Κεφάλαιο 5

Γεννήτριες και χαρακτηριστικές συναρτήσεις

5.1 (15 Μαΐου 2009)

5.1α΄ Γεννήτριες μιας μεταβλητής

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με ακέραιες μη αρνητικές τιμές και συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ορισμός 5.1.1. Η **πιθανογεννήτρια** της X είναι η συνάρτηση

$$P(t) = P_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) t^x.$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

Επίσης, η δυναμοσειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει αν $|t| \leq 1$ (διότι $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1$). Συνεπώς, η P_X είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και

$$\begin{aligned}
P'_X(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) t^{x-1} \\
P''_X(t) &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) f_X(x) t^{x-2} \\
\cdots & \quad \cdots \\
P^{(r)}_X(t) &= \sum_{x=r}^{\infty} (x)_r f_X(x) t^{x-r},
\end{aligned}$$

όπου $(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$. Θέτοντας $t = 0$ βλέπουμε ότι

$$f_X(r) = \frac{P^{(r)}_X(0)}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Οι παραπάνω ισότητες δείχνουν ότι αν γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια P_X της X τότε μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας f_X της X (με άλλα λόγια, η πιθανογεννήτρια προσδιορίζει την κατανομή της X).

Ορισμός 5.1.2. Η **γεννήτρια παραγοντικών ροπών** της X είναι η συνάρτηση

$$\Pi_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_{(r)}}{r!} t^r,$$

όπου

$$\mu_{(r)} = \mathbb{E}[(X)_r] = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \sum_{x=r}^{\infty}(x)_r f_X(x).$$

Η γεννήτρια παραγοντικών ροπών συνδέεται με την πιθανογεννήτρια μέσω της επόμενης πρότασης:

Πρόταση 5.1.3. *Ισχύει η ισότητα* $\Pi_X(t) = P_X(t+1)$. *Ειδικότερα,*

$$\mu_{(r)} = P^{(r)}(1), \quad r = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{x=r}^{\infty}(x)_r f(x)\right)\frac{t^r}{r!} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{x}\frac{(x)_r}{r!}t^r\right)f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}(t+1)^x f(x) \\ &= P(t+1). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\Pi^{(r)}(t) = P^{(r)}(t+1)$, άρα

$$\mu_{(r)} = \Pi^{(r)}(0) = P^{(r)}(1).$$

Σημείωση. Από την προηγούμενη πρόταση βλέπουμε ότι αν γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια της X (και ορίζεται σε μια περιοχή του $t = 1$) μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγοντικές ροπές της X (και από αυτές, τις ροπές της X). Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τη γεννήτρια παραγοντικών ροπών μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας της X. Πράγματι, από την $P(u) = \Pi(u-1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x)u^x &= \sum_{r=0}^{\infty}\mu_{(r)}\frac{(u-1)^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\mu_{(r)}}{r!}\sum_{x=0}^{r}(-1)^{r-x}\binom{r}{x}u^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x!}\sum_{r=x}^{\infty}\frac{(-1)^{r-x}}{(r-x)!}\mu_{(r)}\right)u^x, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$f_X(x) = \frac{1}{x!}\sum_{r=x}^{\infty}\frac{(-1)^{r-x}}{(r-x)!}\mu_{(r)}.$$

Η τελευταία ισότητα δεν χρησιμοποιείται (ως έχει) στην πράξη, δείχνει όμως ότι η κατανομή της X προσδιορίζεται από τις παραγοντικές ροπές $\mu_{(r)}$.

