Κεφάλαιο 2

Κατανομές συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών

2.1 (23 Μαρτίου 2009)

Το γενικό πρόβλημα σε αυτό το Κεφάλαιο είναι το εξής: Δίνονται δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y (στον ίδιο χώρο πιθανότητας). Αν $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, θέλουμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας ή τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = g(X,Y)$ συναρτήσει της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας ή πυκνότητας των X και Y. Γενικότερα, αν $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, θέλουμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας ή τη συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z = g_1(X,Y)$ και $W = g_2(X,Y)$ συναρτήσει της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας ή πυκνότητας των X και Y.

Σε αυτό το μάθημα συζητήσαμε την κατανομή του αθροίσματος $Z = X + Y$ και της διαφοράς $W = X - Y$ των X και Y.

2.1α΄ Διακριτή περίπτωση

Έστω X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με τιμές x_i, y_j, $i, j \geq 0$. Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = z - x_i) = \sum_i f(x_i, z - x_i).$$

Όμοια,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_j f(z - y_j, y_j).$$

Ο φορέας της $Z = X + Y$ είναι το σύνολο $\{x_i + y_j : i, j \geq 0\}$. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω (X,Y) ένα διακριτό τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πιθανότητας την f. Η συνάρτηση πιθανότητας της $Z = X + Y$ δίνεται από την*

$$f_Z(z) = \sum_i f(x_i, z - x_i) = \sum_j f(z - y_j, y_j).$$

Αν, επιπλέον, οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_Z(z) = \sum_i f_X(x_i) f_Y(z - x_i) = \sum_j f_X(z - y_j) f_Y(y_j).$$

Εντελώς ανάλογα μελετάμε την διαφορά $W = X - Y$. Για κάθε $w \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\mathbb{P}(X - Y = w) = \sum_i \mathbb{P}(X = x_i, Y = x_i - w) = \sum_i f(x_i, x_i - w).$$

Όμοια,

$$\mathbb{P}(X - Y = w) = \sum_j f(y_j + w, y_j).$$

Ο φορέας της $W = X - Y$ είναι το σύνολο $\{x_i - y_j : i, j \geq 0\}$. Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω (X, Y) ένα διακριτό τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πιθανότητας την f. Η συνάρτηση πιθανότητας της $W = X - Y$ δίνεται από την*

$$f_W(w) = \sum_i f(x_i, x_i - w) = \sum_j f(y_j + w, y_j).$$

Αν, επιπλέον, οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_W(w) = \sum_i f_X(x_i) f_Y(x_i - w) = \sum_j f_X(y_j + w) f_Y(y_j).$$

Παραδείγματα 2.1.3. Συζητήθηκαν τα εξής παραδείγματα:

1. Μια κληρωτίδα περιέχει k λαχνούς της σειράς α′, r λαχνούς της σειράς β′ και s λαχνούς της σειράς γ′. Επιλέγουμε τυχαία με επανάθεση n λαχνούς και θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα (X, Y) όπου X ο αριθμός των λαχνών της σειράς α′ και Y ο αριθμός των λαχνών της σειράς β′ που επιλέγονται. Υπολογίστηκαν: η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X και Y και η συνάρτηση πιθανότητας της $Z = X + Y$.

2. Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

και

$$f_Y(y) = \binom{r}{y} p^y q^{r-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, r,$$

όπου $0 < p, q < 1$ και $p + q = 1$. Υπολογίστηκε η συνάρτηση πιθανότητας της $Z = X + Y$.

2. Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y με συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x) = p_1 q_1^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

και

$$f_Y(y) = p_2 q_2^y, \quad y = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου $0 < p_i, q_i < 1$ και $p_i + q_i = 1$ $(i = 1, 2)$. Υπολογίστηκε η συνάρτηση πιθανότητας της $W = X - Y$.

