Κεφάλαιο 3

Ροπές κατανομών πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

3.1 (8 Απριλίου 2009)

3.1α′ Μέση τιμή

Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) και μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο εκφράσαμε τη συνάρτηση πιθανότητας ή τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = g(X, Y)$ συναρτήσει της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας ή πυκνότητας $f_{X,Y}$ των X και Y. Η μέση τιμή της Z υπολογίζεται κι αυτή άμεσα από την $f_{X,Y}$, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1. (α) *Έστω (X, Y) διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με τιμές (x_i, y_j) και συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j)$. Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση τότε η μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $Z = g(X, Y)$ ισούται με*

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] = \sum_j \sum_i g(x_i, y_j) f(x_i, y_j)$$

αν η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως.
(β) *Έστω (X, Y) συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x, y)$. Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η $Z = g(X, Y)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η μέση τιμή της $Z = g(X, Y)$ ισούται με*

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y)\, dxdy$$

αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως.

Περιγραφή της απόδειξης. (α) Θέτουμε $R = \{g(x_i, y_j) : i, j \geq 0\}$ και για κάθε $z \in R$ ορίζουμε $I_z = \{(i, j) : g(x_i, y_j) = z\}$. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in R} z\, f_Z(z) = \sum_{z \in R} z \sum_{(i,j) \in I_z} f(x_i, y_j) = \sum_{z \in R} \sum_{(i,j) \in I_z} z f(x_i, y_j).$$

Παρατηρούμε ότι: αν $(i, j) \in I_z$ τότε $z = g(x_i, y_j)$. Άρα,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in R} \sum_{(i,j) \in I_z} g(x_i, y_j) f(x_i, y_j).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι αθροίζοντας πρώτα ως προς $z \in R$ και μετά ως προς όλα τα ζεύγη $(i, j) \in I_z$ αθροίζουμε ως προς όλα τα δυνατά ζεύγη (i, j): κάθε (i, j) ανήκει σε ένα και μόνο I_z, το $I_{g(x_i, y_j)}$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left[g(X, Y)\right] = \sum_j \sum_i g(x_i, y_j) f(x_i, y_j).$$

Οι αναδιατάξεις των όρων στα παραπάνω αθροίσματα είναι επιτρεπτές αν υποθέσουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως.

(β) Κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι ο μετασχηματισμός

$$(x,y) \mapsto (x,z) = (x, g(x,y))$$

είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον

$$(x,z) \mapsto (x,y) = (x, h(x,z))$$

και ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial x}$ και $\frac{\partial h}{\partial x}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Στην παράγραφο 2.3 είδαμε ότι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, h(x,z)) \left| \frac{\partial h(x,z)}{\partial z} \right| dx.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z f_{X,Y}(x, h(x,z)) \left| \frac{\partial h(x,z)}{\partial z} \right| dxdz.$$

Η ισότητα στα παραπάνω ολοκληρώματα αιτιολογείται αν υποθέσουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $(x,z) = (x, g(x,y))$ συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dxdy$$

παρατηρώντας ότι η Ιακωβιανή της $G(x,y) = (x, g(x,y))$ ισούται με $\left| \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right| = 1 / \left| \frac{\partial h(x,z)}{\partial z} \right|$. □

Θεώρημα 3.1.2 (ιδιότητες της μέσης τιμής). (α) (Γραμμικότητα): *Αν $g(X,Y)$ και $h(X,Y)$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις του τυχαίου διανύσματος (X,Y) τότε*

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y) + h(X,Y)\right] = \mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] + \mathbb{E}\left[h(X,Y)\right].$$

Ειδικότερα, αν $g(X)$ και $h(Y)$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις των X και Y αντίστοιχα, τότε

$$\mathbb{E}\left[g(X) + h(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right] + \mathbb{E}\left[h(Y)\right].$$

(β) *Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες και $g(X)$ και $h(Y)$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις των X και Y αντίστοιχα, τότε*

$$\mathbb{E}\left[g(X)h(Y)\right] = \mathbb{E}\left[g(X)\right] \cdot \mathbb{E}\left[h(Y)\right].$$

Περιγραφή της απόδειξης. Εξετάζουμε τη συνεχή περίπτωση, η διακριτή είναι ανάλογη. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X,Y) + h(X,Y)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x,y) + h(x,y)\right] f(x,y)\, dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f(x,y)\, dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, f(x,y)\, dxdy \\
&= \mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] + \mathbb{E}\left[h(X,Y)\right].
\end{aligned}$$

