}(X_n) = n \mathbf{P}((0, 1/n)) = n \frac{1}{n} = 1.$$

Άρα, $\mathbf{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n)$. Δηλαδή έχουμε γνήσια ανισότητα στο Λήμμα Fatou και το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν εφαρμόζεται.

Δεδομένου του ότι μία σειρά είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων της και ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό, τα παραπάνω θεωρήματα δίνουν το εξής πορίσμα:

Πόρισμα 6.35 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n \geq 1}$, $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.

(i). (Θεώρημα Beppo-Levi) Αν f_n μη αρνητική, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu. \quad (*)$$

(ii). Αν οι f_n παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}$, ισχύει η $(*)$ και τα δύο μέλη της είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη (i). Θέτουμε $g_k = \sum_{n=1}^k f_n$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε η $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνη-

τικών συναρτήσεων και αν $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ισχύει ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g$. Επίσης, $\int g_k d\mu = \sum_{n=1}^k \int f_n d\mu$, λόγω γραμμικότητας. Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα μοτοτόνης σύγκλισης (Θεώρημα 6.6).

(ii). Εφαρμόζουμε το (i) για την ακολουθία $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu. \quad (**)$$

Όμως,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$$

και από υπόθεση η $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.33), έχουμε ότι,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

και από την $(**)$ και την Πρόταση 6.19 (iii), ισχύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού. □

Παρατήρηση 6.36 Οι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ συγκλίνουν, με ενδεχόμενη τιμή το ∞ , γιατί είναι σειρές μη αρνητικών όρων.

Παράδειγμα 6.37 (Ορισμός μέτρου μέσω πυκνότητας) Έστω $X \geq 0$ τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{E}(X; A) = \int_A X d\mathbf{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

είναι μέτρο. Επιπλέον, για $A \in \mathcal{F}$, ισχύει ότι αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{Q}(A) = 0$.

Πράγματι, η $\mathbf{Q}$ είναι μη αρνητική και $\mathbf{Q}(\emptyset) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{\emptyset}) = \mathbf{E}(0) = 0$. Έπειτα, για $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$, παρατηρούμε ότι $\mathbf{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$, συνεπώς

$$\mathbf{Q}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbf{E}\left(X \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q}(A_n).$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Beppo-Levi (Πόρισμα 6.35 (i)). Τέλος, αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{P}(X\mathbf{1}_A = 0) = 1$ και από την Πρόταση 6.19 (ii) έχουμε ότι $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_A) = 0$.

Παρατήρηση 6.38 Η τυχαία μεταβλητή X στο Παράδειγμα 6.37 καλείται πυκνότητα του $\mathbf{Q}$ ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$. Αν επιπλέον $\mathbf{E}(X) = 1$, το $\mathbf{Q}$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και η X καλείται **παράγωγος Radon-Nikodym** του $\mathbf{Q}$ ως προς $\mathbf{P}$.

6.4 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 6.39 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \rightarrow E$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ στον E με

$$\mathbf{P}^X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in B),$$

λέγεται κατανομή της X .

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι το $\mathbf{P}^X$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{E})$. Το $\mathbf{P}^X$ λέγεται, επίσης, και εικόνα του $\mathbf{P}$ μέσω της X .

Παρατήρηση 6.40 Αν $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, η κατανομή $\mathbf{P}^X$ της X είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Η συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ του $\mathbf{P}^X$, με $\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}^X((-\infty, t]) = \mathbf{P}(X \leq t)$, λέγεται και συνάρτηση κατανομής της X . Αν επιπλέον το $\mathbf{P}^X$ προκύπτει από πυκνότητα, έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται και πυκνότητα της X .

Πρόταση 6.41 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(E, \mathcal{E})$ και X τυχαία μεταβλητή όπως στον Ορισμό 6.22. Έστω $\mathbf{P}^X$ η κατανομή της X και $h : E \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h) \left(= \int h \, d\mathbf{P}^X \right). \quad (*)$$

Επίσης, αν $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη, ή και τα δύο μέλη της $(*)$ ορίζονται και είναι ίσα ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Το αριστερό μέλος της $(*)$ είναι η μέση τιμή της $h \circ X$ στο Ω ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ και το δεξί μέλος της $(*)$ είναι η μέση τιμή της h στο E ως προς το μέτρο $\mathbf{P}^X$.

Απόδειξη Θα το δείξουμε πρώτα για απλές συναρτήσεις. Αν $h = \mathbf{1}_A$, με $A \in \mathcal{E}$, τότε $h(X(\omega)) = \mathbf{1}_{\{\omega : X(\omega) \in A\}}$. Δηλαδή,

$$h(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}, \text{ με } X^{-1}(A) \in \mathcal{F}.$$

Έχουμε, λοιπόν,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_A),$$

άρα η $(*)$ ισχύει.

Αν η h είναι απλή, τότε $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, με $a_i \in \mathbb{R}$ και $A_i \in \mathcal{E}$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X)\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_{A_i}(X)) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_{A_i}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\right) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε, από την Πρόταση 5.12, υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x)$, για κάθε $x \in \mathcal{E}$. Τότε, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(X(\omega)) = h(X(\omega))$, για κάθε $\omega \in \Omega$, και από τα προηγούμενα

$$\mathbf{E}(h_n(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για $n \rightarrow \infty$, από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.6), έχουμε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h_n(X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Τέλος, αν h μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $h = h^+ - h^-$ και από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+), \\ \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) &= \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-). \end{aligned}$$

Αν το αριστερό μέλος της (*) δεν ορίζεται τότε,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \infty,$$

άρα

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-) = \infty.$$

Αν το αριστερό μέλος της (*) ορίζεται τότε,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) < \infty \text{ και } \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) < \infty,$$

συνεπώς

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h),$$

δηλαδή και το δεξί μέλος ορίζεται και ισούται με το αριστερό. $\square$

Η Πρόταση 6.41 μας ενδιαφέρει κυρίως στην περίπτωση όπου $E = \mathbb{R}$. Η διατύπωσή της απαιτεί τους παρακάτω ορισμούς, οι οποίοι αποτελούν γενίκευση της πυκνότητας, ως προς το ολοκλήρωμα Riemann (Παράδειγμα 4.18), ενός μέτρου πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 6.42 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ το μέτρο Lebesgue (Παράδειγμα 2.4) και $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Η f καλείται πυκνότητα του $\mathbf{P}$ αν,

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x) d\lambda, \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Παρατήρηση 6.43 Το ολοκλήρωμα Lebesgue στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ μίας Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως ως $\int f(x) dx$ και στην περίπτωση όπου η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann (Δες σχετική βιβλιογραφία).

Ορισμός 6.44 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή και $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι μία πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής X αν είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της X .

Παρατήρηση 6.45 Εύκολα βλέπει κανείς ότι δύο Borel μετρήσιμες συναρτήσεις f_1, f_2 είναι πυκνότητες για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$ (αφήνεται ως άσκηση).

Επιστρέφουμε στη ειδική περίπτωση της Πρότασης 6.41 όπου $E = \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.46 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή τότε,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h) = \int h(x)f(x) dx,$$

αν $h \geq 0$ ή $\mathbf{E}(|h(X)|) < \infty$.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι $\int h d\mathbf{P}^X = \int h(x)f(x) dx$, εφόσον η πρώτη ισότητα έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 6.41. Θα ακολουθήσουμε την ίδια μέθοδο με την απόδειξη της Πρότασης 6.41.

Πρώτα θα το δείξουμε για απλές. Αν $h = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τότε,

$$\int h d\mathbf{P}^X = \int \mathbf{1}_A d\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx = \int \mathbf{1}_A(x)f(x) dx = \int h(x)f(x) dx.$$

Αν h απλή, τότε λόγω γραμμικότητας και από τα προηγούμενα προκύπτει το ζητούμενο.

Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$. Άρα, σε συνδιασμό με το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.6), έχουμε

$$\int h d\mathbf{P}^X = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mathbf{P}^X = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(x)f(x) dx = \int h(x)f(x) dx.$$

Τέλος, αν h μετρήσιμη, τότε $h = h^+ - h^-$ και από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int h^+ d\mathbf{P}^X &= \int h^+(x)f(x) dx \text{ και} \\ \int h^- d\mathbf{P}^X &= \int h^-(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int h d\mathbf{P}^X = \int h^+ d\mathbf{P}^X - \int h^- d\mathbf{P}^X = \int h^+(x)f(x) dx - \int h^-(x)f(x) dx = \int h(x)f(x) dx.$$

□

Παράδειγμα 6.47 Έστω $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\mathbf{E}(X)$ δεν ορίζεται. Πράγματι, από την Πρόταση 6.46, για τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $h(a) = a^+$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X^+) &= \mathbf{E}(h(X)) = \int h(x)f(x) dx = \int x^+ f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{x}{1+x^2} dx \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Όμοια, $\mathbf{E}(X^-) = \infty$.

Ασκήσεις

6.1 (Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για πιθανότητες) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Τότε,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

6.2 Αν $n \geq 1$ και τα $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ικανοποιούν $\mathbf{P}(A_1) + \dots + \mathbf{P}(A_n) > k - 1$, για κάποιο θετικό ακέραιο k , τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ με $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) > 0$.

6.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Να δείξετε ότι,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}(X \geq k).$$

6.4 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δείξετε ότι,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{E}X \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq k).$$

6.5 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Να δείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

$$(\alpha) \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0\right) = 1.$$

$$(\beta) \mathbf{P}(\limsup_n A_n^\varepsilon) = 0, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$

6.6 Να αποδειχθεί το (i) της Πρότασης ;;

6.7 Να αποδειχθεί το (ii) της Πρότασης ;;

6.8 Έστω $X \in L^1(\mathbf{P})$ και $E_n := \{|X| \geq n\}$. Να δείξετε ότι,
 $n \mathbf{P}(E_n) \rightarrow 0$.

6.9 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X| > n) = 0.$$

6.10 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δείξετε ότι,

$$(\alpha) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}(X; X < \varepsilon) = 0.$$

$$(\beta) \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \mathbf{E}(X; X < M) = 0.$$

6.11 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, \mathbf{Q}$ όπως στο Παράδειγμα 6.37. Αν $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, να δείξετε ότι $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}(Y) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YX)$, για $Y \geq 0$ και για Y με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X) < \infty$.

Μέρος II

Πιθανότητες

Ανεξαρτησία

7.1 Ανεξαρτησία για οικογένειες και τυχαίες μεταβλητές

Στην παράγραφο αυτή δουλεύουμε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Ορισμός 7.1 Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-άλγεβρων έτσι ώστε $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, για κάθε $i \in I$. Οι $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ λέγονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο και $A_i \in \mathcal{F}_i$, για κάθε $i \in J$, ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i).$$

Ορισμός 7.2 Έστω $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$ μετρήσιμοι χώροι και $(X_i)_{i \in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών, με $X_i : \Omega \rightarrow E_i$, για κάθε $i \in I$. Οι $(X_i)_{i \in I}$ λέγονται **ανεξάρτητες** αν οι αντίστοιχες σ-άλγεβρες, $(\sigma(X_i))_{i \in I}$, είναι ανεξάρτητες.

Παρατήρηση 7.3 Ο Ορισμός 7.2, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1, απαιτεί

$$\mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, X_{i_n} \in A_{i_n}) = \mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}) \mathbf{P}(X_{i_2} \in A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(X_{i_n} \in A_{i_n}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και για κάθε επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$. Το ενδεχόμενο στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι μία συντομογραφία του ενδεχομένου $X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap X_{i_n}^{-1}(A_{i_n})$.