2.1β′ Συνεχής περίπτωση

Έστω X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_{X+Y}(z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\, dy dx.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = u - x$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(x, u - x)\, du dx = \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, u - x)\, dx \right] du.$$

Συνεπώς, αν $Z = X + Y$ έχουμε

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\, dx.$$

Όμοια,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)\, dy.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω* (X, Y) *ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την* f. *Η συνάρτηση πυκνότητας της* $Z = X + Y$ *δίνεται από την*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y)\, dy.$$

Αν, επιπλέον, οι X *και* Y *είναι ανεξάρτητες, τότε*

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y) f_Y(y)\, dy.$$

Σημείωση. Η **συνέλιξη** δύο απολύτως ολοκληρώσιμων συναρτήσεων g και h ορίζεται ως εξής:

$$(g * h)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) h(z - x)\, dx.$$

Με αυτή την ορολογία, αν X και Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η συνάρτηση πυκνότητας του αθροίσματός τους είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων πυκνότητάς τους, δηλαδή

$$f_{X+Y} = f_X * f_Y.$$

Εντελώς ανάλογα μελετάμε την διαφορά $W = X - Y$. Για κάθε $w \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_{X-Y}(w) = \mathbb{P}(X - Y \le w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x-w}^{\infty} f(x, y)\, dy dx.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = x - u$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}(X - Y \le w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{w} f(x, x - u)\, du dx = \int_{-\infty}^{w} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - u)\, dx \right] du.$$

Συνεπώς, αν $W = X - Y$ έχουμε

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - w)\, dx.$$

Όμοια,

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y + w, y)\, dy.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω* (X, Y) *ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την* f. *Η συνάρτηση πυκνότητας της* $W = X - Y$ *δίνεται από την*

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x - w)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y + w, y)\, dy.$$

Αν, επιπλέον, οι X *και* Y *είναι ανεξάρτητες, τότε*

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x - w)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y + w) f_Y(y)\, dy.$$

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Υποθέτουμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(\alpha, \theta)$ και η Y ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(\beta, \theta)$. Τότε η $X + Y$ ακολουθεί την κατανομή

$$\Gamma(\alpha + \beta, \theta).$$

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι

$$f_X(x) = \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

και
$$f_Y(y) = \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\theta y}, \quad y > 0.$$
Άρα, $f_{X+Y}(z) = 0$ αν $z \le 0$. Αν $z > 0$ τότε
$$f_{X+Y}(z) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-\theta z} \int_0^z x^{\alpha-1}(z-x)^{\beta-1} dx.$$
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = zt$ (με $dx = zdt$) παίρνουμε
$$f_{X+Y}(z) = \frac{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha+\beta} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z}.$$
Από την τελευταία σχέση και τον ορισμό των πυκνοτήτων γάμμα, είναι φανερό ότι η f_{X+Y} πρέπει να είναι η πυκνότητα γάμμα $\Gamma(\alpha+\beta, \theta)$. Επιπλέον, αφού ισχύει αυτό, πρέπει να έχουμε
$$\frac{\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$
Δηλαδή, εμμέσως υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα στον αριθμητή:
$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Σημείωση. Ξεκινώντας από την τελευταία ισότητα μπορούμε να ορίσουμε μια νέα οικογένεια πυκνοτήτων, τις πυκνότητες *Βήτα*. Η πυκνότητα Βήτα με παραμέτρους α και β ορίζεται από την
$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$
(και $f(x) = 0$ αλλιώς). Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση
$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0$$
λέγεται συνάρτηση Βήτα.

Παράδειγμα 2.1.7 (κατανομή $\chi^2(n)$). Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $Z_1, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε κάποιον χώρο πιθανότητας. Θέτουμε $Y_i = Z_i^2$, $i = 1, \ldots, n$. Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή
$$U_n = Y_1 + \cdots + Y_n = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$$
ακολουθεί την **κατανομή χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας**. Σε αυτό το παράδειγμα, υπολογίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της U_n.

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση πυκνότητας της $Y = Z^2$ όπου Z τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή. Για κάθε $y > 0$ έχουμε
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) = F_Z(\sqrt{y}) - F_Z(-\sqrt{y}).$$
Έπεται ότι
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y/2} = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-y/2}, \quad y > 0.$$
Δηλαδή, η Y ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(1/2, 1/2)$.