Ειδικότερα,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X) + h(Y)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x,y)\, dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, f(x,y)\, dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \right] dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \right] dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_Y(y)\, dy \\
&= \mathbb{E}\left[g(X)\right] + \mathbb{E}\left[h(Y)\right].
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που οι X και Y είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(X)h(Y)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\,f(x,y)\,dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)\,f_X(x)f_Y(y)\,dxdy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)\,dy\right) \\
&= \mathbb{E}\left[g(X)\right]\cdot\mathbb{E}\left[h(Y)\right].
\end{aligned}$$

Πόρισμα 3.1.3. *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες υπάρχουν οι $\mathbb{E}(X)$ και $\mathbb{E}(Y)$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε*

$$\mathbb{E}\left(\alpha X + \beta Y\right) = \alpha\mathbb{E}\left(X\right) + \beta\mathbb{E}\left(Y\right).$$

Αν επιπλέον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\cdot\mathbb{E}\left(Y\right).$$

3.1β΄ Συνδιακύμανση

Ορισμός 3.1.4 (μεικτές ροπές). Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Η μεικτή ροπή τάξης (r,s) της (X,Y) με κέντρο το (a,b) είναι η

$$\mu_{r,s}(a,b) = \mathbb{E}\left[(X-a)^r(Y-b)^s\right], \quad r,s = 0,1,2,\ldots$$

αν η μέση τιμή στο δεξιό μέλος υπάρχει.

(ii) Η μεικτή ροπή τάξης (r,s) της (X,Y) με κέντρο το $(0,0)$ είναι η

$$\mu'_{r,s} = \mathbb{E}\left(X^rY^s\right), \quad r,s = 0,1,2,\ldots$$

αν η μέση τιμή στο δεξιό μέλος υπάρχει.

(iii) Η κεντρική ροπή τάξης (r,s) της (X,Y) είναι η

$$\mu_{r,s} = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^r(Y-\mu_Y)^s\right], \quad r,s = 0,1,2,\ldots$$

όπου $\mu_X = \mathbb{E}\left(X\right)$ και $\mu_Y = \mathbb{E}\left(Y\right)$, αν η μέση τιμή στο δεξιό μέλος υπάρχει.

Σημείωση. Από τους παραπάνω ορισμούς ελέγχεται εύκολα ότι

$$\mu'_{0,0} = 1, \quad \mu'_{1,0} = \mu_X, \quad \mu'_{0,1} = \mu_Y$$

και

$$\mu_{0,0} = 1, \quad \mu_{1,0} = \mu_{0,1} = 0, \quad \mu_{2,0} = V(X) = \sigma_X^2, \quad \mu_{0,2} = V(Y) = \sigma_Y^2.$$

Ορισμός 3.1.5 (συνδιακύμανση). Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι $\mu_X = \mathbb{E}\left(X\right)$ και $\mu_Y = \mathbb{E}\left(Y\right)$. Η **συνδιακύμανση** των X και Y είναι η

$$\sigma_{X,Y} = C(X,Y) = \mu_{1,1} = \mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$$

αν η μέση τιμή στο δεξιό μέλος υπάρχει. Δηλαδή, $C(X,Y) = \mu_{1,1}$. Συμβολίζουμε τη συνδιακύμανση και με $\sigma_{X,Y}$.

Θεώρημα 3.1.6 (ιδιότητες της συνδιακύμανσης). *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ορίζεται η συνδιακύμανση $C(X,Y)$.*

(i) *Για κάθε $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$C(aX+b, cY+d) = ac\,C(X,Y).$$

(ii) *Η συνδιακύμανση εκφράζεται στην ακόλουθη μορφή:*

$$C(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

(iii) *Η συνδιακύμανση είναι γραμμική ως προς κάθε «θέση»: αν X, Y και Z είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε*

$$C(X,Y+Z) = C(X,Y) + C(X,Z) \text{ και } C(X+Z,Y) = C(X,Y) + C(Z,Y).$$

Σημείωση. Οι αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών είναι άμεσες: χρησιμοποιήστε τη γραμμικότητα της μέσης τιμής.