Θεώρημα 7.4 Έστω $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $X : \Omega \rightarrow E$, $Y : \Omega \rightarrow G$ τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε τη σχέση,

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A) \mathbf{P}(Y \in B). \quad (*)$$

Τα εξής είναι ισοδύναμα,

- (i). Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.
- (ii). Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $B \in \mathcal{G}$.
- (iii). Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$, όπου $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ οικογένειες κλειστές στις πεπερασμένες τομές με $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$, $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{G}$.

Παρατήρηση 7.5 Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.4 αφήνεται ως άσκηση. Σημαντική είναι η ισοδυναμία των (i) και (iii). Δηλαδή αρκεί να ελέγξουμε την $(*)$ για λιγότερα σύνολα ώστε να αποφανθούμε ανεξαρτησία.

Πόρισμα 7.6 Έστω $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε, οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}(X \leq x) \mathbf{P}(Y \leq y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη Στο Θεώρημα 7.4 παίρνουμε $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$ και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 7.7 Έστω X, Y όπως στη διατύπωση του Θεωρήματος 7.4. Τα εξής είναι ισοδύναμα,

- (i). Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

- (ii). Οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες, για κάθε $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}$.
 (iii). $\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(Y))$, για κάθε $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες μετρήσιμες ή μη αρνητικές και μετρήσιμες.
 (iv). Στην περίπτωση που οι E, G είναι τοπολογικοί χώροι και $\mathcal{E}, \mathcal{G}$ τα σύνολα Borel τους τότε, $\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(Y))$, για κάθε $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένες και συνεχείς.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $A, B \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(f(X) \in A, g(Y) \in B) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B))$$

και εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbf{P}(Y \in g^{-1}(B)).$$

Όμως,

$$\mathbf{P}(X \in f^{-1}(A))\mathbf{P}(Y \in g^{-1}(B)) = \mathbf{P}(f(X) \in A)\mathbf{P}(g(Y) \in B),$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Εφαρμόζουμε το (ii) για $f = \mathbf{1}_A$ και $g = \mathbf{1}_B$ και έτσι προκύπτει το (i).

(i) $\Rightarrow$ (iii) Θα το δείξουμε για $f, g \geq 0$, μετρήσιμες.

Αν $f = \mathbf{1}_A$ και $g = \mathbf{1}_B$, όπου $A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{G}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \in A}\mathbf{1}_{Y \in B}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}}) = \mathbf{P}(X \in A, Y \in B).$$

Όμως οι X, Y είναι ανεξάρτητες άρα,

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X \in A})\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y \in B})$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Αν f, g απλές τότε,

$$f = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{1}_{B_j},$$

σε κανονική μορφή, όπου $A_i \in \mathcal{E}, B_j \in \mathcal{G}$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathbf{1}_{A_i}(X) \mathbf{1}_{B_j}(Y)\right)$$

και λόγω γραμμικότητας,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i}(X))\mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_j}(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(Y)).$$

Αν $f, g \geq 0$, τότε υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων έτσι ώστε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = g.$$

Συνεπώς, από τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(r_n(X)s_n(Y)) = \mathbf{E}(r_n(X))\mathbf{E}(s_n(Y)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή οι ακολουθίες $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, για $n \rightarrow \infty$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\mathbf{E}(g(Y)).$$

Αν οι f, g είναι φραγμένες, τότε $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ και

$$\mathbf{E}(f(X)) < \infty, \quad \mathbf{E}(g(Y)) < \infty.$$

Λόγω γραμμικότητας της μέσης τιμής και από τα προηγούμενα προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Η ισοδυναμία των (i) και (iv) αφήνεται ως άσκηση. □

Πόρισμα 7.8 Έστω $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, μη αρνητικές ή φραγμένες. Τότε,

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Απόδειξη Αν $X, Y \geq 0$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.7 για

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x & , \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & , \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Αν X, Y φραγμένες, τότε υπάρχει σταθερά M έτσι ώστε $|X(\omega)|, |Y(\omega)| < M$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.7 για

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x & , \text{αν } |x| \leq M \\ 0 & , \text{αν } |x| > M \end{cases},$$

προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 7.9 Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο το πλήθος τυχαίες μεταβλητές. Η απόδειξη των αντίστοιχων αυτών ισχυρισμών γίνεται με ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα.

Παράδειγμα 7.10 Θεωρούμε το πείραμα δύο ρίψεων ενός νομίσματος που φέρνει κορόνα με πιθανότητα p . Εδώ, ο δειγματικός μας χώρος είναι ο $\Omega = \{K, \Gamma\} \times \{K, \Gamma\}$ και σ-άλγεβρα η $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$. Για $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$p_\omega = \begin{cases} p(1-p) & , \text{αν } \omega = (K, \Gamma) \text{ ή } (\Gamma, K) \\ p^2 & , \text{αν } \omega = (K, K) \\ (1-p)^2 & , \text{αν } \omega = (\Gamma, \Gamma) \end{cases}.$$

Έστω $\mathbf{P}$ το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(\omega) = p_\omega$. Έστω $E = \{K, \Gamma\}$ και $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \rightarrow E$, με $X((x, y)) = x$ και $Y((x, y)) = y$. Τότε, η X είναι η ένδειξη της πρώτης ρίψης και η Y η ένδειξη της δεύτερης. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η X, Y είναι ανεξάρτητες.

Πράγματι, θέλουμε για κάθε $A, B \in \mathcal{E}$ να ισχύει ότι $\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$.

- Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ ισχύει.
- Αν $A = \{K, \Gamma\}$, τότε $\{X \in A, Y \in B\} = \{Y \in B\}$. Άρα $\mathbf{P}(Y \in B) = 1\mathbf{P}(Y \in B)$ και η σχέση ισχύει.
- Όμοια αν $B = \{K, \Gamma\}$.

Τέλος, μένουν οι περιπτώσεις που τα A, B είναι μονοσύνολα. Για παράδειγμα, $A = \{K\}$ και $B = \{\Gamma\}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(X = K, Y = \Gamma) = \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (K, K)\} \cap \{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\}) = \mathbf{P}(\{K, \Gamma\}) = p(1-p).$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (K, K)\}) &= p(1-p) + pp \quad \text{και} \\ \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\}) &= p(1-p) + (1-p)^2.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε ότι,

$$\mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (K, K)\}) \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\}) = p(1-p)$$

και έτσι η σχέση επαληθεύεται πάλι.

Όμοια δουλεύουμε και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις όπου τα A, B είναι μονοσύνολα.

7.2 Χώροι γινόμενο

Έστω σύνολο δεικτών $I \neq \emptyset$ και $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$ χώρος πιθανότητας, για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο

$$\Omega = \prod_{i \in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i \in I} : \omega_i \in \Omega_i, \quad \forall i \in I\} = \{\omega : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i : \omega_i \in \omega_i, \quad \forall i \in I\}.$$

Ορισμός 7.11 Έστω χώρος γινόμενο Ω όπως προηγούμενος. Ένα $A \subset \Omega$ τέτοιο ώστε

$$A = \prod_{i \in I} A_i, \quad \text{όπου } A_i \in \mathcal{F}_i, \quad \forall i \in I,$$

και το σύνολο $J = \{i \in I : A_i \neq \Omega_i\}$ να είναι πεπερασμένο, καλείται **μετρήσιμος κύλινδρος**.

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο $\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}$ είναι άλγεβρα. Θέτουμε $\mathcal{F} = \sigma(\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\})$. Τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ τη συμβολίζουμε με

$$\otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

Για ένα μετρήσιμο κύλινδρο A όπως πριν, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}_i(A_i) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}_i(A_i)$$

εφόσον για $i \in I \setminus J$ έχουμε ότι $\mathbf{P}_i(A_i) = 1$. Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην άλγεβρα $\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}$.

Με χρήση του Θεωρήματος Καραθεοδωρή (Θεώρημα ;;) αποδυνκνείται ότι το $\mathbf{P}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}$.

Έχουμε λοιπόν ορίσει το χώρο γινόμενο $(\prod_{i \in I} \Omega_i, \otimes_{i \in I} \mathcal{F}_i, \mathbf{P})$ των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$.

Παράδειγμα 7.12 Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος άπειρες (αριθμήσιμες) φορές που φέρνει K με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Ας δούμε το χώρο πιθανότητας του πειράματος.

Για $i = 1, 2, 3, \dots$, η i -οστή ρίψη έχει χώρο πιθανότητας $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) = (\{K, \Gamma\}, \mathcal{P}(\{K, \Gamma\}), \mathbf{P}^p)$, όπου $\mathbf{P}^p$ το μέτρο με $\mathbf{P}^p(\{K\}) = p$ και $\mathbf{P}^p(\{\Gamma\}) = 1 - p$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα στις ρίψεις 2, 3 και 5 το αποτέλεσμα να είναι K, K, Γ . Το ενδεχόμενο είναι ο μετρήσιμος κύλινδρος

$$A = \{K, \Gamma\} \times \{K\} \times \{K\} \times \{K, \Gamma\} \times \{\Gamma\} \times \prod_{i \geq 6} \Omega_i.$$

Άρα,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_2(\{K\}) \mathbf{P}_3(\{K\}) \mathbf{P}_5(\{\Gamma\}) = p^2(1-p).$$

7.3 Κατασκευή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με δεδομένη κατανομή

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(E, \mathcal{E})$ χώρος μέτρου και $X : \Omega \rightarrow E$ τυχαία μεταβλητή, κατανομή της X λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X$ που ορίζεται στον $(E, \mathcal{E})$, με $\mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$, για κάθε $A \in \mathcal{E}$.

Έστω I σύνολο δεικτών και $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i \in I}$ οικογένεια χώρων πιθανότητας. Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τυχαίες μεταβλητές $X_i : \Omega \rightarrow E_i$ έτσι ώστε,

- (α) Η κατανομή της X_i να είναι η $\mathbf{P}_i$, για κάθε $i \in I$.
- (β) Οι $(X_i)_{i \in I}$ να είναι οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εύκολα ως εξής: Έστω $\Omega = \prod_{i \in I} E_i$ και $\mathcal{F} = \otimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$. Έστω $\mathbf{P}$ το μέτρο γινόμενο των $\mathbf{P}_i$, $i \in I$. Τότε, για κάθε $r \in I$, ορίζουμε $X_r : \Omega \rightarrow E_r$ τέτοια ώστε

$$X_r((\omega_i)_{i \in I}) = \omega_r,$$

δηλαδή η X_r είναι η προβολή στην r -συντεταγμένη.

Εύκολα βλέπουμε ότι η X_r είναι τυχαία μεταβλητή διότι, για $A \in E_r$, έχουμε

$$X_r^{-1}(A) = \prod_{i \in I} A_i, \text{ με } A_i = \begin{cases} \Omega, & \text{αν } i \neq r \\ A, & \text{αν } i = r \end{cases}.$$

Άρα $X_r^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ ως μετρήσιμος κύλινδρος.

Πρόταση 7.13 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i \in I}$ όπως πριν και $X_r : \Omega \rightarrow E_r$, $r \in I$, η r -προβολή. Τότε,

- (i). Η X_r έχει κατανομή $\mathbf{P}_r$.
- (ii). Οι $(X_r)_{r \in I}$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη (i) Έστω $A \in E_r$. Έχουμε,

$$\mathbf{P}^{X_r}(A) = \mathbf{P}(X_r^{-1}(A)) = \mathbf{P}\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \mathbf{P}_r(A),$$

γράφοντας το $X_r^{-1}(A)$ ως μετρήσιμο κύλινδρο όπως προηγουμένος.