Παραδείγματα 5.1.4. (α) Υποθέτουμε ότι η X έχει τη διωνυμική κατανομή:

$$f_X(x) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Η πιθανογεννήτρια της X είναι η

$$P(t) = \sum_{x=0}^{n} f_X(x)t^x = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pt)^x q^{n-x} = (q+pt)^n.$$

Άρα, η γεννήτρια παραγοντικών ροπών της X είναι η

$$\Pi(t) = P(t+1) = (q+p(t+1))^n = (1+pt)^n = \sum_{r=0}^{n}(n)_r p^r\frac{t^r}{r!}.$$

Έπεται ότι $\mu_{(r)} = (n)_r p^r$ αν $0 \le r \le n$ και $\mu_{(r)} = 0$ αλλιώς.
(β) Έστω X μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με παραγοντικές ροπές

$$\mu_{(r)} = r!\theta^r, \quad r = 1, 2, \ldots$$

όπου $\theta > 0$. Τότε, η γεννήτρια παραγοντικών ροπών της X είναι η

$$\Pi(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_{(r)} \frac{t^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} (\theta t)^r = \frac{1}{1 - \theta t}$$

αν $|t| < 1/\theta$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(t) &= \Pi(t-1) = \frac{1}{1 - \theta(t-1)} = \frac{1}{1 + \theta - \theta t} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \frac{1}{1 - \frac{\theta t}{1+\theta}} \\ &= \frac{1}{1+\theta} \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^x t^x. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$f_X(x) = \frac{1}{1+\theta} \left(\frac{\theta}{1+\theta} \right)^x, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Δηλαδή, η X έχει γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/(1+\theta)$.

5.1β΄ Διμεταβλητές γεννήτριες

Έστω (X, Y) διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή με ακέραιες μη αρνητικές τιμές και συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots$$

Ορισμός 5.1.5. Η διμεταβλητή **πιθανογεννήτρια** της (X, Y) είναι η συνάρτηση

$$P(t, u) = P_{X,Y}(t, u) = \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) t^x u^y.$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_{X,Y}(t, u) = \mathbb{E}(t^X u^Y).$$

Επίσης, η δυναμοσειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει αν $|t|, |u| \le 1$ (διότι $\sum_{x=0}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) = 1$). Συνεπώς, η $P_{X,Y}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και

$$f_{X,Y}(r, s) = \frac{1}{r!s!} \frac{\partial^{r+s}}{\partial u^s \partial t^r} P_{X,Y}(0, 0), \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε την πιθανογεννήτρια $P_{X,Y}$ της (X, Y) τότε μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}$ της (X, Y) (με άλλα λόγια, η πιθανογεννήτρια προσδιορίζει την κατανομή της (X, Y)).

Ορισμός 5.1.6. Η διμεταβλητή **γεννήτρια παραγοντικών ροπών** της (X, Y) είναι η συνάρτηση

$$\Pi_{X,Y}(t, u) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_{(r,s)}}{r!s!} t^r u^s,$$

όπου

$$\mu_{(r,s)} = \mathbb{E}[(X)_r (Y)_s] = \sum_{y=s}^{\infty} \sum_{x=r}^{\infty} (x)_r (y)_s f_{X,Y}(x, y).$$

Η γεννήτρια παραγοντικών ροπών της (X, Y) συνδέεται με την πιθανογεννήτρια της (X, Y) μέσω της επόμενης πρότασης:

Πρόταση 5.1.7. *Ισχύει η ισότητα* $\Pi(t,u) = P(t+1, u+1)$. *Ειδικότερα,*

$$\mu_{(r,s)} = \frac{\partial^{r+s}}{\partial u^s \partial t^r} P(1,1), \quad r, s = 0, 1, 2, \dots$$

Άλλες ιδιότητες της διμεταβλητής πιθανογεννήτριας δίνονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.1.8. *Έστω* (X,Y) *διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή με ακέραιες μη αρνητικές τιμές. Τότε:*

(i) $P_X(t) = P_{X,Y}(t,1)$ *και* $P_Y(u) = P_{X,Y}(1,u)$.

(ii) $P_{X+Y}(t) = P_{X,Y}(t,t)$.