Οι $Y_1, \ldots, Y_n$ είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα και επαγωγή, βλέπουμε ότι η $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma(n/2, 1/2)$. Δηλαδή,
$$f_{U_n}(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2}, \quad t > 0.$$

2.2 (30 Μαρτίου 2009)

Συνεχίσαμε τη συζήτηση παραδειγμάτων σχετικά με την κατανομή αθροισμάτων ή διαφορών τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα 2.2.1 (κατανομή $\chi(n)$). Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε τη συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{U_n}(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t/2}, \quad t > 0$$

της $U_n = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$, όπου $Z_1, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Η τετραγωνική της ρίζα $V_n = \sqrt{U_n}$ ακολουθεί την **κατανομή χ με n βαθμούς ελευθερίας**. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}(V_n \leq v) = \mathbb{P}(U_n \leq v^2),$$

άρα

$$F_{V_n}(v) = F_{U_n}(v^2).$$

Έπεται ότι

$$f_{V_n}(v) = 2v f_{U_n}(v^2) = 2v \, \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{n-2} e^{-v^2/2},$$

δηλαδή

$$f_{V_n}(v) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(n/2)} v^{n-1} e^{-v^2/2}.$$

Παράδειγμα 2.2.2 (κατανομή Laplace). Οι χρόνοι X και Y μεταξύ διαδοχικών αφίξεων σε σταθμό βενζίνης είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(t) = f_Y(t) = \theta e^{-\theta t}, \quad t \geq 0$$

(όπου $\theta > 0$). Για τον υπολογισμό της πυκνότητας της $W = X - Y$ χρησιμοποιούμε την

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y+w) f_Y(y) \, dy$$

και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Αν $w \geq 0$ τότε $y + w \geq y$ οπότε

$$f_W(w) = \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta(y+w)} \theta e^{-\theta y} dy = \theta^2 e^{-\theta w} \int_0^{\infty} e^{-2\theta y} dy = \frac{\theta}{2} e^{-\theta w}.$$

(ii) Αν $w < 0$ τότε $y \geq y + w$ οπότε

$$f_W(w) = \int_{-w}^{\infty} \theta e^{-\theta(y+w)} \theta e^{-\theta y} dy = \theta^2 e^{-\theta w} \int_{-w}^{\infty} e^{-2\theta y} dy = \frac{\theta}{2} e^{\theta w}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο περιπτώσεις, έχουμε

$$f_W(w) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta |w|}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Η κατανομή της W λέγεται **κατανομή Laplace**.

Παράδειγμα 2.2.3. Η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(όπου $|\rho| < 1$). Υπολογίστηκε η συνάρτηση πυκνότητας της $Z = X + Y$: αρχικά, έχουμε

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho x(z-x) + (z-x)^2)\right).$$

Με απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho x(z-x)+(z-x)^2)=\frac{1}{1-\rho}\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{1}{4(1+\rho)}z^2.$$

Έπεται ότι

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{z^2}{4(1+\rho)}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{1-\rho}\left(x-\frac{z}{2}\right)^2\right).$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\left(x-\frac{z}{2}\right)/\sqrt{(1-\rho)/2}$, παίρνουμε

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1+\rho}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4(1+\rho)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2(1+\rho)}}e^{-\frac{z^2}{4(1+\rho)}}.$$

Δηλαδή, η Z ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $2(1+\rho)$.

2.2α΄ Γινόμενο και πηλίκο τυχαίων μεταβλητών

Έστω X,Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και $Z=XY$. Για κάθε $z\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$F_Z(z)=\mathbb{P}(XY\le z)=\iint_{\{(x,y):xy\le z\}}f(x,y)\,dydx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται ως άθροισμα:

$$\int_{-\infty}^{0}\int_{z/x}^{\infty}f(x,y)\,dydx+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z/x}f(x,y)\,dydx.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=u/x$ παίρνουμε

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}f(x,u/x)\,\frac{1}{|x|}\,dudx+\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}f(x,u/x)\,\frac{1}{|x|}\,dudx.$$

Δηλαδή,

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,u/x)\,\frac{1}{|x|}\,dx\right]du.$$

Έπεται ότι

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z/x)\,\frac{1}{|x|}\,dx.$$

Όμοια,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z/y,y)\,\frac{1}{|y|}\,dy.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω (X,Y) ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την f. Η συνάρτηση πυκνότητας της $Z=XY$ δίνεται από την*