Άρα, $\mathbf{P}^{X_r} = \mathbf{P}_r$.

(ii) Έστω $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset I$ και $B_{j_1} \in \mathcal{E}_{j_1}, B_{j_2} \in \mathcal{E}_{j_2}, \dots, B_{j_n} \in \mathcal{E}_{j_n}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\{X_{j_1} \in B_{j_1}\} \cap \{X_{j_2} \in B_{j_2}\} \cap \dots \cap \{X_{j_n} \in B_{j_n}\}) = \mathbf{P}\left(\prod_{i \in I} A_i\right),$$

όπου,

$$A_i = \begin{cases} \Omega_i, & \text{αν } i \in I \setminus J \\ A_i, & \text{αν } i \in J \end{cases}.$$

Από τον ορισμό του $\mathbf{P}$ έχουμε ότι,

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbf{P}(A_i) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}_{j_1}(B_{j_1}) \mathbf{P}_{j_2}(B_{j_2}) \dots \mathbf{P}_{j_n}(B_{j_n}).$$

Συνεπώς οι X_r , $r \in I$, είναι ανεξάρτητες.

□

7.4 Ολοκλήρωση σε χώρο γινόμενο

Θα μελετήσουμε την περίπτωση του γινομένου δύο χώρων πιθανότητας, $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$ και $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$.

Έστω $\Omega = E_1 \times E_2$ και $\mathcal{F} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{E}_1, B \in \mathcal{E}_2\})$. Έστω $\mathbf{P}$ το μέτρο γινόμενο των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$. Για $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(x, y) d\mathbf{P}(x, y)$.

Θα μας φανεί χρήσιμο το εξής απλό θεώρημα:

Θεώρημα 7.14 Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$ χώροι πιθανότητας και $f : E_1 \times E_2 \rightarrow [-\infty, \infty]$, $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 / \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,

- (i). Για $x \in E_1$, η συνάρτηση $y \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{E}_2 / \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.
- (ii). Για $y \in E_2$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{E}_1 / \mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση. Οι συναρτήσεις $x \mapsto f(x, y)$ και $y \mapsto f(x, y)$ λέγονται τομές της f .

Τέλος, διατυπώνουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου των οποίων η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα 7.15 (Tonelli) Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$ χώροι πιθανότητας, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ο χώρος γινόμενο και $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις

$$x \mapsto \int f(x, y) d\mathbf{P}_2(y), \quad y \mapsto \int f(x, y) d\mathbf{P}_1(x)$$

είναι $\mathcal{E}_2 / \mathcal{B}([0, \infty])$, $\mathcal{E}_1 / \mathcal{B}([0, \infty])$ μετρήσιμες, αντίστοιχα, και

$$\int f(x, y) d\mathbf{P}(x, y) = \int \left(\int f(x, y) d\mathbf{P}_2(y) \right) d\mathbf{P}_1(x) = \int \left(\int f(x, y) d\mathbf{P}_1(x) \right) d\mathbf{P}_2(y).$$

Θεώρημα 7.16 (Fubini) Έστω $(E_1, \mathcal{E}_1, \mathbf{P}_1)$, $(E_2, \mathcal{E}_2, \mathbf{P}_2)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως πριν και $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int |f(x, y)| d\mathbf{P}(x, y) < \infty$, τότε ισχύουν οι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 7.15 (Tonelli).

Ασκήσεις

- 7.1 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις. Να δείξετε ότι οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες.
- 7.2 Έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Αν για κάθε $A \in \mathcal{F}_1$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(A) = 0$ ή $\mathbf{P}(A) = 1$, να δείξετε ότι η $\mathcal{F}_1$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_2$.
- 7.3 Έστω $(q_k)_{k \geq 1}$ μιά αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ τέτοια ώστε,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x - q_n|}}.$$

Να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue των σημείων του $(0, 1)$ στα οποία η f απειρίζεται είναι 0, δηλαδή ότι η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

- 7.4 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_n \neq 0) = \frac{1}{n}$, για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1, για κάθε $\omega \in \Omega$, υπάρχει $n(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $X_n(\omega) = 0$, για κάθε $n \geq n(\omega)$. (Συνεπώς $X_n \rightarrow 0$, με πιθανότητα 1.)

Τα λήμματα Borel-Cantelli και ο νόμος 0-1 του Kolmogorov

8.1 Τα λήμματα Borel-Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\limsup_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\}.$$

Γράφουμε, επίσης, $\{A_n \text{ συμβαίνει για άπειρα } n\}$ (ή $\{A_n \text{ i.o. (infinitely often)}\}$).

Πρόταση 8.1 (1^ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0.$$

Απόδειξη Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Τότε,

$$\limsup_{n \geq 1} A_n = \{X = \infty\}$$

και

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty.$$

Εφόσον $\mathbf{E}(X) < \infty$ γνωρίζουμε ότι $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$, δηλαδή ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$. □

Παρατήρηση 8.2 Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, ανεξάρτητα ενδεχόμενα στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, τότε και τα $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.

Πρώτα παρατηρούμε ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα. Πράγματι, για $k \leq n$, έστω $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

- Αν $i_k < n$, τότε τα $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ είναι ανεξάρτητα από υπόθεση.
- Αν $i_k = n$ τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n^c) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}) \mathbf{P}(A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}) (1 - \mathbf{P}(A_n)) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_{k-1}}) \mathbf{P}(A_n^c) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_n}). \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε ανεξαρτησία. Επαγωγικά δείχνουμε ότι τα $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.

Πρόταση 8.3 (2ο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1.$$

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}((\limsup_{n \geq 1} A_n)^c) = 0$. Έχουμε ότι,

$$\mathbf{P}(\{\limsup_{n \geq 1} A_n\}^c) = \mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c),$$

εφόσον η ακολουθία $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι αύξουσα. Για δεδομένο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bigcap_{k=n}^m A_k^c) = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m \mathbf{P}(A_k^c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m (1 - \mathbf{P}(A_k)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^m e^{-\mathbf{P}(A_k)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\sum_{k=n}^m \mathbf{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)} \\ &= e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\mathbf{P}((\limsup_{n \geq 1} A_n)^c) = 0$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. $\square$

Παράδειγμα 8.4 Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος, άπειρες (αριθμήσιμες) φορές, που φέρνει κορώνα (K) με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(K \text{ έρχεται άπειρες φορές})$.

Ο χώρος πιθανότητας του πειράματος είναι ο χώρος γινόμενο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ των $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{K, \Gamma\}$ (Γ = το ενδεχόμενο “γράμματα”), $\mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$ και $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^{(p)}$ ($\mathbf{P}^{(p)}$ το μέτρο πιθανότητας με $\mathbf{P}^{(p)}(K) = p$). Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το ενδεχόμενο $A_n = \{\text{έρχεται } K \text{ στην } n \text{ ρίψη}\}$ και την τυχαία μεταβλητή $X_n : \Omega \rightarrow \{K, \Gamma\}$ ($\Omega = \{K, \Gamma\}^{\mathbb{N}}$), με $X_n(\omega) = \omega_n$ = το αποτέλεσμα της n ρίψης.

Γνωρίζουμε ότι οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και εφόσον $A_n = X_n^{-1}(\{K\})$ έχουμε ότι τα $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, $\mathbf{P}(A_n) = p$, άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty.$$

Από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1.$$

Συνεπώς, $\mathbf{P}(K \text{ έρχεται άπειρες φορές}) = 1$.

Παράδειγμα 8.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $X_n \in \{K, \Gamma\}$ και $\mathbf{P}(X_n = K) = \mathbf{P}(X_n = \Gamma) = \frac{1}{2}$. Οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μοντελοποιούν ακολουθία ρίψεων αμερόληπτου νομίσματος.

Θέτουμε $\mathcal{C}_n = \max\{m \geq 1 : X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+m-1}\}$. Για παράδειγμα αν έχουμε το αποτέλεσμα $(K, K, \Gamma, \Gamma, K, \Gamma, \Gamma, \Gamma, K, \dots)$ τότε, $\mathcal{C}_1 = 2$, $\mathcal{C}_5 = 1$ και $\mathcal{C}_6 = 3$. Θα δείξουμε ότι:

(α) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{C}_n}{\log_2 n} \leq 1$, με πιθανότητα 1.

(β) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n = 1$, με πιθανότητα 1.

(α) Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $B_\epsilon = \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{C}_n}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon \}$. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Έστω $A_n = \{ \frac{\mathcal{C}_n}{\log_2 n} > 1 + \epsilon \}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(\mathcal{C}_n > (1 + \epsilon) \log_2 n) \\ &= \mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \dots + X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K \text{ ή } G) \\ &= 2 \mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{[(1+\epsilon)\log_2 n]} \leq 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{(1+\epsilon)\log_2 n - 1} \\ &= \frac{4}{2^{(1+\epsilon)\log_2 n}} = \frac{4}{n^{1+\epsilon}}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$$

και από το 1^ο Λήμμα Borel-Cantelli

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0,$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}((\limsup_{n \geq 1} A_n)^c) = 1.$$

Έστω τώρα $\omega \in (\limsup_{n \geq 1} A_n)^c$. Τότε υπάρχει $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0(\omega)$ να ισχύει:

$$\frac{\mathcal{C}_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon,$$

άρα

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{C}_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\omega \in B_\epsilon$. Άρα $(\limsup_{n \geq 1} A_n)^c \subset B_\epsilon$, οπότε $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{C}_n}{\log_2 n} \leq 1 \right\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}.$$

Όμως,

$$\mathbf{P}(B_{\frac{1}{k}}) = 1, \quad \forall k \geq 1,$$

και από την Πρόταση ;;

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}\right) = 1.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{C}_n = \{1, 2, 3, \dots\}$. Άρα θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathbf{P}(\mathcal{C}_n = 1 \text{ άπειρες φορές}) = 1$. Έστω $B_n = \{X_{2n} = K, X_{2n+1} = \Gamma\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητα και ισχύει ότι $\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n) = \infty.$$

Από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} B_n) = 1,$$

όμως

$$\limsup_{n \geq 1} B_n \subset \{\mathcal{C}_n = 1 \text{ άπειρες φορές}\} = \{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n = 1\}.$$

Άρα $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n = 1$, με πιθανότητα 1.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X_i)_{i \in I}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, λέμε ότι αυτές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (independent identically distributed, i.i.d) αν είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^{X_j} = \mathbf{P}^{X_i}$, για κάθε $i, j \in I$.

Παράδειγμα 8.6 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \text{Exp}(1)$, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{x>0}$. Θα δείξουμε ότι,

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Για κάθε $n \geq 1$ και $r > 0$, θέτουμε $A_n^{(r)} = \{X_n \geq r \log n\}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(A_n^{(r)}) = \mathbf{P}(X_n \geq r \log n) = e^{-r \log n} = \frac{1}{n^r}.$$

Έστω $r > 1$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$$

και από το 1ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n^{(r)}) = 0,$$

άρα

$$\mathbf{P}(\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \geq r) = 0.$$

Συνεπώς, θέτοντας $C_r = \{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \geq r\}$, έχουμε ότι

$$\{\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} > 1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{1+\frac{1}{k}},$$

άρα $\mathbf{P}(\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} > 1) = 0$, εφόσον $\mathbf{P}(C_{1+\frac{1}{k}}) = 0$, για κάθε $k \geq 1$. Επομένως, $\mathbf{P}(\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1) = 1$.