(iii) *Οι* X *και* Y *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$P_{X,Y}(t,u) = P_X(t) P_Y(u).$$

Παράδειγμα 5.1.9. Υποθέτουμε ότι η (X,Y) ακολουθεί την τριωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x,y) = \binom{n}{x,y} p_1^x p_2^y p_0^{n-x-y}, \quad x, y = 0, 1, \dots, n, \ x+y \leq n.$$

Υπολογίστηκε η πιθανογεννήτρια της (X,Y):

$$P(t,u) = (p_0 + p_1 t + p_2 u)^n.$$

Έπεται ότι

$$\Pi(t,u) = P(t+1, u+1) = (1 + p_1 t + p_2 u)^n = \sum (n)_{x+y} p_1^x p_2^y \frac{t^x}{x!} \frac{u^y}{y!},$$

άρα

$$\mu_{(x,y)} = (n)_{x+y} p_1^x p_2^y.$$

Επίσης,

$$P_X(t) = P(t,1) = (p_0 + p_2 + p_1 t)^n = ((1-p_1) + p_1 t)^n,$$

άρα η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρο p_1. Όμοια, η Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρο p_2.

5.1γ΄ Γεννήτριες αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Θεώρημα 5.1.10. *Έστω* $X_1, \dots, X_n$ *ανεξάρτητες, μη αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας. Αν* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *τότε*

$$P_{S_n}(t) = P_{X_1}(t) \cdots P_{X_n}(t).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P_{S_n}(t) &= \mathbb{E}(t^{S_n}) = \mathbb{E}(t^{X_1 + \cdots + X_n}) = \mathbb{E}(t^{X_1} \cdots t^{X_n}) \\ &= \mathbb{E}(t^{X_1}) \cdots \mathbb{E}(t^{X_n}) = P_{X_1}(t) \cdots P_{X_n}(t). \end{aligned}$$

Πόρισμα 5.1.11. *Έστω* $X_1, \dots, X_n$ *ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας. Αν* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *τότε*

$$P_{S_n}(t) = [P_{X_1}(t)]^n.$$

Πρόταση 5.1.12. *Έστω* $(X_j)_{j \geq 1}$ *ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών ακέραιων τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας και έστω* N *μια μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από τις* X_j*, στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αν* $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ *τότε*

$$P_{S_N}(t) = P_N(P_{X_1}(t)).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} P_{S_N}(t) &= \mathbb{E}(t^{S_N}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(t^{S_N} \mid N = n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \mathbb{E}(t^{S_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) [P_{X_1}(t)]^n \\ &= P_N(P_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

5.2 (20 Μαΐου 2009)

5.2α′ Ροπογεννήτριες μιας μεταβλητής

Ορισμός 5.2.1. Έστω X τυχαία μεταβλητή για την οποία υπάρχουν όλες οι ροπές $\mathbb{E}(X^r)$, $r = 1, 2, \ldots$. Η **ροπογεννήτρια** της X είναι η συνάρτηση

$$M(t) = M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Στη διακριτή περίπτωση έχουμε

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{tx_j} f_X(x_j)$$

όπου x_j οι τιμές της X, ενώ στη συνεχή περίπτωση έχουμε

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx.$$

Η ύπαρξη των ροπών κάθε τάξης είναι αναγκαία συνθήκη για να ορίζεται η $M(t)$ σε κάποιο ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0:

Θεώρημα 5.2.2. *Αν η $M_X(t)$ ορίζεται σε ένα διάστημα $(-\rho, \rho)$ (όπου $\rho > 0$) και αν $\mu'_r = \mathbb{E}(X^r)$, τότε*

$$M(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}, \quad |t| < \rho.$$

Συνεπώς,

$$\mu'_r = M^{(r)}(0), \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Η «ιδέα» της απόδειξης (για παράδειγμα, στη συνεχή περίπτωση) είναι να γράψουμε

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{r=0}^{N} \frac{t^r x^r}{r!} \right) f_X(x)\, dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} \frac{t^r}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{r=0}^{N} \mu'_r \frac{t^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \mu'_r \frac{t^r}{r!}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. Έστω X μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή. Συγκρίνοντας τους ορισμούς της πιθανογεννήτριας και της ροπογεννήτριας, βλέπουμε αμέσως ότι

$$M_X(t) = P_X(e^t) \text{ και } P_X(u) = M_X(\log u),$$

όπου οι δύο ποσότητες ορίζονται.