Παρατηρήσεις. (α) Μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της μεικτής ροπής $\mu'_{1,1} = \mathbb{E}(XY)$ είναι η ύπαρξη των ροπών δεύτερης τάξης $\mathbb{E}(X^2)$ και $\mathbb{E}(Y^2)$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $|XY| \le X^2 + Y^2$.

(β) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, από το πόρισμα 3.1.3 βλέπουμε ότι

$$C(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά:

Παράδειγμα 3.1.7. Έστω X τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1,1]$. Ορίζουμε $Y = X^2$. Τότε, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες. Όμως, απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$C(X,Y) = \mathbb{E}(X^3) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(X^2) = 0.$$

Ορισμός 3.1.8 (ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές). Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ορίζεται η συνδιακύμανση $C(X,Y)$. Οι X και Y λέγονται **ασυσχέτιστες** αν

$$C(X,Y) = 0.$$

Προφανώς, δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες.

Απλές πράξεις δείχνουν ότι η συνδιακύμανση υπεισέρχεται στον υπολογισμό της διασποράς των γραμμικών συνδυασμών τυχαίων μεταβλητών:

Θεώρημα 3.1.9. *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ και $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,C(X,Y).$$

Αν επιπλέον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y).$$

Για την απόδειξη παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} V(aX+bY) &= \mathbb{E}\left([a(X-\mu_X) + b(Y-\mu_Y)]^2\right) \\ &= a^2\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)^2\right] + b^2\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^2\right] + 2ab\mathbb{E}\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,C(X,Y). \end{aligned}$$

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την $C(X,Y) = 0$.

Σημείωση. Η ισότητα του θεωρήματος 3.1.9 γενικεύεται στην περίπτωση που έχουμε γραμμικό συνδυασμό περισσότερων τυχαίων μεταβλητών:

$$V(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_jC(X_i,X_j).$$

Θεώρημα 3.1.10 (ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ και $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Τότε,*

$$[\mathbb{E}(XY)]^2 \le [\mathbb{E}(|XY|)]^2 \le \mathbb{E}(X^2)\cdot\mathbb{E}(Y^2).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z_t = t|X| - |Y|$. Έχουμε

$$P(t) := t^2\mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(|XY|) + \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Z_t^2) \ge 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η διακρίνουσα του $P(t)$ είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Συνεπώς,

$$4[\mathbb{E}(|XY|)]^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\cdot\mathbb{E}(Y^2) \le 0.$$

3.1γ΄ Συντελεστής συσχέτισης

Ορισμός 3.1.11 (συντελεστής συσχέτισης). Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με γνήσια θετικές πεπερασμένες διασπορές. Ο **συντελεστής συσχέτισης** $\rho(X,Y)$ των X και Y ορίζεται ως εξής:

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Πρόταση 3.1.12. $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια της ανισότητας Cauchy–Schwarz: παρατηρούμε ότι

$$[C(X,Y)]^2 = [\mathbb{E}\,(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]^2 \leq \mathbb{E}\,(X^2)\cdot\mathbb{E}\,(Y^2) = V(X)V(Y).$$

Σημείωση. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι «κανονικοποίηση» της συνδιακύμανσης, με την έννοια ότι είναι κατ' απόλυτη τιμή αναλλοίωτος ως προς «γραμμικές μεταβολές» των τυχαίων μεταβλητών:

Πρόταση 3.1.13. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης. Αν $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ με $ac \neq 0$, τότε*

$$\rho(aX+b, cY+d) = \rho(X,Y) \text{ αν } ac > 0$$

και

$$\rho(aX+b, cY+d) = -\rho(X,Y) \text{ αν } ac < 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε $V(aX+b) = a^2V(X)$, $V(cY+d) = c^2V(Y)$ και $C(aX+b, cY+d) = ac\,C(X,Y)$. Συνεπώς,

$$\rho(aX+b, cY+d) = \frac{C(aX+b, cY+d)}{\sqrt{V(aX+b)}\sqrt{V(cY+d)}} = \frac{ac}{|ac|}\frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{ac}{|ac|}\,\rho(X,Y).$$

3.2 (27 Απριλίου 2009)