Έστω $r = 1$. Τότε, εφόσον τα $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητα (οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες) και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n^{(1)}) = 1.$$

Συνεπώς, για $\omega \in \limsup_{n \geq 1} A_n^{(1)}$, ισχύει ότι $X_n(\omega) \geq \log_n$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \geq 1,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\mathbf{P}(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1) = 1$.

Από όλα τα παραπάνω το ζητούμενο είναι προφανές.

8.2 Ο νόμος 0-1 του Kolmogorov

Ορισμός 8.7 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ μετρήσιμοι χώροι. Ορίζουμε,

$$\sigma(\{X_i : i \in I\}) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right).$$

Επίσης, αν $I = \mathbb{N}$, ορίζουμε

$$\sigma(\{X_k : k \leq n\}) = \sigma(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$$

και

$$\sigma(\{X_k : k \geq n\}) = \sigma(\{X_n, X_{n+1}, \dots\}).$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η $\sigma(\{X_i : i \in I\})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο Ω έτσι ώστε η X_i να είναι $\mathcal{A}/E_i$ -μετρήσιμη, για κάθε $i \in I$ (άσκηση).

Ορισμός 8.8 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και έστω $\mathcal{C}_n = \sigma(\{X_k : k \geq n+1\})$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$. Ορίζουμε την τελική σ-άλγεβρα, $\mathcal{C}_\infty$, που παράγεται από τις $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

$$\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Παράδειγμα 8.9 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπως προηγουμένως, με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε τα σύνολα

(α) $A = \{\omega : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} X_k(\omega) \geq 1\}$ και

(β) $B = \{\omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \geq 0\}$

ανήκουν στην $\mathcal{C}_\infty$, ενώ τα σύνολα

(γ) $\Gamma = \{\omega : \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega) \leq 0\}$ και

(δ) $\Delta = \{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \leq 10\}$

δεν ανήκουν αναγκαστικά στην $\mathcal{C}_\infty$.

Πράγματι, για τα (a), (b) έχουμε ότι

$$A = \{\omega : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} X_k(\omega) \geq 1\} = \{\omega : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} X_{n+1+k}(\omega) \geq 1\} \in \mathcal{C}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

και

$$\begin{aligned} B &= \{\omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \geq 0\} \\ &= \{\omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m X_k(\omega) + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{\infty} X_k(\omega) \geq 0\} \\ &= \{\omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{\infty} X_k(\omega) \geq 0\} \in \mathcal{C}_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

εφόσον

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m X_k(\omega) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Άρα $A, B \in \mathcal{C}_\infty$.

Για τα (γ) και (δ) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις τα σύνολα Γ και Δ εξαρτώνται και από τις τιμές των $X_1, X_2, \dots$. Για παράδειγμα, στο (γ), αν $X_1 \leq 0$ και $X_n > 0$ για κάθε $n \geq 2$, τότε $\Gamma \notin \mathcal{C}_\infty$.

Θεώρημα 8.10 (Νόμος 0-1 του Kolmogorov) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $\mathcal{C}_\infty$ η τελική σ-άλγεβρά τους. Αν $C \in \mathcal{C}_\infty$ τότε, $\mathbf{P}(C) = 0$ ή 1 .

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. Έστω $\mathcal{D}_n = \sigma(\{X_k : k \leq n\})$. Από υπόθεση οι $\mathcal{D}_n$ και $\mathcal{C}_\infty$ είναι ανεξάρτητες, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, αν $A \in \mathcal{D}_n$ και $B \in \mathcal{C}_\infty$, έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B).$$

Έστω $B \in \mathcal{C}_\infty$. Τότε $B \in \mathcal{C}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, το B είναι ανεξάρτητο από κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{D}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα και από κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μονότονης

Κλάσης, το B είναι ανεξάρτητο από κάθε $A \in \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n)$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{C}_\infty \subset \mathcal{D}$ επομένως, αν $C \in \mathcal{C}_\infty$, τότε $C \in \mathcal{D}$. Δηλαδή το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του άρα $\mathbf{P}(C \cap C) = \mathbf{P}(C) \mathbf{P}(C)$. Έχουμε, λοιπόν, ότι $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}^2(C)$ από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 8.11 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, $\mathcal{C}_\infty$ -μετρήσιμη. Τότε η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 8.10 έχουμε ότι $\mathbf{P}((-\infty, x)) \in \{0, 1\}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εφόσον η X είναι $\mathcal{C}_\infty$ -μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$.

Για τη συνάρτηση κατανομής της X έχουμε ότι $\mathbf{F}(x) \in \{0, 1\}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, επειδή η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\mathbf{F}(-\infty) = 0$, $\mathbf{F}(\infty) = 1$ υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}.$$

$$\text{Συνεπώς } \mathbf{P}(X = c) = \mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(c^-) = 1.$$

$\square$

Παρατήρηση 8.12 Ισχύει γενικότερα ότι αν X τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα τέτοια ώστε η X να είναι $\mathcal{A}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -μετρήσιμη και $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$, για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1. Πράγματι, στην απόδειξη του Πορίσματος 8.11 ο ισχυρισμός αυτός αποδείχθηκε χωρίς τη χρήση της επιπλέον υπόθεσης ότι η X είναι $\mathcal{C}_\infty$ -μετρήσιμη.

Ασκήσεις

8.1 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, πραγματικών θετικών αριθμών, τέτοια ώστε $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{a_n} = 0) = 1$.

8.2 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι, για την τυχαία μεταβλητή $X^* = \sup_{n \geq 1} X_n$, ισχύει ότι $\mathbf{P}(X^* < \infty) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > M) < \infty$.

8.3 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim N(0, 1)$, για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} = 1. \quad (8.1)$$

8.4 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim U(0, 1)$ (Ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$), για κάθε $n \geq 1$. Αν $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, για κάθε $n \geq 1$, να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1. \quad (8.2)$$

8.5 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim \text{Exp}(1)$ (Εκθετική με παράμετρο 1), για κάθε $n \geq 1$. Αν $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, για κάθε $n \geq 1$, να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\log n} = 1. \quad (8.3)$$

8.6 Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{n} = 0$.
- (β) $\mathbf{E}|X_1| < \infty$.

8.7 Έστω $(A_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων με $\mathbf{P}(A_n) < 1$, για κάθε $n \geq 1$, και $\mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Να δείξετε

$$\text{ότι } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty.$$

Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

9.1 Νόμος των μεγάλων αριθμών

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Το Θεώρημα που ακολουθεί δεν αποτελεί την ισχυρότερη μορφή του. Όμως μπορεί να αποδειχθεί με όσα έχουν ήδη προηγηθεί όπως, επίσης, και μια ασθενέστερη μορφή του (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) (Άσκηση 9.1).

Θεώρημα 9.1 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\mathbf{E}((X_1)^2) < \infty$. Έστω $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ και $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu, \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Απόδειξη Έστω $\sigma^2 = \mathbf{Var}(X_1)$.

Πρώτα θα αποδείξουμε το ζητούμενο για $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη αρνητικές. Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $Y_n = \frac{S_n}{n} - \mu$. Τότε,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \mathbf{E}(S_n) - \mu = \frac{1}{n} n \mathbf{E}(X_1) - \mu = 0$$

και

$$\mathbf{E}((Y_n)^2) = \mathbf{Var}(Y_n) = \mathbf{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathbf{Var}(S_n).$$

Όμως,

$$\frac{1}{n^2} \mathbf{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} n \mathbf{Var}(X_1),$$

εφόσον οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες, επομένως

$$\mathbf{E}((Y_n)^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Τότε, για την υπακολουθία $(Y_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} (Y_{n^2})^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty.$$

Άρα, με πιθανότητα, $1 \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{n^2})^2 < \infty$, συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_{n^2} = 0$.

Έστω $k \geq 1$. Θέτουμε $n(k) = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Τότε,

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k)+1)^2} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2},$$

εφόσον $n(k) \leq \sqrt{k} \leq n(k) + 1$. Όμως, για $n \rightarrow \infty$, με πιθανότητα 1,

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k) + 1)^2} = \frac{S_{n(k)^2}}{n(k)^2} \left(\frac{n(k)}{n(k) + 1} \right)^2 \rightarrow \mu$$

και

$$\frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2} = \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{(n(k) + 1)^2} \left(\frac{n(k) + 1}{n(k)} \right)^2 \rightarrow \mu.$$

Άρα, με πιθανότητα 1, έχουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} = \mu$.

Στην περίπτωση που οι $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ έχουμε,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{X_1^+ + X_2^+ + \dots + X_n^+}{n} - \frac{X_1^- + X_2^- + \dots + X_n^-}{n}.$$

Οι $(X_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(X_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και $\mathbf{E}((X_1^+)^2) < \infty$, $\mathbf{E}((X_1^-)^2) < \infty$, εφόσον $(X_1^+)^2 \leq (X_1)^2$, $(X_1^-)^2 \leq (X_1)^2$. Από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1^+ + X_2^+ + \dots + X_n^+}{n} = \mathbf{E}(X_1^+)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1^- + X_2^- + \dots + X_n^-}{n} = \mathbf{E}(X_1^-),$$

με πιθανότητα 1. Συνεπώς, με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}(X_1^+) - \mathbf{E}(X_1^-) = \mu.$$

□

Από εδώ και στο εξής θεωρούμε δεδομένο το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών με την ασθενέστερη υπόθεση $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$. Επίσης, αν $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, θα συμβολίζουμε με S_n το n -οστό μερικό άθροισμά τους.

Ασκήσεις

- 9.1 (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\mathbf{E}((X_1)^2) < \infty$. Τότε, αν $\mu = \mathbf{E}(X_1)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

(Διαφορετικά λέμε ότι η ακολουθία $\frac{S_n}{n}$ συγκλίνει στο μ κατά πιθανότητα.)

- 9.2 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\mathbf{E}(X_1^+) = \infty$ και $\mathbf{E}(X_1^-) < \infty$. Να δείξετε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \infty,$$

με πιθανότητα 1.

- 9.3 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι, $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) = \mu$.

- 9.4 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(1, 3)$. Να δείξετε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \dots + (X_n)^2} = \frac{1}{4},$$

με πιθανότητα 1.

- 9.5 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $\mathbf{E}(|X_1|) < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) > 0$. Να δείξετε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

με πιθανότητα 1.

Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές

10.1 Πυκνότητες στον $\mathbb{R}^n$

Έστω λ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (Παράδειγμα 2.4). Θεωρούμε το χώρο γινόμενο $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $n \in \mathbb{N}$, του $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ n φορές εφοδιασμένο με το μέτρο γινόμενο, που θα συμβολίζουμε με λ_n , όπως αυτό ορίστηκε στην Παράγραφο 7.1. Τότε το μέτρο λ_n είναι το μοναδικό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ιδιότητα,

$$\lambda_n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \lambda(A_1)\lambda(A_2) \dots \lambda(A_n), \quad \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Για το ολοκλήρωμα Lebesgue ως προς το μέτρο λ_n στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ μιας $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (ή Borel) μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ γράφουμε,

$$\int f(x) d\lambda_n(x) \text{ ή } \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) d\lambda(x_1)d\lambda(x_2) \dots d\lambda(x_n).$$

Γενικεύουμε τώρα τον Ορισμό 6.44 της πυκνότητας ενός μέτρου πιθανότητας στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 10.1 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ και $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Η f καλείται πυκνότητα του $\mathbf{P}$ αν,

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x) d\lambda_n(x), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Όπως και στην περίπτωση του $\mathbb{R}$, για ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $\mathbb{R}^n$ οι $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ είναι πυκνότητες αν και μόνο αν $\lambda_n(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.