Πρόταση 5.2.3. *Η ροπογεννήτρια του γραμμικού μετασχηματισμού $Y = aX + b$ της X δίνεται από την*

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at).$$

Ειδικότερα, αν $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$, τότε

$$M_Z(t) = e^{-\mu_X t/\sigma_X} M_X(t/\sigma_X) \text{ και } M_X(t) = e^{\mu_X t} M_Z(\sigma_X t).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{bt} e^{(at)X}) = e^{bt}\mathbb{E}(e^{(at)X}) = e^{bt} M_X(at).$$

Παραδείγματα 5.2.4. (α) Υποθέτουμε ότι η X έχει την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad x \geq 0 \ \ (\theta > 0)$$

Η ροπογεννήτρια της X είναι η

$$M(t) = \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta x} e^{tx} dx = \theta \int_0^{\infty} e^{-(\theta - t)x} dx = \frac{\theta}{\theta - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\theta}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{\theta^r}$$

αν $t < \theta$. Έπεται ότι $\mu'_r = \frac{r!}{\theta^r}$, $r = 1, 2, \ldots$.

(β) Υποθέτουμε ότι η X έχει την κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε την τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ με συνάρτηση πυκνότητας την

$$\phi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$M_X(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu^r}{r!} t^r\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{k! 2^k} t^{2k}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[s/2]} \frac{\sigma^{2k}\mu^{s-2k}}{2^k k!(s-2k)!}\right) t^s. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{E}(X^s) = \sum_{k=0}^{[s/2]} \frac{\sigma^{2k}\mu^{s-2k}}{2^k k!(s-2k)!}, \quad s = 1, 2, \ldots$$

5.2β΄ Διμεταβλητές ροπογεννήτριες

Ορισμός 5.2.5. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Η διμεταβλητή **ροπογεννήτρια** της (X, Y) είναι η συνάρτηση

$$M(t, u) = M_{X,Y}(t, u) = \mathbb{E}(e^{tX + uY}).$$

Στη διακριτή περίπτωση έχουμε

$$M(t, u) = \sum_{j,i=0}^{\infty} e^{tx_i + uy_j} f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

όπου x_i, y_j οι τιμές των X και Y αντίστοιχα, ενώ στη συνεχή περίπτωση έχουμε

$$M(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx + uy} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Θεώρημα 5.2.6. *Αν η $M_X(t, u)$ ορίζεται σε έναν δίσκο με κέντρο το $(0, 0)$ και αν $\mu'_{r,s} = \mathbb{E}(X^r Y^s)$, τότε (σε αυτό το δίσκο)*

$$M(t, u) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \mu'_{r,s} \frac{t^r}{r!}\frac{u^s}{s!}.$$

Πρόταση 5.2.7. *Η διμεταβλητή ροπογεννήτρια του γραμμικού μετασχηματισμού $Z = aX + b$, $W = cY + d$ των X, Y δίνεται από την*

$$M_{Z,W}(t,u) = e^{bt+du} M_{X,Y}(at, cu).$$

Άλλες ιδιότητες της διμεταβλητής ροπογεννήτριας δίνονται στην επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 5.2.8. *Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Τότε:*

(i) $M_X(t) = M_{X,Y}(t, 0)$ *και* $M_Y(u) = M_{X,Y}(0, u)$.

(ii) $M_{X+Y}(t) = M_{X,Y}(t,t)$.