Πρόταση 3.2.1. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ορίζεται ο συντελεστής συσχέτισης. Τότε, $\rho(X,Y) = \pm 1$ αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ και $W = \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$. Τότε, $\mu_Z = \mu_Y = 0$ και $\sigma_Z = \sigma_W = 1$. Από την πρόταση 3.1.13 έχουμε

$$\rho := \rho(X,Y) = \rho(Z,W) = C(Z,W) = \pm 1.$$

Αν ορίσουμε $U = \rho Z - W$ τότε $\mu_U = 0$ και

$$V(U) = \rho^2 V(Z) + V(W) - 2\rho C(Z,W) = \rho^2 + 1 - 2\rho^2 = 1 - \rho^2 = 0.$$

Από την ανισότητα του Chebyshev,

$$\mathbb{P}(|U - \mu_U| \geq t) \leq \frac{V(U)}{t^2}$$

για κάθε $t > 0$. Από τις $\mu_U = 0$ και $V(U) = 0$ έπεται ότι $\mathbb{P}(|U| \geq t) = 0$ για κάθε $t > 0$ και αυτό δείχνει ότι

$$\mathbb{P}(U = 0) = 1$$

δηλαδή, με πιθανότητα 1 ισχύει $W = \rho Z$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\rho = 1$ έχουμε $Y = \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$, ενώ αν $\rho = -1$ έχουμε $Y = \mu_Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X)$. □

Παράδειγμα 3.2.2. Θεωρούμε τη διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21}, \quad x = 1,2, \quad y = 1,2,3.$$

Υπολογίστηκε ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$ των X και Y.

Ορισμός 3.2.3 (δεσμευμένη μέση τιμή). (α) Έστω (X,Y) διδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές x_i, y_j, $i,j \geq 0$. Η **δεσμευμένη μέση τιμή** της X δεδομένου ότι $Y = y_j$ είναι η

$$m_{X|Y}(y_j) = \mathbb{E}(X \mid y_j) = \sum_i x_i f_{X|Y}(x_i \mid y_j)$$

αν η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως, όπου $f_{X|Y}(\cdot \mid y_j)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δεδομένου ότι $Y = y_j$. Εντελώς ανάλογα ορίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = x_i$ μέσω της

$$m_{Y|X}(x_i) = \mathbb{E}(Y \mid x_i) = \sum_j y_j f_{Y|X}(y_j \mid x_i).$$

(β) Έστω (X,Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η **δεσμευμένη μέση τιμή** της X δεδομένου ότι $Y = y$ είναι η

$$m_{X|Y}(y) = \mathbb{E}(X \mid y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)\, dx$$

αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως, όπου $f_{X|Y}(\cdot \mid y)$ είναι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένου ότι $Y = y_j$. Εντελώς ανάλογα ορίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένου ότι $X = x$ μέσω της

$$m_{Y|X}(x) = \mathbb{E}(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y \mid x)\, dy.$$

Αποδεικνύεται ότι, αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $Z = g(X,Y)$, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της Z δεδομένου ότι $Y = y$ ή $X = x$ υπολογίζεται συναρτήσει της $f_{X|Y}(\cdot \mid y)$ ή της $f_{Y|X}(\cdot \mid x)$, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα που είναι ανάλογο του θεωρήματος 3.1.1:

Θεώρημα 3.2.4. (α) *Έστω (X,Y) διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με τιμές (x_i, y_j) και συνάρτηση πιθανότητας $f(x_i, y_j)$. Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής $Z = g(X,Y)$ δεδομένου ότι $Y = y_j$ ισούται με*

$$\mathbb{E}(Z \mid y_j) = \mathbb{E}\left[g(X,Y) \mid y_j\right] = \sum_i g(x_i, y_j) f_{X|Y}(x_i \mid y_j)$$

αν η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως. Εντελώς ανάλογα,

$$\mathbb{E}(Z \mid x_i) = \mathbb{E}\left[g(X,Y) \mid x_i\right] = \sum_j g(x_i, y_j) f_{Y|X}(y_j \mid x_i).$$

(β) *Έστω (X,Y) συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y)$. Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η $Z = g(X,Y)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η δεσμευμένη μέση τιμή της $Z = g(X,Y)$ δεδομένου ότι $Y = y$ ισούται με*

$$\mathbb{E}(Z \mid y) = \mathbb{E}\left[g(X,Y) \mid y\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x \mid y)\, dx$$

αν το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως. Εντελώς ανάλογα,

$$\mathbb{E}(Z \mid x) = \mathbb{E}\left[g(X,Y) \mid x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{Y|X}(y \mid x)\, dy.$$

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω (X,Y) διακριτή ή συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y)$. Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η $Z = g(X,Y)$ να είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή στην περίπτωση που η (X,Y) είναι συνεχής, τότε*

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] = \mathbb{E}(m_{Z|Y}(y)) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X,Y) \mid Y]\right]$$

και

$$\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right] = \mathbb{E}(m_{Z|X}(x)) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(X,Y) \mid X]\right]$$

αν η $\mathbb{E}\left[g(X,Y)\right]$ υπάρχει.