Ορισμός 10.2 Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ καλείται πυκνότητα της X αν η f είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της X .

Για λόγους απλότητας περιοριζόμαστε τώρα στην περίπτωση όπου $n = 2$. Το επόμενο θεώρημα γενικεύεται εύκολα στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Θεώρημα 10.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή, σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στον $\mathbb{R}^2$ και πυκνότητα $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$. Αν $X = (Y, Z)$, με $Y, Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές, ισχύουν τα εξής:

(i). Οι Y, Z έχουν αντίστοιχα πυκνότητες,

$$f_Y(y) = \int f(y, z) dz \text{ και } f_Z(z) = \int f(y, z) dy.$$

(ii). Οι Y, Z είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $f(y, z) = f_Y(y)f_Z(z)$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη (i) Θα δείξουμε ότι η $f_Y(y)$ είναι πυκνότητα της Y . Για την $f_Z(z)$ δουλεύουμε όμοια. Έστω

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \in A) &= \mathbf{P}((Y, Z) \in A \times \mathbb{R}) = \int_{A \times \mathbb{R}} f(y, z) \, d\lambda_2(y, z) \\ &= \int f(y, z) \mathbf{1}_{A \times \mathbb{R}}(y, z) \, d\lambda_2(y, z) \\ &= \int \int f(y, z) \mathbf{1}_{A \times \mathbb{R}}(y, z) \, dz \, dy \\ &= \int \mathbf{1}_A(y) \int f(y, z) \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(z) \, dz \, dy. \end{aligned}$$

Όμως $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(z) = 1$, άρα,

$$\mathbf{P}(Y \in A) = \int \mathbf{1}_A(y) \int f(y, z) \, dz \, dy = \int_A f_Y(y) \, dy.$$

(ii) Έστω ότι οι Y, Z είναι ανεξάρτητες. Θεωρούμε το σύνολο,

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : \int_C f(y, z) \, d\lambda_2(y, z) = \int_C f_Y(y) f_Z(z) \, d\lambda_2(y, z)\}.$$

Εφόσον οι Y, Z είναι ανεξάρτητες, για $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C = A \times B$, έχουμε,

$$\mathbf{P}((Y, Z) \in C) = \mathbf{P}(Y \in A) \mathbf{P}(Z \in B).$$

Όμως,

$$\mathbf{P}((Y, Z) \in C) = \int_{A \times B} f(x, y) \, d\lambda_2(y, z),$$

άρα,

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f(x, y) \, d\lambda_2(y, z) &= \int_A f_Y(y) \, dy \int_B f_Z(z) \, dz \\ &= \int_A \int_B f_Y(y) f_Z(z) \, dy \, dz \\ &= \int_{A \times B} f_Y(y) f_Z(z) \, d\lambda_2(y, z), \end{aligned}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα ;; (Tonelli-Fubini). Συνεπώς, η οικογένεια $\mathcal{D} = \{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ περιέχεται στη $\mathcal{C}$. Επιπλέον, η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, παράγει τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ και εφόσον είναι κλάση Dynkin (γιατί;), από το Θεώρημα 3.6, έχουμε ότι $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Συνεπώς,

$$\mathbf{P}((Y, Z) \in C) = \int_C f(y, z) \, d\lambda_2(y, z) = \int_C f_Y(y) f_Z(z) \, d\lambda_2(y, z), \quad \forall \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

άρα $f(y, z) = f_Y(y) f_Z(z)$ σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^2$. Αντίστροφα, αν $f(y, z) = f_Y(y) f_Z(z)$ σχεδόν παντού

για $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((Y, Z) \in A \times B) &= \int_{A \times B} f(y, z) d\lambda_2(y, z) = \int_{A \times B} f_Y(y) f_Z(z) d\lambda_2(y, z) \\ &= \int f_Y(y) f_Z(z) \mathbf{1}_{A \times B}(y, z) d\lambda_2(y, z) \\ &= \int \int f_Y(y) f_Z(z) \mathbf{1}_A(y) \mathbf{1}_B(z) dy dz \\ &= \int f_Y(y) \mathbf{1}_A(y) dy \int f_Z(z) \mathbf{1}_B(z) dZ \\ &= \mathbf{P}(Y \in A) \mathbf{P}(Z \in B). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι Y, Z είναι ανεξάρτητες. □

Παρατήρηση 10.4 Το Θεώρημα 10.3, για $y \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f_Y(y) \neq 0$ (αντίστοιχα για $z \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f_Z(z) \neq 0$), ορίζει μία ακόμα πυκνότητα στο $\mathbb{R}$:

$$f_{Y=y}(z) = \frac{f(y, z)}{f_Y(y)} \quad (\text{αντίστοιχα } f_{Z=z}(y) = \frac{f(y, z)}{f_Z(z)}).$$

Η πυκνότητα αυτή καλείται πυκνότητα της Z δεδομένου ότι $Y = y$, αλλά σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να τη συγχέουμε με τη δεσμευμένη πυκνότητα που προκύπτει από το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}(A|Y = y)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Πράγματι, στην προκειμένη περίπτωση $\mathbf{P}(Y = y) = 0$ και για το λόγο αυτό η δεσμευμένη πιθανότητα $\mathbf{P}(A|Y = y)$ δεν έχει νόημα.

Ασκήσεις

10.1 Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Θέτουμε $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ και $A^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$. Να δείξατε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (α) $\lambda_2(A) = 0$.
- (β) $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : \lambda(A_x) > 0\}) = 0$.
- (γ) $\lambda(\{y \in \mathbb{R} : \lambda(A^y) > 0\}) = 0$.

10.2 αδσγα

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

11.1 Μετασχηματισμός Fourier μέτρου πιθανότητας

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ χώρος μέτρου και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση. Εύκολα βλέπουμε ότι $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$, όπου $\operatorname{Re}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $\operatorname{Im}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ το πραγματικό και φανταστικό μέρος της f αντίστοιχα. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι συναρτήσεις $\operatorname{Re}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $\operatorname{Im}(f) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμες. Τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι Borel μετρήσιμη.

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο p ως εξής:

$$\int f \, dp = \int \operatorname{Re}(f) \, dp + i \int \operatorname{Im}(f) \, dp.$$

Ισχύει ότι,

$$\left| \int f \, dp \right| \leq \int |f| \, dp \quad (\text{Μέτρο Μιγαδικών})$$

και

$$\int \bar{f} \, dp = \overline{\int f \, dp}.$$

Η δεύτερη ιδιότητα είναι προφανής ενώ για την πρώτη αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι αν z μιγαδικός αριθμός υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε,

$$\left| \int f \, dp \right| = e^{i\theta} \int f \, dp.$$

Τότε,

$$\left| \int f \, dp \right| = e^{i\theta} \int f \, dp = \int e^{i\theta} f \, dp$$

και εφόσον $\int e^{i\theta} f \, dp = \int \operatorname{Re}(e^{i\theta} f) \, dp$ (γιατί;), έχουμε ότι

$$\int \operatorname{Re}(e^{i\theta} f) \, dp \leq \int |e^{i\theta} f| \, dp = \int |f| \, dp,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, υπενθυμίζουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, με $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των x και y , $\langle x, y \rangle$, ορίζεται ως εξής:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Δίνουμε τώρα τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ενός μέτρου πιθανότητας p στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Ορισμός 11.1 Έστω p μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του p και συμβολίζουμε με $\hat{p}$ τη συνάρτηση,

$$u \mapsto \int e^{i\langle u, x \rangle} dp(x), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Η συνάρτηση $\hat{p}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$. Επίσης, από τα προηγούμενα εύκολα βλέπουμε ότι,

$$\hat{p}(u) = \int \cos(\langle u, x \rangle) dp(x) + i \int \sin(\langle u, x \rangle) dp(x).$$

Θεώρημα 11.2 Έστω p μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

- (i). $|\hat{p}(u)| \leq 1$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$.
- (ii). $\hat{p}(0) = 1$.
- (iii). Η $\hat{p}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη (i). Για $u \in \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$|\hat{p}(u)| = \left| \int e^{i\langle u, x \rangle} dp(x) \right| \leq \int |e^{i\langle u, x \rangle}| dp(x) = \int 1 dp(x) = 1.$$

$$(ii). \hat{p}(0) = \int e^0 dp(x) = 1.$$

(iii). Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^n$, με $\delta_k \rightarrow 0$, ισχύει ότι,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |\hat{p}(u + \delta_k) - \hat{p}(u)| = 0.$$

Έστω $u, \zeta \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\begin{aligned} |\hat{p}(u + \zeta) - \hat{p}(u)| &= \left| \int (e^{i\langle u + \zeta, x \rangle} - e^{i\langle u, x \rangle}) dp(x) \right| \\ &= \left| \int e^{i\langle u, x \rangle} (e^{i\langle \zeta, x \rangle} - 1) dp(x) \right| \\ &\leq \int |e^{i\langle u, x \rangle}| |e^{i\langle \zeta, x \rangle} - 1| dp(x) \\ &= \int |e^{i\langle \zeta, x \rangle} - 1| dp(x). \end{aligned}$$

Άρα, αν $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ μηδενική ακολουθία, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^n} |\hat{p}(u + \delta_k) - \hat{p}(u)| \leq \int |e^{i\langle \delta_k, x \rangle} - 1| dp(x).$$

Έστω $f_k(x) = |e^{i\langle \delta_k, x \rangle} - 1|$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε,

α. $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

β. $f_k(x) \leq g(x)$ όπου $g(x) = 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

γ. $\int g(x) dp(x) = 2$.

Συνεπώς, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dp(x) = 0$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. □

11.2 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Ορισμός 11.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Χαρακτηριστική συνάρτηση της X καλούμε τη συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ με,

$$\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X \rangle}).$$

Από το Θεώρημα ;;, $\phi_X(u) = \int e^{i\langle u, x \rangle} d\mathbf{P}(x)$, δηλαδή $\phi_X = \widehat{\mathbf{P}^X}$.

Πρόταση 11.4 Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $b \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

- (i). $\phi_x(-u) = \overline{\phi_x(u)}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$.
- (ii). $\phi_{Ax+b}(u) = e^{i\langle u, b \rangle} \phi_x(A^t u)$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$.
- (iii). Αν X, Y ανεξάρτητες, τότε $\phi_{X+Y} = \phi_X(u) \phi_Y(u)$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη (i). Για $u \in \mathbb{R}^n$, $\phi_x(-u) = \mathbf{E}(e^{i\langle -u, X \rangle}) = \mathbf{E}(\overline{e^{i\langle u, X \rangle}}) = \overline{\mathbf{E}(e^{i\langle u, X \rangle})} = \overline{\phi_x(u)}$.

(ii). Για $u \in \mathbb{R}^m$, $\phi_{Ax+b}(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, AX+b \rangle}) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, b \rangle + i\langle u, AX \rangle}) = e^{i\langle u, b \rangle} \mathbf{E}(e^{i\langle A^t u, X \rangle}) = e^{i\langle u, b \rangle} \phi_x(A^t u)$, δεδομένου ότι $\langle u, AX \rangle = u^t AX = (A^t u)^t X = \langle A^t u, X \rangle$.