(iii) *Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$M_{X,Y}(t,u) = M_X(t) M_Y(u).$$

Παράδειγμα 5.2.9. Υποθέτουμε ότι η (X, Y) ακολουθεί διδιάστατη κανονική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right).$$

Θεωρούμε τις $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ και $W = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$. Τότε,

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{z^2 - 2\rho zw + w^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Υπολογίστηκε η ροπογεννήτρια

$$M_{Z,W}(t,u) = \exp\left(\frac{t^2 + 2\rho ut + u^2}{2}\right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t,u) &= e^{\mu_X t + \mu_Y u} M_{Z,W}(\sigma_x t, \sigma_Y u) \\ &= \exp\left(\mu_X t + \mu_Y u + \frac{\sigma_X^2 t^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y ut + \sigma_Y^2 u^2}{2}\right). \end{aligned}$$

5.2γ΄ Ροπογεννήτριες αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Θεώρημα 5.2.10. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας. Αν $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ τότε*

$$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \mathbb{E}(e^{tX_1+\cdots+tX_n}) = \mathbb{E}(e^{tX_1}\cdots e^{tX_n}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX_1})\cdots\mathbb{E}(e^{tX_n}) = M_{X_1}(t)\cdots M_{X_n}(t). \end{aligned}$$

Πόρισμα 5.2.11. *Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας. Αν $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ τότε*

$$M_{S_n}(t) = [M_{X_1}(t)]^n.$$

Πρόταση 5.2.12. *Έστω $(X_j)_{j\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας και έστω N μια μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από τις X_j, στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αν $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ τότε*

$$M_{S_N}(t) = P_N(M_{X_1}(t)).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} M_{S_N}(t) &= \mathbb{E}(e^{tS_N}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(e^{tS_N} \mid N=n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)[M_{X_1}(t)]^n \\ &= P_N(M_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

Παραδείγματα 5.2.13. (α) Με χρήση ροπογεννητριών ελέγχουμε εύκολα ότι αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε κάθε X_i να έχει την κατανομή $\Gamma(a_i, \theta)$ τότε η $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ έχει την κατανομή $\Gamma(a_1 + \cdots + a_n, \theta)$.

(β) Με χρήση ροπογεννητριών ελέγχουμε εύκολα ότι αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε κάθε X_i να έχει την κανονική κατανομή $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ τότε η $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ έχει την κανονική κατανομή $N(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.

5.3 (25 Μαΐου 2009)

Συζητήθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

1. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει τη διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(α) Να υπολογιστούν: η πιθανογεννήτρια $P_X(t)$ και η γεννήτρια παραγοντικών ροπών $\Pi_X(t)$.

(β) Να δειχτεί ότι $\mu_{(r)} = \mathbb{E}[(X)_r] = \frac{(n-1)_r}{r+1}$ αν $r = 1, 2, \ldots, n-1$ και $\mu_{(r)} = 0$ αν $r = n, n+1, \ldots$.

(γ) Αν $n = kr$ όπου k, r θετικοί ακέραιοι, να δειχτεί ότι $X = Y + kZ$, όπου Y, Z διακριτές τυχαίες μεταβλητές που έχουν ομοιόμορφη κατανομή στα σύνολα $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ και $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ αντίστοιχα.

2. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των τροχαίων δυστυχημάτων σε ένα Σαββατοκύριακο ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Αν p είναι η πιθανότητα ένα τροχαίο δυστύχημα να είναι θανατηφόρο, να υπολογιστούν η συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των θανατηφόρων δυστυχημάτων σε ένα Σαββατοκύριακο.

3. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$ και (από αυτήν) τις ροπές $\mu_r' = \mathbb{E}(X^r)$, $r = 1, 2, \ldots$.

4. Έστω Y μια θετική συνεχής τυχαία μεταβλητή. Αν η τυχαία μεταβλητή $X = \log Y$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ τότε λέμε ότι η Y ακολουθεί την *λογαριθμοκανονική κατανομή*.