Σημειωση. Γράφοντας $\mathbb{E}\,[g(X,Y) \mid Y]$ εννοούμε την τυχαία μεταβλητή με τιμές

$$\big(\mathbb{E}\,[g(X,Y) \mid Y]\big)(\omega) = \mathbb{E}\,[g(X,Y) \mid Y(\omega)], \quad \omega \in \Omega.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε μόνο τη διακριτή περίπτωση. Από το θεώρημα 3.1.1 έχουμε

$$\mathbb{E}\,[\mathbb{E}[g(X,Y) \mid Y]] = \sum_j \mathbb{E}[g(X,Y) \mid y_j] f_Y(y_j)$$

και, από το θεώρημα 3.2.4,

$$\mathbb{E}\,[g(X,Y) \mid y_j] = \sum_i g(x_i,y_j) f_{X|Y}(x_i \mid y_j)$$

για κάθε j. Άρα, χρησιμοποιώντας και την $f(x_i,y_j) = f_{X|Y}(x_i \mid y_j) f_Y(y_j)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[\mathbb{E}[g(X,Y) \mid Y]] &= \sum_j \sum_i g(x_i,y_j) f_{X|Y}(x_i \mid y_j) f_Y(y_j) \\
&= \sum_j \sum_i g(x_i,y_j) f(x_i,y_j) \\
&= \mathbb{E}\,[g(X,Y)].
\end{aligned}$$

Ορισμός 3.2.6 (δεσμευμένη διασπορά). Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή για την οποία ορίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή $m_{X|Y}(y) = \mathbb{E}(X \mid y)$. Η **δεσμευμένη διασπορά** της X δεδομένου ότι $Y = y$ ορίζεται ως εξής:

$$\sigma^2_{X|Y}(y) = V(X \mid y) = \mathbb{E}\,[(X - m_{X|Y}(y))^2 \mid y]$$

αν η μέση τιμή στο δεξιό μέλος υπάρχει. Η **δεσμευμένη τυπική απόκλιση** της X δεδομένου ότι $Y = y$ είναι η θετική τετραγωνική ρίζα της δεσμευμένης διασποράς:

$$\sigma_{X|Y}(y) = \sqrt{V(X \mid y)}.$$

Απλές πράξεις και η γραμμικότητα της μέσης τιμής δείχνουν ότι

$$V(X \mid y) = \mathbb{E}(X^2 \mid y) - [\mathbb{E}(X \mid y)]^2.$$

Ανάλογα ορίζονται οι $V(Y \mid x)$ και $\sigma_{Y|X}(x)$.

Παραδείγματα 3.2.7. Δίνεται η διδιάστατη τυχαία μετβλητή (X,Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x,y) = \frac{\lambda(\theta x)^y}{y!} e^{-(\theta+\lambda)y}, \quad x > 0,\ y = 0,1,2\dots$$

(όπου $\theta, \lambda > 0$). Υπολογίστηκαν οι $\mathbb{E}\,(X \mid y)$, $V(X \mid y)$ και $\mathbb{E}\,(Y \mid x)$, $V(Y \mid x)$.

3.3 (29 Απριλίου 2009)

3.3α΄ Δεσμευμένη μέση τιμή (συνέχεια)

Πρόταση 3.3.1. *Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή για την οποία υπάρχει η $\mathbb{E}(X^2)$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\,(X) = \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X \mid Y)]$$

και

$$V\,(X) = \mathbb{E}\,[V(X \mid Y)] + V\,[\mathbb{E}\,(X \mid Y)].$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 3.2.5 με $g(X,Y) = X^k$ έχουμε

$$\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X^k) \mid Y]$$

για $k = 1, 2, \ldots$. Θέτοντας $k = 1$ παίρνουμε την

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)].$$

Από την $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, χρησιμοποιώντας την ίδια ισότητα με $k = 1, 2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X^2 \mid Y)] - (\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)])^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X^2 \mid Y)] - \mathbb{E}([\mathbb{E}(X \mid Y)]^2) + \mathbb{E}([\mathbb{E}(X \mid Y)]^2) - (\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)])^2 \\ &= \mathbb{E}[V(X \mid Y)] + V[\mathbb{E}(X \mid Y)]. \end{aligned}$$