(iii). Για $u \in \mathbb{R}^n$, $\phi_{X+Y}(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X+Y \rangle}) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X \rangle} e^{i\langle u, Y \rangle})$. Όμως, από το Θεώρημα ;;, $\mathbf{E}(e^{i\langle u, X \rangle} e^{i\langle u, Y \rangle}) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X \rangle}) \mathbf{E}(e^{i\langle u, Y \rangle})$. Άρα, $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u) \phi_Y(u)$. □

Στην ειδική περίπτωση όπου $m = n = 1$ στο (ii) της Πρότασης 11.4 με $A = a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ και X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$, έχουμε,

$$\phi_{aX+b}(u) = e^{iub} \phi_x(au).$$

Παράδειγμα 11.5 (i). Έστω $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$. Τότε, $\phi_X(u) = (pe^{iu} + 1 - p)^n$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \phi_X(u) &= \mathbf{E}(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^n e^{iuk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{iu} p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (e^{iu} p + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

(ii). Έστω $X \sim \mathbf{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$ (αποδεικνύεται όμοια με το (i)).

(iii). Έστω $X \sim \mathbf{U}(-a, a)$. Τότε,

$$\phi_X(u) = \begin{cases} \frac{\sin(au)}{au}, & u \in (-a, a) \\ 1, & u = 0 \end{cases}.$$

Πράγματι, η X έχει πυκνότητα,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (-a, a) \end{cases}.$$

Άρα, για $u \neq 0$, έχουμε,

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= \mathbf{E}(e^{iux}) = \int_{-a}^a e^{iux} \frac{1}{2a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \cos(ux) dx + i \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \sin(ux) dx \\ &= \frac{1}{2a} \frac{\sin(ux)}{u} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{2a} \left(\frac{\sin(ua)}{u} - \frac{\sin(-ua)}{u} \right) \\ &= \frac{\sin(ua)}{ua}.\end{aligned}$$

Για $u = 0$, προφανώς $\phi_X(0) = 1$.

(iv). Έστω $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Τότε, $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$.

Ο υπολογισμός της χαρακτηριστική συνάρτησης στην περίπτωση αυτή είναι λίγο δύσκολος. Μπορεί να γίνει εύκολα με χρήση επιχειρημάτων από τη Μιγαδική Ανάλυση. Ένας άλλος, όχι και τόσο προφανής τρόπος, είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= \mathbf{E}(e^{iux}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) e^{-x^2/2} dx + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ux) e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux) e^{-x^2/2} dx.\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\phi_X(u)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι,

$$\phi'_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -x \sin(ux) e^{-x^2/2} dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε,

$$\phi'_X(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \cos(ux) e^{-x^2/2} dx = -u \phi_X(u).$$

Έτσι καταλήγουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση $\phi'_X(u) = -u \phi_X(u)$, η οποία έχει λύση,

$$\ln(\phi_X(u)) = -\frac{u^2}{2} + C.$$

Συνεπώς, $\phi_X(u) = e^{-u^2/2} e^C$ και εφόσον $\phi_X(0) = 1$, έχουμε ότι $C = 0$. Άρα $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$.

Ένας άλλος τρόπος, μέσω της Μιγαδικής Ανάλυσης, είναι η χρήση του Θεωρήματος Αναλυτικής Συνέχισης για μια ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση. Περιγραφικά: Πρώτα υπολογίζουμε την $\mathbf{E}(e^{tX})$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από τους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2}$. Θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση $\psi : z \mapsto e^{z^2/2}$, $z \in \mathbb{C}$, και έστω $\widetilde{\phi}(z) = \phi_X(-iz)$, όπου ϕ_X η χαρακτηριστική συνάρτηση της X . Από τα προηγούμενα και κάποιους στοιχειώδεις υπολογισμούς, η $\widetilde{\phi}(z)$ είναι ολόμορφη. Επιπλέον, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\phi}(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) = e^{t^2/2} = \psi(t)$. Από την αρχή αναλυτικής συνέχισης, εφόσον οι $\widetilde{\phi}$ και ψ ταυτίζονται στο $\mathbb{R}$, τότε ταυτίζονται σε όλο το $\mathbb{C}$. Συνεπώς, $\phi_X(-iz) = e^{z^2/2}$ και με έναν απλό μετασχηματισμό έχουμε ότι $\phi_X(z) = e^{-z^2/2}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

- (v). Έστω $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. Τότε, $\phi_X(u) = e^{iu\mu - u^2 \frac{\sigma^2}{2}}$. Από τα προηγούμενα, θεωρώντας την τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, έχουμε ότι $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$ και $X = \sigma Z + \mu$. Άρα, $\phi_X(u) = \phi_{\sigma Z + \mu}(u) = e^{iu\mu} \phi_Y(u\sigma) = e^{iu\mu} e^{-u^2 \frac{\sigma^2}{2}}$.
- (vi). Έστω $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\phi_X(u) &= \mathbf{E}(e^{iuX}) = \int_0^\infty e^{iux} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{x(i\lambda + iu)} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda \int_0^M e^{x(-\lambda + iu)} dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda \frac{e^{x(-\lambda + iu)}}{-\lambda + iu} \Big|_0^M = \lim_{M \rightarrow \infty} \lambda \frac{e^{M(-\lambda + iu)} - 1}{-\lambda + iu} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - iu},\end{aligned}$$

αφού $|e^{iuM}| = 1$, άρα $\lim_{M \rightarrow \infty} e^{-\lambda M} e^{iuM} = 0$.

11.3 Θεώρημα μοναδικότητας και εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή βασιζόμαστε στο επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι απόρροια του Θεωρήματος Μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier και η απόδειξή του παραλείπεται διότι ξεφεύγει από τα πλαίσια του σκοπού μας. Παρόλα αυτά ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη του θεωρήματος αυτού σε οποιοδήποτε μαθηματικό βιβλίο Ανάλυσης Fourier. Το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει την ισότητα δύο μέτρων πιθανότητας μέσω των στοιχείων του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, παίρνουμε από τα Borel σύνολα του $\mathbb{R}^n$ στον ίδιο τον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 11.6 (Θεώρημα Μοναδικότητας) Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ ώστε $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Τότε, $\mu = \nu$.

Πόρισμα 11.7 Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$.

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι $\phi_X(u) = \widehat{\mathbf{P}^X}(u)$. Από το Θεώρημα Μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 11.8 Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, οι $\{X_j : 1 \leq j \leq n\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\phi_X(u_1, u_2, \dots, u_n) = \phi_{X_1}(u_1) \phi_{X_2}(u_2) \cdots \phi_{X_n}(u_n)$, για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Έστω ότι οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες. Τότε,

$$\phi_X(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{E} \left(e^{i \sum_{j=1}^n u_j X_j} \right) = \mathbf{E}(e^{iu_1 X_1} e^{iu_2 X_2} \cdots e^{iu_n X_n}).$$

Εφόσον οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, από το Θεώρημα ;;, οι $e^{iu_1 X_1} e^{iu_2 X_2} \cdots e^{iu_n X_n}$ είναι ανεξάρτητες, άρα,

$$\mathbf{E}(e^{iu_1 X_1} e^{iu_2 X_2} \cdots e^{iu_n X_n}) = \mathbf{E}(e^{iu_1 X_1}) \mathbf{E}(e^{iu_2 X_2}) \cdots \mathbf{E}(e^{iu_n X_n}),$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

$\Leftarrow$ Από την υπόθεση, για $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, έχουμε,

$$\begin{aligned}\widehat{P^X}(u) &= \phi_X(u) = \phi_{X_1}(u_1)\phi_{X_2}(u_2)\cdots\phi_{X_n}(u_n) \\ &= \widehat{\mathbf{P}^{X_1}}(u_1)\widehat{\mathbf{P}^{X_2}}(u_2)\cdots\widehat{\mathbf{P}^{X_n}}(u_n) \\ &= \int e^{iu_1x_1} d\mathbf{P}^{X_1} \int e^{iu_2x_2} d\mathbf{P}^{X_2} \cdots \int e^{iu_nx_n} d\mathbf{P}^{X_n} \\ &= \int e^{i\sum_{j=1}^n u_j x_j} d\mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}^{X_n} \\ &= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \widehat{\mathbf{P}^{X_2}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}^{X_n}(u).\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Μοναδικότητας, έχουμε ότι

$$\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}^{X_n},$$

το οποίο ισοδυναμεί με το ζητούμενο. $\square$

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον ίδιο χώρο. Αν οι X και Y έχουν την ίδια πυκνότητα, δηλαδή $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$, θα γράφουμε $X \stackrel{d}{=} Y$.¹

Ορισμός 11.9 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η X έχει συμμετρική κατανομή αν $X \stackrel{d}{=} -X$, δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ισχύει $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(-X \in A)$.

Παράδειγμα 11.10 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα f , άρτια συνάρτηση. Τότε η X έχει συμμετρική κατανομή. Πράγματι,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f d\lambda = \int_{-A} f d\lambda = \mathbf{P}(X \in -A).$$

Μία τέτοια είναι η $X \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2)$.

Παρατήρηση 11.11 Δεν έχουν όλες οι τυχαίες μεταβλητές συμμετρική κατανομή. Για παράδειγμα η $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, δεν έχει συμμετρική κατανομή.

11.4 Άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 11.12 Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Συνέλιξη των μ, ν λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mu * \nu$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathbf{1}_A(X + Y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Παρατήρηση 11.13 Εύκολα βλέπουμε ότι η συνέλιξη είναι συμμετρική, δηλαδή $\mu * \nu = \nu * \mu$. Επίσης ισχύει ότι,

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathbf{1}_{(A-y)}(x) d\mu(x) d\nu(y) = \int \mu(A - y) d\nu(y).$$

Όμοια,

$$\mu * \nu(A) = \int \nu(A - x) d\mu(x).$$

¹ Το d προέρχεται από το αρχικό της λέξης distribution

Θεώρημα 11.14 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες με τιμές στο $\mathbb{R}$ και κατανομές $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ αντίστοιχα. Τότε, $\mathbf{P}^{X+Y} = \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y$.

Απόδειξη Εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η κατανομή της (X, Y) είναι το μέτρο γινόμενο $\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y$ στον $\mathbb{R}^2$. Άρα, για $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$, από το Θεώρημα ;;;,

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \int g(x, y) d(\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y)(x, y).$$

Συνεπώς, για $g(x, y) = \mathbf{1}_A(x + y)$, έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{1}_A(X + Y)) &= \int \mathbf{1}_A(X + Y) d(\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y)(x, y) \\ &= \int \int \mathbf{1}_A(X + Y) d\mathbf{P}^X(x) d\mathbf{P}^Y(y) \\ &= \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y(A). \end{aligned}$$

Όμως,

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A(X + Y)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X+Y \in A}) = \mathbf{P}(X + Y)$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 11.15 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $Z = X + Y$. Τότε,

(i). Αν η X έχει πυκνότητα f_X , τότε η Z έχει πυκνότητα και ισχύει ότι,

$$f_Z(z) = \int f_X(z - y) d\mathbf{P}^Y(y), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

(ii). Αν οι X, Y έχουν αντίστοιχα πυκνότητες f_X και f_Y , τότε,

$$f_Z(z) = \int f_X(z - y) f_Y(y) dy = \int f_Y(z - x) f_X(x) dx, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη (i). Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε, από το Θεώρημα 11.14,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \in A) &= \int \mathbf{P}^X(A - y) d\mathbf{P}^Y(y) \\ &= \int \int_{A-y} f_X(x) dx d\mathbf{P}^Y(y) \\ &\stackrel{x=z-y}{=} \int \int_A f_X(z - y) dz d\mathbf{P}^Y(y) \\ &= \int_A \int f_X(z - y) d\mathbf{P}^Y(y) dz, \end{aligned}$$

άρα, η $f_Z(z) = \int f_X(z - y) d\mathbf{P}^Y(y)$ είναι πυκνότητα της Z .