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z/x)\,\frac{1}{|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(z/y,y)\,\frac{1}{|y|}\,dy.$$

Αν, επιπλέον, οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z/x)\,\frac{1}{|x|}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(z/y)f_Y(y)\,\frac{1}{|y|}\,dy.$$

Εντελώς ανάλογα μελετάμε το πηλίκο $W=X/Y$. Στο επόμενο μάθημα θα δούμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα, το οποίο θα μας δώσει απλά την πυκνότητα της W (παρατηρήστε ότι, στην περίπτωση του πηλίκου, οι «ρόλοι» των X και Y δεν είναι συμμετρικοί):

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω (X,Y) ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την f. Η συνάρτηση πυκνότητας της $W = X/Y$ δίνεται από την*

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, x/w)\,\frac{|x|}{w^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(yw, y)\,|y|\,dy.$$

Αν, επιπλέον, οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(x/w)\,\frac{|x|}{w^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(yw) f_Y(y)\,|y|\,dy.$$

Παράδειγμα 2.2.6. Η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

(όπου $|\rho| < 1$). Υπολογίστηκε η συνάρτηση πυκνότητας της $W = X/Y$: αρχικά, έχουμε

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(yw) f_Y(y)\,|y|\,dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot 2 \int_0^{\infty} |y| \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(w^2 - 2\rho w_1)y^2\right) dy.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$u = y\frac{\sqrt{w^2 - 2\rho w + 1}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

παίρνουμε

$$f_W(w) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1-\rho^2}{w^2 - 2\rho w + 1} \int_0^{\infty} u e^{-u^2/2} du.$$

Δηλαδή,

$$f_W(w) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{w-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2}.$$

Η W ακολουθεί **κατανομή Cauchy** με παραμέτρους $\mu = \rho$ και $\lambda = \sqrt{1-\rho^2}$.

Παράδειγμα 2.2.7 (κατανομή Student). Έστω Z τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή και U_n τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $\chi^2(n)$. Υποθέτουμε ότι οι Z, U_n είναι ανεξάρτητες. Η τυχαία μεταβλητή

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{U_n/n}}$$

ακολουθεί την **κατανομή Student με n βαθμούς ελευθερίας**. Για τον υπολογισμό της f_{T_n} υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση πυκνότητας της $W_n = Z/V_n$, όπου $V_n = \sqrt{U_n}$. Στο παράδειγμα 2.2.1 είδαμε ότι

$$f_{V_n}(v) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(n/2)} v^{n-1} e^{-v^2/2}.$$

Συνεπώς,

$$f_{W_n}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(wy) f_{V_n}(y)|y|\,dy = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(n/2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-\frac{(w^2+1)y^2}{2}} y\,dy.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = (w^2+1)y^2/2$ παίρνουμε

$$f_{W_n}(w) = \frac{1}{(w^2+1)^{(n+1)/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} t^{(n-1)/2} e^{-t} dt = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \frac{1}{(w^2+1)^{(n+1)/2}}.$$

Παρατηρώντας ότι

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)} = \frac{1}{B(1/2, n/2)},$$

καταλήγουμε στην

$$f_{W_n}(w) = \frac{1}{B(1/2, n/2)} \frac{1}{(w^2+1)^{(n+1)/2}}, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Αφού $T_n = \sqrt{n} W_n$, έχουμε $f_{T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} f_{W_n}(t/\sqrt{n})$. Συνεπώς,

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n} B(1/2, n/2)} \frac{1}{(1+t^2/n)^{(n+1)/2}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2.2.8 (κατανομή Snedecor). Η **κατανομή Snedecor με k και n βαθμούς ελευθερίας** είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$W_{k,n} = \frac{U_k/k}{U_n/n}$$