(α) Να υπολογιστούν οι ροπές $\mu_r' = \mathbb{E}(Y^r)$, $r = 1, 2, \ldots$.

(β) Αν $Y_1, \ldots, Y_n$ είναι ανεξάρτητες λογαριθμοκανονικές τυχαίες μεταβλητές, να δειχτεί ότι η $W = Y_1 \cdots Y_n$ είναι λογαριθμοκανονική τυχαία μεταβλητή.

5. Έστω ότι η (X, Y) έχει τη διδιάστατη κανονική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right),$$

όπου $-1 < \rho < 1$. Δείξτε ότι οι $Z = X$ και $W - \rho X$ είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της (X, Y).

6. Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)], \quad -1 \leq x, y \leq 1.$$

Αν $Z = X + Y$, δείξτε ότι ισχύει $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ αλλά οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

5.4 (27 Μαΐου 2009)

Ορισμός 5.4.1. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** της X είναι η συνάρτηση

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)).$$

Παρατηρήστε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ορίζεται πάντα. Στη διακριτή περίπτωση έχουμε

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{itx_j} f_X(x_j)$$

όπου x_j οι τιμές της X, ενώ στη συνεχή περίπτωση έχουμε

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx.$$

Παρατηρήσεις. (α) Αν η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X ορίζεται σε ένα διάστημα $(-\rho, \rho)$ τότε ορίζεται σαν μιγαδική συνάρτηση στο δίσκο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα ρ. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\varphi_X(t) = M_X(it) \text{ και } M_X(t) = \varphi_X(-it)$$

για κάθε $t \in (-\rho, \rho)$.

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(t)$ της X ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) $\varphi(0) = 1$.

(ii) $|\varphi(t)| \leq 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

(γ) Αν θεωρήσουμε το γραμμικό μετασχηματισμό $Y = aX + b$ της X, τότε

$$\varphi_Y(t) = e^{ibt}\varphi_X(at), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Στην ειδική περίπτωση που η X ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ και $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, έχουμε

$$\varphi_Z(t) = e^{-i\mu t/\sigma}\varphi_X(t/\sigma) \text{ και } \varphi_X(t) = e^{i\mu t}\varphi_Z(\sigma t).$$

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω $\varphi(t)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X. Τότε, η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.*

Αν η $\mathbb{E}(X^n)$ υπάρχει για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, τότε η φ είναι n φορές παραγωγίσιμη, ισχύουν οι

$$\varphi^{(r)}(0) = i^r \mathbb{E}(X^r), \quad r = 1, 2, \ldots, n$$

και

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^{n} \mu'_r \frac{(it)^r}{r!} + o(t^n)$$

καθώς το $t \to 0^+$, δηλαδή $\lim_{t \to 0^+} \frac{o(t^n)}{t^n} = 0$.

Θεώρημα 5.4.3 (θεώρημα αντιστροφής). *Έστω F η συνάρτηση κατανομής και φ η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X. Αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ είναι σημεία συνέχειας της F, τότε*

$$F(b) - F(a) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^{t} \frac{e^{-ibs} - e^{-ias}}{-is} \varphi(s)\, ds.$$

Συνεπώς, η χαρακτηριστική συνάρτηση φ προσδιορίζει μονοσήμαντα τη συνάρτηση κατανομής F της X.

Ειδικότερα, αν η φ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt < \infty,$$

τότε η X είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Παραδείγματα 5.4.4. (α) Υποθέτουμε ότι η X έχει κατανομή Cauchy με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε,

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(β) Έστω X και Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,\theta]$. Υπολογίζοντας την $\varphi_Z(t)$, όπου $Z = X - Y$, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα αντιστροφής, βλέπουμε ότι η Z έχει την τριγωνική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_Z(z) = \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{|z|}{\theta}\right), \quad -\theta \le z \le \theta.$$