(ii). Έστω $z \in \mathbb{R}$. Τότε, από το (i),

$$f_Z(z) = \int f_X(z - y) d\mathbf{P}^Y(y) = \mathbf{E}(g(Y)),$$

όπου $g(y) = f_X(z - y)$. Από το Θεώρημα ;;;, αν f_Y η πυκνότητα της Y , έχουμε,

$$\mathbf{E}(g(Y)) = \int g(y) f_Y(y) dy = \int f_X(z - y) dy.$$

Συνεπώς, $f_Z(z) = \int f_X(z-y)f_Y(y) dy$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει με μία απλή αλλαγή μεταβλητής. $\square$

Θεώρημα 11.16 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\mathbf{E}(X^2) < \infty$ και $\mathbf{E}(Y^2) < \infty$. Τότε, $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Απόδειξη Εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες ισχύει ότι $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X+Y) &= \mathbf{E}(X^2) + 2\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y))^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 \\ &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).\end{aligned}$$

$\square$

Παράδειγμα 11.17 (i). Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_1 \sim \mathbf{Bernoulli}(p)$. Αν $Y = \sum_{j=1}^n X_j$, τότε $Y \sim \mathbf{Bin}(n, p)$. Πράγματι, λόγω γραμμικότητας,

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_j) = np$$

και από το Θεώρημα 11.16,

$$\mathbf{V}(Y) = \sum_{j=1}^n \mathbf{V}(X_j) = np(1-p).$$

(ii). Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \sim \mathbf{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathbf{Poisson}(\mu)$. Τότε, για τη $Z \sim X+Y$, έχουμε ότι $Z \sim \mathbf{Poisson}(\lambda+\mu)$. Αυτό το βλέπουμε εύκολα μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης της Z , εφόσον $\phi_Z(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$, λόγω ανεξαρτησίας, άρα,

$$\phi_Z(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)} e^{\mu(e^{iu}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{iu}-1)}.$$

Συνεπώς, η ϕ_Z είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μίας κατανομής $\mathbf{Poisson}(\lambda+\mu)$ και από το Θεώρημα Μοναδικότητας (Θεώρημα 11.6) η Z έχει κατανομή $\mathbf{Poisson}(\lambda+\mu)$.

(iii). Έστω $X \sim \mathbf{Bin}(n, p)$ και $Y \sim \mathbf{Bin}(m, p)$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η $Z = X+Y$ έχει κατανομή $\mathbf{Bin}(n+m, p)$. Αυτό προκύπτει εύκολα με τη χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων ή, διαφορετικά, βλέποντας τις X, Y ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών κατανομής $\mathbf{Bernoulli}(p)$ και χρησιμοποιώντας το (i).

(iv). Έστω $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathbf{N}(\nu, \tau^2)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η $Z = X+Y$ έχει κατανομή $\mathbf{N}(\mu+\nu, \sigma^2+\tau^2)$. Πράγματι, $\phi_Z = \phi_X\phi_Y$, άρα,

$$\phi_Z(u) = e^{iu\mu - u^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{iu\nu - u^2 \frac{\tau^2}{2}} = e^{iu(\mu+\nu) - u^2 \frac{\sigma^2+\tau^2}{2}}.$$

Συνεπώς, η ϕ_Z είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κατανομής $\mathbf{N}(\mu+\nu, \sigma^2+\tau^2)$ και από το Θεώρημα Μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο.

(v). Έστω $X \sim \mathbf{Gamma}(a, \beta)$ και $Y \sim \mathbf{Gamma}(\delta, \beta)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, εργαζόμενοι όμοια με τα προηγούμενα, η $Z = X+Y$ έχει κατανομή $\mathbf{Gamma}(a+\delta, \beta)$.

(vi). Υπενθυμίζουμε ότι αν $X \sim \chi_p^2$, $p \in \mathbb{N}$, τότε $X \sim \mathbf{Gamma}(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$. Στην περίπτωση $p=1$, ισοδύναμα $X = Y^2$, όπου $Y \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Άρα, αν $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathbf{N}(0, 1)$, τότε η $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_p^2$ έχει κατανομή $\mathbf{Gamma}(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$, δηλαδή χ_p^2 . Συνεπώς, κάθε τυχαία μεταβλητή με κατανομή χ_p^2 είναι άθροισμα p κατανομών $\mathbf{N}(0, 1)$.

Ασκήσεις

- 11.1 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $X \stackrel{d}{=} -X$ αν και μόνο αν $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- 11.2 Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $X - Y$ έχει συμμετρική κατανομή.
- 11.3 Έστω $X, Y \sim \mathbf{U}(0, 1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι η $Z = X + Y$ έχει κατανομή,

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & z \in (0, 1] \\ 2 - z, & z \in (1, 2) \\ 0, & z \in \mathbb{R} \setminus (0, 2) \end{cases}.$$

- 11.4 Έστω X τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X έχει κατανομή **Cauchy** αν έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, θεωρούμε γνωστό ότι $\phi_X(u) = e^{-|u|}$, $u \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- (α) Αν $X, Y \sim \mathbf{Cauchy}$, τότε $\frac{X+Y}{2} \sim \mathbf{Cauchy}$.
- (β) Αν $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathbf{Cauchy}$, τότε $\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} \sim \mathbf{Cauchy}$.

Είδη σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

12.1 Τρόποι σύγκλισης

Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Γνωρίζουμε δύο βασικά είδη σύγκλισης της ακολουθίας $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, την κατά σημείο και την ομοιόμορφη. Τα είδη όμως αυτά είναι αρκετά ιδανικά και πολλές φορές δεν εφαρμόζονται στην πράξη ή η μελέτη τους είναι αδύνατη. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε ασθενέστερες μορφές σύγκλισης, η οποίες είναι πιο εύκολο να εφαρμοστούν. Για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε με τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 12.1 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{R}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών όπως προηγουμένως.

- (i). Λέμε ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει σε μία τυχαία μεταβλητή X με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια (almost surely), $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, αν,

$$\mathbf{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right) = 1,$$

δηλαδή,

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

- (ii). Για $p > 0$ και $X_n, X \in L^p$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην X κατά L^p , $X_n \xrightarrow{L^p} X$, αν,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

- (iii). Λέμε ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην X κατά πιθανότητα, $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, αν,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Αν $X_n \rightarrow X$ κατά σημείο, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$. Στο επόμενο θεώρημα, βλέπουμε επίσης ότι η σχεδόν βέβαια σύγκλιση και η σύγκλιση κατά L^p είναι ισχυρότερες της σύγκλισης κατά πιθανότητα.

Θεώρημα 12.2 Έστω $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές και $p \geq 1$.

- (i). Αν $X_n \xrightarrow{L^p} X$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

- (ii). Αν $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$.

- (i). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \epsilon^p)$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov έχουμε,

$$\mathbf{P}(|X_n - X|) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \mathbf{E}(|X_n - X|^p).$$

Για $n \rightarrow \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.

(ii). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) = \mathbf{E}(g_n),$$

όπου $g_n = \mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}$. Εφόσον $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, $g_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$. Επίσης $|g_n| \leq 1$, άρα από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(g_n) = \mathbf{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n) = 0.$$

□

Παράδειγμα 12.3 (i). Έστω $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbf{P} = \lambda|_{[0,1]}$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n, & \omega \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0, & \omega \in [0, 1] \setminus (0, \frac{1}{n}) \end{cases}.$$

Τότε $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega$, άρα $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Επιπλέον $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Όμως $X_n \not\xrightarrow{L^p} X$. Πράγματι,

$$\mathbf{E}(|X_n - X|) = \mathbf{E}(|X_n|) = n \mathbf{P}(X_n = n) + 0 \mathbf{P}(X_n = 0) = n \frac{1}{n} = 1.$$

(ii). Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως πριν. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε 2^k διαδοχικά κλειστά διαστήματα ίδιου μήκους, $J_1^k, J_2^k, \dots, J_{2^k}^k$. Αριθμούμε τα $(J_r^k)_{r=1}^{2^k}$ σε μία ακολουθία $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου, για $r_1 < r_2$, το $J_{r_1}^{\mu}$ εμφανίζεται νωρίτερα από το $J_{r_2}^{\nu}$ αν $\mu < \nu$ ή αν $\mu = \nu$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_n = \mathbf{1}_{I_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για $p \geq 1$,

$$\mathbf{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = \mathbf{P}(I_n) \rightarrow 0, \text{ για } n \rightarrow \infty.$$

Άρα $X_n \xrightarrow{L^p} 0$. Συνεπώς, $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Όμως, η X_n δεν συγκλίνει σε κάποια τυχαία μεταβλητή σχεδόν βέβαια. Πράγματι,

$$\underline{\lim} X_n(\omega) = 0 < 1 = \overline{\lim} X_n(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Άρα, $\mathbf{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \text{ υπάρχει}) = 0$.

Θεώρημα 12.4 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$.

Απόδειξη Επιλέγουμε επαγωγικά την $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(|X_{k_n} - X| > \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο $A_n = \{|X_{k_n} - X| > \frac{1}{2^n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Από το 2ο Λήμμα Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0$.

Έστω $\omega \in \Omega \setminus \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Τότε υπάρχει $n(\omega) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n(\omega)$, $\omega \notin A_n$. Άρα, $|X_{k_n}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n \geq n(\omega)$.

Συνεπώς, $X_{k_n}(\omega) \rightarrow X(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, και $\mathbf{P}(\Omega \setminus \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$, δηλαδή $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. □

Θεώρημα 12.5 Έστω $p \geq 1$ και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X όπως στο Θεώρημα 12.4 με την επιπλέον υπόθεση $|X_n| \leq Y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $Y \in L^p$. Τότε $X \in L^p$ και $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 12.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_{k_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_{k_n}|^p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|X_{k_n}|^p) \leq \mathbf{E}(|Y|^p),$$

από το Λήμμα Fatou. Άρα, $X \in L^p$.

Έστω ότι $X_n \not\xrightarrow{L^p} X$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε,

$$\mathbf{E}(|X_{\lambda_n} - X|) \geq \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $X_{\lambda_n} \xrightarrow{P} X$, από το Θεώρημα 12.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{\mu_{\lambda_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(X_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\mu_{\lambda_n}} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $Z_n = |X_{\mu_{\lambda_n}} - X|^p$. Έχουμε ότι $Z_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} 0$ και $\mathbf{E}(Z_n) \geq \epsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, $|Z_n| \leq 2^p(|X_{\mu_{\lambda_n}}|^p + |X|^p) \leq 2^p(|Y|^p + |Y|^p) \leq 2^{p+1}|Y|^p$.¹ Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(Z_n) = \mathbf{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $X_n \xrightarrow{L^p} X$. □

Θεώρημα 12.6 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές.

(i). Αν $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$.