όπου U_k, U_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές $\chi^2(k)$ και $\chi^2(n)$ αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε πρώτα τη συνάρτηση πυκνότητας της $S_{k,n} = U_k/U_n$: έχουμε

$$f_{S_{k,n}}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_k}(sx) f_{U_n}(x) |x| \, dx = \frac{1}{2^{\frac{k+n}{2}} \Gamma(k/2)\Gamma(n/2)} s^{\frac{k}{2}-1} \int_0^{\infty} x^{\frac{k+n}{2}-1} e^{-(1+s)x/2} dx.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = (1+s)x/2$ παίρνουμε

$$f_{S_{k,n}}(s) = \frac{\Gamma((k_n)/2)}{\Gamma(k/2)\Gamma(n/2)} \frac{s^{\frac{k}{2}-1}}{(1+s)^{(k+n)/2}} = \frac{1}{B(k/2, n/2)} \frac{s^{\frac{k}{2}-1}}{(1+s)^{(k+n)/2}}, \quad s \geq 0.$$

Αφού $W_{k,n} = \frac{n}{k} S_{k,n}$, έχουμε $f_{W_{k,n}}(w) = \frac{k}{n} f_{W_n}(kw/n)$. Συνεπώς,

$$f_{W_{k,n}}(w) = \frac{1}{B(k/2, n/2)} \frac{(kw/n)^{\frac{k}{2}-1}}{(1+kw/n)^{(k+n)/2}} = \frac{k^{k/2} n^{n/2}}{B(k/2, n/2)} \frac{w^{\frac{k}{2}-1}}{(n+kw)^{(k+n)/2}}, \quad w \geq 0.$$

2.3 (1 Απριλίου 2009)

Έστω (X, Y) ένα συνεχές τυχαίο διάνυσμα. Κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, αν $G = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z = g_1(X,Y)$ και $W = g_2(X,Y)$ εκφράζεται συναρτήσει της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας των X και Y:

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω (X,Y) συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την f. Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός*

$$(x, y) \mapsto (z, w) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

αντιστρέφεται και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$(z, w) \mapsto (x, y) = (h_1(z,w), h_2(z,w))$$

υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h_i}{\partial z}$, $\frac{\partial h_i}{\partial w}$ $(i = 1, 2)$ και είναι συνεχείς. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της (Z, W) δίνεται από την

$$f_{Z,W}(z, w) = f(h_1(z,w), h_2(z,w)) \, |J(z,w)|$$

όπου $J(z,w)$ η Ιακωβιανή της $H = (h_1, h_2)$ στο (z,w).

Περιγραφή της απόδειξης. Θεωρούμε τη συνάρτηση κατανομής της (Z, W):

$$F_{Z,W}(z, w) = \mathbb{P}(g_1(x,y) \leq z, g_2(x,y) \leq w) = \iint_A f(x,y) \, dxdy,$$

όπου $A = \{(x,y) : g_1(x,y) \leq z, g_2(x,y) \leq w\}$. Παρατηρούμε ότι $(x,y) \in A$ αν και μόνο αν $u \leq z, v \leq w$, όπου $u = g_1(x,y)$, $v = g_2(x,y)$, ή ισοδύναμα, $x = h_1(u,v)$, $y = h_2(u,v)$. Κάνοντας αυτή την αλλαγή μεταβλητής, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_{Z,W}(z,w) &= \iint_{\{(u,v):u\leq z, v\leq w\}} f(h_1(u,v),h_2(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, duvdu \\ &= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{w} f(h_1(u,v),h_2(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, dvdu. \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς z και w συμπεραίνουμε ότι

$$f_{Z,W}(z,w) = f(h_1(z,w),h_2(z,w))\,|J(z,w)|.$$

Πόρισμα 2.3.2. *Έστω (X,Y) συνεχές τυχαίο διάνυσμα με συνάρτηση πυκνότητας την f. Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός*

$$(x,y) \mapsto (x,z) = (x, g(x,y))$$

αντιστρέφεται και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$(x,z) \mapsto (x,y) = (x, h(x,z))$$

υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ και είναι συνεχείς. Τότε, η συνάρτηση πυκνότητας της $Z = g(X,Y)$ δίνεται από την

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,h(x,z)) \left|\frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\right| dx.$$

Περιγραφή της απόδειξης. Από το θεώρημα 2.3.2 έχουμε

$$f_{X,Z}(x,z) = f(x,h(x,z))\,|J(x,z)| = f(x,h(x,z))\,\left|\frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\right|.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Z}(x,z)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,h(x,z)) \left|\frac{\partial h}{\partial z}(x,z)\right| dx.$$