Σημείωση. Έστω (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και $g(x,y)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$ Borel μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν υπάρχει η $\mathbb{E}[g(X,Y)]$ τότε

$$\mathbb{E}[h_1(Y)g(X,Y) + h_2(Y) \mid y] = h_1(y)\,\mathbb{E}[g(X,Y) \mid y] + h_2(y).$$

Με άλλα λόγια,

$$\mathbb{E}[h_1(Y)g(X,Y) + h_2(Y) \mid Y] = h_1(Y)\,\mathbb{E}[g(X,Y) \mid Y] + h_2(Y).$$

Ειδικότερα, αν υπάρχει η $\mathbb{E}(X^2)$ τότε

$$\mathbb{E}[h_1(Y)X + h_2(Y) \mid Y] = h_1(Y)\,\mathbb{E}[X \mid Y] + h_2(Y)$$

και

$$V[h_1(Y)X + h_2(Y) \mid Y] = [h_1(Y)]^2 V(X \mid Y).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε μόνο τη διακριτή περίπτωση. Με βάση τον ορισμό,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h_1(Y)g(X,Y) + h_2(Y) \mid y_j] &= \sum_i (h_1(y_j)g(x_i,y_j) + h_2(y_j)) f_{X|Y}(x_i \mid y_j) \\ &= h_1(y_j)\sum_i g(x_i,y_j) f_{X|Y}(x_i \mid y_j) + h_2(y_j)\sum_i f_{X|Y}(x_i \mid y_j) \\ &= h_1(y_j)\,\mathbb{E}[g(X,Y) \mid y_j] + h_2(y_j) \end{aligned}$$

για κάθε j. Παίρνοντας $g(X,Y) = X$ βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}[h_1(Y)X + h_2(Y) \mid y_j] = h_1(y_j)\,\mathbb{E}[X \mid y_j] + h_2(y_j)$$

για κάθε j. Για την τελευταία ισότητα, γράφουμε

$$\begin{aligned} V[h_1(Y)X + h_2(Y) \mid y_j] &= \mathbb{E}[(h_1(y)X + h_2(Y))^2 \mid y_j] - [\mathbb{E}[h_1(Y)X + h_2(Y) \mid y_j]^2 \\ &= \mathbb{E}[(h_1(y))^2X^2 + 2h_1(Y)h_2(Y)X + (h_2(Y))^2 \mid y_j] \\ &\quad -(h_1(y_j)\,\mathbb{E}[X \mid y_j] + h_2(y_j))^2 \\ &= (h_1(y_j))^2[\mathbb{E}(X^2 \mid y_j) - (\mathbb{E}[X \mid y_j])^2] \\ &= (h_1(y_j))^2 V(X \mid y_j). \end{aligned}$$

για κάθε j. □

Παράδειγμα 3.3.2. Δίνεται μια ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών για τις οποίες υπάρχει η ροπή δεύτερης τάξης $\mathbb{E}(X_i^2)$. Έστω, επίσης, N τυχαία μεταβλητή με μη αρνητικές ακέραιες τιμές, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις X_i και για την οποία υπάρχει η ροπή δεύτερης τάξης $\mathbb{E}(N^2)$. Υπολογίστηκαν η μέση τιμή και η διασπορά του αθροίσματος $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

Για τη μέση τιμή γράφουμε

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S_N \mid N)] = \sum_n \mathbb{E}(S_N \mid n) f_N(n).$$