(ii). Αν $X_n \xrightarrow{P} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

Απόδειξη (i). Έστω $A = \{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$. Τότε $\mathbf{P}(A) = 1$ και για $\omega \in A$ ισχύει ότι $f(X_n(\omega)) \rightarrow f(X(\omega))$, εφόσον η f είναι συνεχής. Άρα, αν $B = \{\omega : f(X_n(\omega)) \rightarrow f(X(\omega))\}$ έχουμε ότι $A \subset B$, συνεπώς $\mathbf{P}(B) = 1$ από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

(ii). Έστω ότι $f(X_n) \not\xrightarrow{P} f(X)$. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ και γνήσια αύξουσα ακολουθία $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(|f(X_{k_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά δουλεύουμε όμοια με την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $Y_n = X_{k_n}$.

Εφόσον $X_n \xrightarrow{P} X$, από το Θεώρημα 12.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Από το (i), $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$, άρα $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{P} f(X)$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον $\mathbf{P}(|f(X_{\lambda_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. □

Ασκήσεις

12.1 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

Έστω $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Να δείξετε ότι $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.

¹ Χρησιμοποιούμε ότι $|a + b|^p \leq 2 \max(|a|, |b|)^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

Σύγκλιση κατά κατανομή

13.1 Ασθενής Σύγκλιση

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μία ασθενέστερη, από όσες έχουμε δει έως τώρα, μορφή σύγκλισης, τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Ορισμός 13.1 Έστω $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μέτρων στον $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η (μ_n) συγχλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^d$ αν,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) d\mu_n(x) = \int f(x) d\mu(x),$$

για κάθε $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη.

Ορισμός 13.2 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η (X_n) συγχλίνει κατά κατανομή στην X , $X_n \Rightarrow X$ ή $X_n \xrightarrow{d} X$ ή $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,¹ αν η ακολουθία κατανομών $(\mathbf{P}^{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ των X_n συγχλίνει ασθενώς στην κατανομή $\mathbf{P}^X$ της X .

Θεώρημα 13.3 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X όπως στον Ορισμό 13.2. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν

$$\mathbf{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbf{E}(f(X)), \quad (*)$$

για κάθε $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη.

Απόδειξη Προκύπτει από τον Ορισμό 13.1 και το Θεώρημα ;;.

Παρατήρηση 13.4 • Στον Ορισμό 13.2 οι X_n , $n \in \mathbb{N}$, δεν είναι απαραίτητο να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Κάθε μία ορίζεται σε χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ και η X σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

- Στο Θεώρημα 13.3 η μέση τιμή στο αριστερό μέλος της (*) είναι ως προς το μέτρο $\mathbf{P}_n$, ενώ στο δεξί ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$.
- Αν οι X_n , $n \in \mathbb{N}$, και X ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας έχει νόημα να εξετάζουμε πότε η σύγκλιση κατά κατανομή συνεπάγεται από κάποιο άλλο είδος σύγκλισης, όπως αυτά που είδαμε στο Κεφάλαιο ;; (σχεδόν βέβαια, κατά L^p , κατά πιθανότητα).

Θεώρημα 13.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, τότε $X_n \Rightarrow X$.

Απόδειξη Έστω ότι $X_n \not\Rightarrow X$. Τότε υπάρχουν $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, έτσι ώστε:

$$|\mathbf{E}(f(X_{k_n})) - \mathbf{E}(f(X))| \geq \epsilon.$$

Επειδή $X_{k_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 12.4, υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(X_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_{k_n}} \xrightarrow{\sigma.β.}$

¹ d από το distribution και $\mathcal{L}$ από το Law.

X . Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 12.6, έχουμε ότι $f(X_{\lambda_{k_n}}) \xrightarrow{\sigma, \beta} f(X)$. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|f(X)| < M$ και $|f(X_{\lambda_{k_n}})| < M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\mathbf{E}(f(X_{\lambda_{k_n}})) \rightarrow \mathbf{E}(f(X)),$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $X_n \Rightarrow X$. □

Θεώρημα 13.6 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρους πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, και X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^d$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A),$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ με $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$.

Θεώρημα 13.7 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρους πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, και X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν $\mathbf{F}_{X_n}(x) \rightarrow \mathbf{F}_X(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{F}_X(x^-)$, δηλαδή για κάθε σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$.

Απόδειξη $\Rightarrow$ Έπεται από το Θεώρημα 13.6, εφόσον για $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{F}_X(x) = \mathbf{F}_X(x^-)$, έχουμε ότι $\mathbf{F}_{X_n}(x) = \mathbf{P}(X_n \leq x) = \mathbf{P}(X_n \in (-\infty, x])$ και $\mathbf{P}(X \in \partial(-\infty, x]) = \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{F}_X(x) - \mathbf{F}_X(x^-) = 0$. □

Θεώρημα 13.8 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $C \in \mathbb{R}$. Αν $X_n \Rightarrow C$, τότε $X_n \xrightarrow{P} C$.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_n - C| > \epsilon) &= \mathbf{P}(X_n > C + \epsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \epsilon) \\ &= 1 - \mathbf{F}_{X_n}(C + \epsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \epsilon) \\ &\leq 1 - \mathbf{F}_{X_n}(C + \epsilon) = \mathbf{F}(C - \epsilon). \end{aligned}$$

Τα $C - \epsilon$, $C + \epsilon$ είναι σημεία συνέχειας της $\mathbf{F}_C$, άρα από το Θεώρημα 13.7,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{X_n}(C - \epsilon) = \mathbf{F}_C(C - \epsilon) = 0$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{X_n}(C + \epsilon) = \mathbf{F}_C(C + \epsilon) = 1.$$

Συνεπώς, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - C| > \epsilon) = 0$. □

Θεώρημα 13.9 (Θεώρημα Slutsky) Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$. Αν X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X_n \Rightarrow X$, τότε $Y_n \Rightarrow X$.

Απόδειξη Έστω x σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$. Θα δείξουμε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) = \mathbf{F}_X(x).$$

Έστω $\epsilon > 0$. Ισχύουν τα εξής:

(i).

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{Y_n}(x) &= \mathbf{P}(Y_n \leq x) = \mathbf{P}(Y_n \leq x, X_n \leq x + \epsilon) + \mathbf{P}(Y_n \leq x, X_n > x + \epsilon) \\
&\leq \mathbf{P}(X_n \leq x + \epsilon) + \mathbf{P}(X_n - Y_n > \epsilon) \\
&= \mathbf{F}_{X_n}(x + \epsilon) + \mathbf{P}(X_n - Y_n > \epsilon).
\end{aligned}$$

Αν το $x + \epsilon$ είναι σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$, τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{X_n}(x + \epsilon) = \mathbf{F}_X(x + \epsilon).$$

Επίσης, εφόσον $X_n - Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n - Y_n > \epsilon) = 0.$$

Άρα,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \leq \mathbf{F}_X(x + \epsilon).$$

Τα σημεία ασυνέχειας της $\mathbf{F}_X$ είναι αριθμήσιμα, άρα υπάρχει φθίνουσα μηδενική ακολουθία $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε το $x + \epsilon_k$ να είναι σημείο συνέχειας της $\mathbf{F}_X$. Όμως, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \leq \mathbf{F}_X(x + \epsilon_k).$$

Εφόσον $\mathbf{F}_X$ συνεχής στο x ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{F}_X(x + \epsilon_k) = \mathbf{F}_X(x),$$

συνεπώς,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \leq \mathbf{F}_X(x).$$

(ii).

$$\mathbf{F}_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(Y_n \leq x) \geq \mathbf{P}(X_n \leq x - \epsilon) - \mathbf{P}(Y_n - X_n \geq \epsilon).$$

Συνεπώς,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \geq \mathbf{F}_X(x - \epsilon).$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως βλέπουμε ότι,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Y_n}(x) \geq \mathbf{F}_X(x).$$

Από τα (i) και (ii) προκύπτει το ζητούμενο. □

Ορισμός 13.10 Μία οικογένεια $\{p_i : i \in I\}$ μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ λέγεται σφιχτή αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε,

$$p_i(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \epsilon, \quad \forall i \in I.$$

Παρατήρηση 13.11 Σύμφωνα με τον Ορισμό 13.10 η οικογένεια $\{p_i : i \in I\}$ δείνει όλη της τη μάζα σε ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{i \in I} p_i(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) = 0.$$

Παρατήρηση 13.12 Αν p μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R} \setminus [-M, M])$ (Άσκηση 13.2). Ο Ορισμός 13.10 απαιτεί τα p_i να ικανοποιούν την ιδιότητα αυτή και για το ίδιο $M > 0$.

Ορισμός 13.13 Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Η $\{X_i : i \in I\}$ λέγεται σφιχτή αν η οικογένεια κατανομών $\{\mathbf{P}^{X_i} : i \in I\}$ είναι σφιχτή.

Παρατήρηση 13.14 Στον Ορισμό 13.13, επειδή $\mathbf{P}^{X_i}(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) = \mathbf{P}(|X_i| > M)$, για κάθε $i \in I$, έχουμε ισοδύναμα ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_i| > M) = 0.$$

Παρατήρηση 13.15 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim \mathbf{Exp}(\frac{1}{n})$. Τότε η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν είναι σφιχτή. Πράγματι, για $M > 0$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(|X_n| > M) = \sup_{n \in \mathbb{N}} e^{-\frac{M}{n}} = 1.$$

Πρόταση 13.16 Έστω $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, p μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $p_n \Rightarrow p$. Τότε η $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σφιχτή.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \frac{\epsilon}{2}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, -M-1] \\ -x-M, & x \in (-M-1, -M) \\ 0, & x \in [-M, M] \\ x-M, & x \in (M, M+1) \\ 1, & x \in [M+1, \infty) \end{cases}.$$

Τότε,

$$\int f \, dp_n \leq p(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \frac{\epsilon}{2} \leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-M, M]} 1 \, dp.$$

Η f είναι συνεχής και φραγμένη, άρα, εφόσον $p_n \Rightarrow p$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, dp_n = \int f \, dp.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε,

$$\int f \, dp_n < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Όμως,

$$\int f \, dp_n \geq \int_{\mathbb{R} \setminus [-M-1, M+1]} 1 \, dp = p(\mathbb{R} \setminus [-M-1, M+1]),$$

άρα, για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε ότι $p([-M-1, M+1]) > 1 - \epsilon$.

Για τα $p_1, p_2, \dots, p_{n_0-1}$, υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p_i([-M-1, M+1]) > 1 - \epsilon$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n_0-1$ (Άσκηση 13.4).

Έστω $K = \max\{\tilde{M}, M+1\}$. Τότε, $p([-K, K]) > 1 - \epsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι απατητική και για το λόγο αυτό παραλείπεται.

Θεώρημα 13.17 Έστω $(p_n)_{n \in \mathbb{R}}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αν η $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σφιχτή, τότε υπάρχει υπακολουθία $(p_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ της $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις

- 13.1 Έστω $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο $(0, 1)$ έτσι ώστε $p_n \rightarrow 0$ και $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim \mathbf{Γεωμετρική}(p_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι $p_n X_n \Rightarrow X$, όπου X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $X \sim \mathbf{Exp}(1)$.
- 13.2 Έστω p μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R} \setminus [-M, M]) < \epsilon$.
- 13.3 Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n^2) < \infty$. Να δείξετε ότι η $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι σφιχτή.
- 13.4 Έστω $\{p_i : i \in I\}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με I πεπερασμένο. Να δείξετε ότι η $\{p_i : i \in I\}$ είναι σφιχτή.