Παράδειγμα 2.3.3. Το πόρισμα 2.3.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου δύο τυχαίων μεταβλητών. Εξετάστηκε η περίπτωση του πηλίκου:

(i) Θεωρούμε το μετασχηματισμό $(x,y) \mapsto (x,w) = (x, x/y)$ με αντίστροφο τον $(x,w) \mapsto (x,y) = (x, x/w)$. Έχουμε $\frac{\partial (x/w)}{\partial w} = -\frac{x}{w^2}$, συνεπώς

$$f_{X/Y}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,x/w)\,\frac{|x|}{w^2}\,dw.$$

(i) Θεωρούμε το μετασχηματισμό $(x,y) \mapsto (w,y) = (x/y, y)$ με αντίστροφο τον $(x,w) \mapsto (x,y) = (yw, y)$. Έχουμε $\frac{\partial (yw)}{\partial w} = y$, συνεπώς

$$f_{X/Y}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(yw,y)\,|y|\,dw.$$

Αυτός ήταν ο ισχυρισμός του θεωρήματος 2.2.5.

Παράδειγμα 2.3.4 (κατανομή Rayleigh). Στο κεφάλαιο 1 συζητήθηκε το μοντέλο του Herschell: θεωρούμε βολές προς ένα στόχο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του επιπέδου και το τυχαίο διάνυσμα (X,Y) όπου X η οριζόντια απόκλιση και Y η κατακόρυφη απόκλιση της βολής από το στόχο. Με την υπόθεση ότι οι X,Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την αρχή των αξόνων, δείξαμε ότι υπάρχει σταθερά $\sigma > 0$ ώστε

$$f(x,y) = f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right), \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Ζητάμε τη συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ (της απόστασης της βολής από το στόχο).

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ με αντίστροφο τον

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Έχουμε $J(r,\theta) = r$, συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου διανύσματος (R,Θ) δίνεται από την

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r = \frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την περιθώρια πυκνότητα

$$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta = \frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geq 0.$$

Η κατανομή της R λέγεται **κατανομή Rayleigh**.

Παράδειγμα 2.3.5 (κατανομή Maxwell). Υποθέτουμε ότι οι προβολές V_1, V_2, V_3 της ταχύτητας σωματιδίου σε σταθερό σύστημα αξόνων είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή:

$$f_{V_i}(v_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v_i^2}{2\sigma^2}\right), \quad v_i \in \mathbb{R}$$

όπου $\sigma > 0$ (μοντέλο Maxwell). Ζητάμε τη συνάρτηση πυκνότητας του μέτρου $V = \sqrt{V_1^2+V_2^2+V_3^2}$ της ταχύτητας του σωματιδίου.

Χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό

$$v = \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}, \quad \theta = \arctan(v_2/v_1), \quad \phi = \arccos(v_3/\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2})$$

με αντίστροφο τον

$$v_1 = v\sin\phi\,\cos\theta, \quad v_2 = v\sin\phi\,\sin\theta, \quad v_3 = v\cos\theta.$$

Έχουμε $J(v,\theta,\phi) = -v^2\sin\phi$, συνεπώς η συνάρτηση πυκνότητας του τυχαίου διανύσματος (V,Θ,Φ) δίνεται από την

$$f_{V,\Theta,\Phi}(v,\theta,\phi) = f_{V_1}(v\sin\phi\,\cos\theta)f_{V_2}(v\sin\phi\,\sin\theta)f_{V_3}(v\cos\theta)\cdot v^2\sin\phi = \frac{\sin\phi}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3}v^2e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}},$$

$(v \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi)$. Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε την περιθώρια πυκνότητα $f_V(v)$ ολοκληρώνοντας ως προς θ και ϕ:

$$f_V(v) = \frac{4v^2}{\lambda^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{v^2}{\lambda^2}}, \quad v \geq 0,$$

όπου $\lambda = \sigma\sqrt{2}$. Η κατανομή της V λέγεται **κατανομή Maxwell**.