Όμως,

$$\mathbb{E}(S_N \mid n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\mathbb{E}(X_1).$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \sum_n n f_N(n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Όμοια, για τη διασπορά έχουμε

$$\begin{aligned}
V(S_N) &= \mathbb{E}(V(S_N \mid N)) + V(\mathbb{E}(S_N \mid N)) \\
&= \sum_n V(S_N \mid n) f_N(n) + \sum_n [\mathbb{E}(S_N \mid n)]^2 f_N(n) - [\mathbb{E}(\mathbb{E}(S_N \mid N))]^2 \\
&= \sum_n n V(X_1) f_N(n) + \sum_n n^2 [\mathbb{E}(X_1)]^2 f_N(n) - [\mathbb{E}(S_N)]^2 \\
&= \mathbb{E}(N)V(X_1) + [\mathbb{E}(X_1)]^2 \mathbb{E}(N^2) - [\mathbb{E}(X_1)]^2 [\mathbb{E}(N)]^2 \\
&= \mathbb{E}(N)V(X_1) + [\mathbb{E}(X_1)]^2 (\mathbb{E}(N^2) - [\mathbb{E}(N)]^2) \\
&= \mathbb{E}(N)V(X_1) + [\mathbb{E}(X_1)]^2 V(N).
\end{aligned}$$

3.3β′ Ευθεία παλινδρόμησης

Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι ροπές δεύτερης τάξης $\mathbb{E}(X^2)$ και $\mathbb{E}(Y^2)$. Μελετάμε το εξής πρόβλημα: να ελαχιστοποιηθεί η μέση τετραγωνική απόκλιση $\mathbb{E}\,[(X - (aY + b))^2]$ ως προς a και $b \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$Q(a, b) = \mathbb{E}\,[(X - (aY + b))^2].$$

Θεώρημα 3.3.3. *Η ελάχιστη τιμή της Q είναι η $Q(a_0, b_0)$ όπου*

$$a_0 = \rho_{X,Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \text{ και } b_0 = \mu_X - a_0 \mu_Y = \mu_X - \rho_{X,Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \mu_Y.$$

Επιπλέον,

$$\min Q(a, b) = Q(a_0, b_0) = \sigma_X^2 (1 - \rho_{X,Y}^2).$$

Ορισμός 3.3.4. Η ευθεία $x = a_0 y + b_0 = \mu_X + \rho_{X,Y} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$ λέγεται **ευθεία παλινδρόμησης** της X στην Y. Η $a_0 Y + b_0$ είναι η «βέλτιστη γραμμική προσέγγιση» της X με την έννοια ότι, ανάμεσα σε όλες τις γραμμικές συναρτήσεις της Y, ελαχιστοποιεί τη μέση τετραγωνική απόκλιση από την X. Η ποσότητα $Q(a_0, b_0) = \sigma_X^2(1 - \rho_{X,Y}^2)$ λέγεται **μέσο τετραγωνικό σφάλμα** ή **υπόλοιπο διασποράς**.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.3.3. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
Q(a, b) &= \mathbb{E}\left([(X - \mu_X) - a(Y - \mu_Y) + (\mu_X - a\mu_Y - b)]^2\right) \\
&= \mathbb{E}\,(X - \mu_X)^2 + a^2 \mathbb{E}\,(Y - \mu_Y)^2 + (\mu_X - a\mu_Y - b)^2 - 2a\mathbb{E}\,[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\
&= \sigma_X^2 + a^2 \sigma_Y^2 + (\mu_X - a\mu_Y - b)^2 - 2aC(X, Y) \\
&= \sigma_X^2 + a^2 \sigma_Y^2 + (\mu_X - a\mu_Y - b)^2 - 2a\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y.
\end{aligned}$$

Η Q παίρνει ελάχιστη τιμή στο σημείο για το οποίο $\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$a_0 \sigma_Y^2 - \mu_Y(\mu_X - a_0\mu_Y - b) - \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y = 0$$

και

$$\mu_X - a_0 \mu_Y - b_0 = 0.$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $b_0 = \mu_X - a_0 \mu_Y$ και η πρώτη παίρνει την απλούστερη μορφή $a_0 \sigma_Y^2 - \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y = 0$, οπότε $a_0 = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$. Επιστρέφοντας στη δεύτερη εξίσωση, υπολογίζουμε το b_0.

Τέλος,

$$\begin{aligned}
Q(a_0, b_0) &= \sigma_X^2 + a_0^2\sigma_Y^2 + (\mu_X - a_0\mu_Y - b_0)^2 - 2a_0\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \\
&= \sigma_X^2 + \rho_{X,Y}^2\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}\sigma_Y^2 - 2\rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \\
&= \sigma_X^2 - \rho_{X,Y}^2\sigma_X^2 \\
&= \sigma_X^2(1 - \rho_{X,Y}^2).
\end{aligned}$$

3.3γ′ Καμπύλη παλινδρόμησης

Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η ροπή δεύτερης τάξης $\mathbb{E}(X^2)$ και εξετάζουμε τώρα το εξής γενικότερο πρόβλημα: να ελαχιστοποιηθεί η μέση τετραγωνική απόκλιση $\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right]$ ως προς όλες τις μετρήσιμες h για τις οποίες υπάρχει η $\mathbb{E}\left[(h(Y))^2\right]$.