Ασκήσεις 2.3.6. Συζητήθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

1. Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1-p$. Αν X είναι το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία και Y είναι το πλήθος των αποτυχιών από την πρώτη μέχρι τη δεύτερη επιτυχία, να δειχθεί ότι η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $X+Y=n$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο σύνολο $\{0,1,2,\dots,n\}$.

2. Δίνονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y οι οποίες ακολουθούν κατανομή Poisson με παραμέτρους θ και λ αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $X+Y=n$ είναι διωνυμική με παραμέτρους n και $p=\frac{\theta}{\theta+\lambda}$.

3. Δύο άτομα συμφωνούν να συναντηθούν, ορισμένη ημέρα και σε ορισμένο μέρος, μεταξύ των ωρών a και $a+b$. Συμφωνούν επίσης ότι κανένας δεν μπορεί να περιμένει τον άλλο περισσότερο χρόνο από θ, όπου $0<\theta<b$. Αν υποθέσουμε ότι καθένας από τους δύο είναι το ίδιο πιθανό να φτάσει στον τόπο της συνάντησης σε οποιαδήποτε στιγμή του προκαθορισμένου χρονικού διαστήματος και ανεξάρτητα από τον άλλον, υπολογίστε την πιθανότητα να καταφέρουν να συναντηθούν.

2.4 (6 Απριλίου 2009)

Συζητήθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

1. Δίνονται δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $[0,1]$. Προσδιορίστε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $Z=X+Y$, $W=X-Y$ και εξετάστε αν είναι ανεξάρτητες.

2. Δίνονται $\alpha,\beta>0$ και η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) με συνάρτηση πυκνότητας την

$$f(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(y-x)^{\beta-1}e^{-y},\quad 0<x<y<\infty.$$

Να προσδιοριστούν: (α) η συνάρτηση πυκνότητας της (X,Z) όπου $Z=Y-X$, (β) η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της Z. Είναι οι X και Z ανεξάρτητες;

3. Ο χρόνος ζωής μιας λυχνίας ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ ώρες. Μια μηχανή χρησιμοποιεί δύο λυχνίες αυτού του τύπου ως εξής: αρχικά μπαίνει σε λειτουργία η πρώτη λυχνία και όταν αυτή χαλάσει μπαίνει σε λειτουργία η δεύτερη λυχνία. Αν U και W είναι οι χρόνοι ζωής της πρώτης και δεύτερης λυχνίας αντίστοιχα, δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή της U δεδομένου ότι $U+W=t$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $[0,t]$.

Δείξτε επίσης ότι η $V/(U+W)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0,1]$.

4. Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1$$

και

$$f_Y(y)=ye^{-y^2/2},\quad y>0.$$

Προσδιορίστε τη συνάρτηση πυκνότητας της $Z=XY$.

5. Δύο άτομα ρίχνουν από ένα νόμισμα ως τη στιγμή που και οι δύο θα έχουν φέρει κορώνα. Δείξτε ότι ο μέγιστος αριθμός Z των ρίψεων που απαιτούνται έχει συνάρτηση πιθανότητας την

$$f_Z(z)=\mathbb{P}(Z=z)=\left(\frac{1}{2}\right)^{z-1}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{z-1},\quad z=1,2,\dots$$

6. Δίνονται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_n$. Για κάθε $k=1,\dots,n$, η συνάρτηση κατανομής της X_k ισούται με

$$F_{X_k}(x)=\mathbb{P}(X_k\le x)=x^k,\quad 0\le x<1$$

(συνεπώς, $F_{X_k}(x)=0$ αν $x<0$ και $F_{X_k}(x)=1$ αν $x\ge 1$). Να προσδιοριστούν: (α) η συνάρτηση κατανομής και (β) η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y_n=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.

7. Δίνονται ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές $X_1,\dots,X_n$ με

$$f_{X_k}(x)=\mathbb{P}(X_k=x)=p_kq_k^x,\quad x=0,1,2,\dots\quad (0<p_k<1,\ q_k=1-p_k).$$

Δείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y=\min\{X_1,\dots,X_n\}$ έχει τη γεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας την

$$f_Y(y)=\mathbb{P}(Y=y)=pq^y,\quad y=0,1,2,\dots$$

όπου $q=q_1q_2\cdots q_n$ και $p=1-q$.