Θεώρημα 3.3.5. *Η ελάχιστη τιμή της* $\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right]$ *είναι η*

$$\mathbb{E}\left[(X - m(Y))^2\right]$$

όπου $m(y) = \mathbb{E}\left(X \mid y\right)$.

Ορισμός 3.3.6. Η συνάρτηση $m(y)$ λέγεται συνάρτηση παλινδρόμησης της X στην Y. Η καμπύλη $x = m(y) = \mathbb{E}\left(X \mid y\right)$ λέγεται **καμπύλη παλινδρόμησης** της X στην Y.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.3.5. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right] &= \mathbb{E}\left[\{(X - m(Y)) + (m(Y) - h(Y))\}^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(X - m(Y))^2\right] + \mathbb{E}\left[(m(Y) - h(Y))^2\right] + 2\mathbb{E}\left[(X - m(Y))(m(Y) - h(Y))\right].
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\mathbb{E}\left[t(Y)g(X, Y) \mid Y\right] = t(Y)\mathbb{E}\left[g(X, Y) \mid Y\right]$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X - m(Y))(m(Y) - h(Y))\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left\{(X - m(Y))(m(Y) - h(Y)) \mid Y\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(m(Y) - h(Y))\mathbb{E}(X - m(Y) \mid Y)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(m(Y) - h(Y))(\mathbb{E}(X \mid Y) - m(Y))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(m(Y) - h(Y))(m(Y) - m(Y))\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\left[(X - h(Y))^2\right] = \mathbb{E}\left[(X - m(Y))^2\right] + \mathbb{E}\left[(m(Y) - h(Y))^2\right] \geq \mathbb{E}\left[(X - m(Y))^2\right].$$

3.4 (4 Μαΐου 2009)

Συζητήθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

1. Δίνεται συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = 1, \quad |x| < y < 1.$$

Δείξτε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες.

2. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y και Z είναι ανεξάρτητες και καθεμιά ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή θ. Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των $U = X + Y$ και $W = Y + Z$.

3. Έστω X και Y ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές και $Z = aX + bY$, $W = \gamma X + \delta Y$. Ποιά σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές a, b, γ και δ ώστε οι τυχαίες μεταβλητές Z και W να είναι ασυσχέτιστες;

4. Έστω ότι n διακεκριμένα σφαιρίδια κατανέμονται τυχαία μέσα σε $k \geq 2$ διακεκριμένα κελιά. Αν X_i είναι ο αριθμός των σφαιριδίων στο i-οστό κελί, $i = 1, 2, \ldots, k$, να δειχτεί ότι

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{n}{k}, \quad V(X_i) = -(k-1)C(X_i, X_j), \quad \rho(X_i, X_j) = -\frac{1}{k-1}$$

χωρίς να προσδιοριστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των X_i και (X_i, X_j).

5. Από μια κληρωτίδα που περιέχει n λαχνούς αριθμημένους από 1 μέχρι n εξάγονται διαδοχικά (α) χωρίς επανάθεση και (β) με επανάθεση k λαχνοί. Έστω X_r ο λαχνός που εξάγεται στην r-οστή δοκιμή, $r = 1, 2, \ldots, k$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά του αθροίσματος $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.

6. Δίνεται διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{n(n+1)}, \quad 1 \leq x \leq y \leq n.$$

Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $\mathbb{E}(X \mid y)$ και $\mathbb{E}(Y \mid x)$.

7. Δίνεται συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^{a-1}(1-y)^{b-1}, \quad 0 < x < y < 1 \quad (a, b > 0).$$

Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $\mathbb{E}(X \mid y)$ και $\mathbb{E}(Y \mid x)$.

8. Δίνεται διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{x + y - 2}{18}, \quad x, y = 1, 2, 3.$$

Να υπολογιστούν (α) ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y)$ και (β) η καμπύλη παλινδρόμησης της X στην Y.